

推移质运动过程的非线性动力学特性^{*}

白玉川^① 徐海珏^① 许 栋^① Chiu-on NG^②

(^① 天津大学河流海岸工程泥沙研究室, 天津 300072; ^② 香港大学机械系, 香港 999077)

摘要 天然沙质海岸及河床上存在着不同形式的床面形态, 其运动变化受床面附近推移质泥沙的运动特性所决定. 从床面层内推移质集体运动出发, 探讨了推移质运动过程的非线性动力学特性, 发现泥沙起动、推移质平衡输沙以及床面形态由平整到沙纹及沙垄等不同发展阶段, 受推移质运动过程的非线性动力特征所决定, 它们分别对应于推移运动过程中的不同非线性状态. 通过与法国夏都水利实验室床面形态试验比较, 进一步证明: “床面形态从平整到沙垄的演化与否”由推移质泥沙运动过程的突变特性所决定, “突变分界线”是平整床面与沙纹及沙垄床面的分界曲线.

关键词 推移质 床面形态 非线性动力学特性

当 21 世纪来临之际, 各门学科面临着新的变革和完善, 世界科学发展呈现两大趋势: 一是学科之间高度交叉, 形成新的交叉学科; 二是“非线性科学”的崛起和向其他学科的渗透, 以之描述解释各学科领域所涉及研究事物的非线性过程^[1,2]. 而作为泥沙学科所研究的重大主题“河流动力过程”, 其具有典型的非线性特征, 也正是泥沙科学今后研究发展的方向. 本文针对决定“河流弱动力过程”的推移质泥沙运动的非线性特征展开研究.

泥沙颗粒按其运动形式的不同, 可以分为接触质、跃移质、层移质和悬移质, 其中前 3 种形式又统称为推移质^[3]. 泥沙颗粒的起动及推移运动过程具有随机性, 许多泥沙专家都对此做了详细的说明和卓越的研究, 建立了统计泥沙运动力学理论^[4,5]. 随着泥沙机理研究的深入, 发现水流运动决定着推移质泥沙集体运动的形式, 即沙波运动及其相应的床面形态. 伴随着水流的加强, 这种运动形式要经过泥沙起动、沙纹、沙垄、床面平整和沙浪等几个不同的确定发展阶段. 随机中拥有确定性, 确定中又酝酿着不稳定, 这些运动形式也正体现出了推移质运动

收稿日期: 2005-08-08; 接受日期: 2006-03-20

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 50279030, 40376028)和香港 HKU 7081/02E 和 HKU 7199/03E 资助项目

过程的非线性动力学的特征 [6~10]

1 推移质泥沙受力模型

当水流流过松散的河床时, 假设床面上水流的时均流速为 $u_b(y)$, 则单颗粒床面泥沙在水流的作用下, 除了承受上举力 F_{Li} , 拖曳力 F_{Di} , 重力 W_i 外, 由于推移质运动是泥沙群体运动的一种形式, 还要承受推移质之间的颗粒间离散力(P_{Li} , P_{Di}), 其中 P_{Li} 代表升力方向(竖直方向)上的离散力, P_{Di} 代表拖曳力方向(水平方向)上的离散力(见图 1 和 2). 推移质颗粒的受力大小还与其在床面上所处的位置有极大的关系(如图 3), 因此泥沙起动具有很大的随机性.

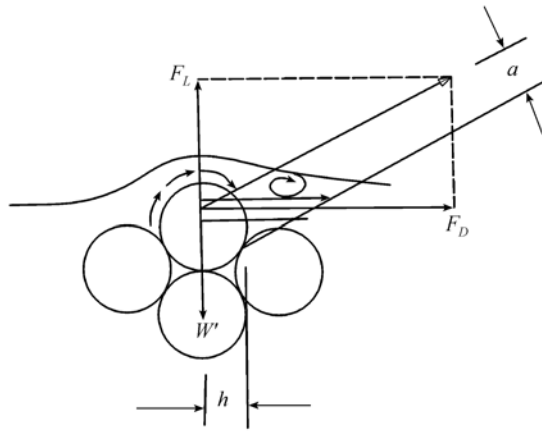


图 1 单个泥沙颗粒受力模型(引自文献 [3])

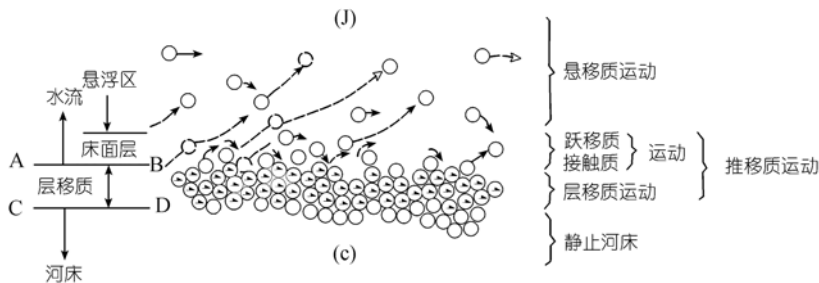


图 2 水流作用下群体泥沙运动示意(引自文献 [3])

2 推移质运动的动力学方程

考虑单向流运动情况, 设泥沙在水流作用下移动的速度为 u_i , U_b 为水流作用在床面沙粒上的流速, 则上举力 F_{Li} , 拖曳力 F_{Di} , 重力 W_i 力的表达式为

$$F_{Li} = C_{Li} \cdot A_{Li} D_i^2 \cdot \frac{\rho(U_b - u_i)^2}{2}, \quad (1)$$

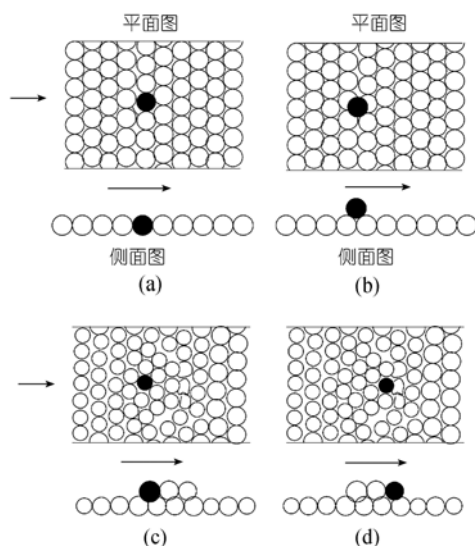


图 3 群体泥沙颗粒不同分布形式(引自文献 [31])

(a)~(d)分别示位置 1~4

$$F_{Di} = C_{Di} \cdot A_{2i} D_i^2 \cdot \frac{\rho(U_b - u_i)^2}{2}, \quad (2)$$

$$W = A_{3i}(\gamma_s - \gamma) D_i^3, \quad (3)$$

式中, C_{Di} 为泥沙的颗粒拖曳力阻力系数, C_{Li} 为泥沙的颗粒上举力系数, U_b 为作用在床面泥沙上的流速; D_i 为泥沙粒径; ρ 为水的密度; γ , γ_s 分别为水和泥沙的重度; A_{1i} , A_{2i} , A_{3i} 为泥沙颗粒面积修正系数. 对于粒间离散力 P , 目前成型的研究结果较少. 总的说来, 它反映了粗颗粒对细颗粒的阻拦、遮蔽作用以及对细颗粒对粗颗粒的包围、填穴密实等作用 and 颗粒间的接触反力、摩擦力等, 同时也反映泥沙本身形状、排列的影响. 不均匀的床沙中, 粒间离散力 P 的产生依赖于水流垂直方向的颗粒动量交换. 为此假定粒间离散力 P 与混合沙的平均抗剪力成比例 [11], 即令

$$P = B_1 \tau_c A_4 D_M^2, \quad (4)$$

式中, B_1 为比例系数, τ_c 为混合沙平均抗剪力, A_4 为面积修正系数. 根据 Gessler [11] 的研究, 得出不均匀沙混合物的抗剪力应该是各颗粒泥沙按其频率加权后所得的抗剪力之和, 可写成下式:

$$\tau_c = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} B_2(\gamma_s - \gamma) MDP(D) dD. \quad (5)$$

对于一定的混合床沙, B_2 , γ_s 和 M 为常数, 得

$$\tau_c = B_2(\gamma_s - \gamma) M D_m, \quad (6)$$

其中, $D_{\max}$, $D_{\min}$ 和 D_m 分别为混合不均匀沙中最大、最小和平均粒径; $P(D)$ 为混合

床沙中以重量计的颗粒粒径分布函数; B_2 为系数; M 为混合不均匀沙的密实系数, 与不均匀程度 $\eta = D_{50}/D_{10}$ 有关, 由下式近似计算:

$$M = 0.75 - 0.65/(2 + \eta). \quad (7)$$

由(4)和(6)式得

$$\begin{aligned} P &= B_2 B_1 (\gamma_s - \gamma) A_4 M \cdot D_M^3 \\ &= K (\gamma_s - \gamma) M D_M \cdot D_C^2. \end{aligned} \quad (8)$$

在上述力学分析的基础, 根据牛顿第二定律, 建立推移质泥沙运动方程.

2.1 描述单颗粒泥沙运动的方程

$$F_{Di} - (W_i - F_{Li} - P_{Li}) \operatorname{tg} \varphi + P_{Di} = m_i \frac{du_i}{dt}, \quad (9)$$

式中, m_i 为单颗粒泥沙质量, $m_i = A_{3i} \rho_s D_i^3$, φ 为摩擦角, $\operatorname{tg} \varphi = \mu$ 为摩擦系数.

2.2 描述群体泥沙运动的方程

如图 3 所示, 由于推移质运动是泥沙群体运动的一种形式, 所以叠加方程式 (9) 得群体泥沙整体运动的方程:

$$\sum (F_{Di} + P_{Di}) - \sum (W_i - F_{Li} - P_{Li}) \operatorname{tg} \varphi = \sum m_i \frac{du_i}{dt}. \quad (10)$$

相应地推移质输沙率为

$$q = \sum m_i u_i = \sum A_{3i} \rho_s D_i^3 u_i. \quad (11)$$

将上举力、重力、拖曳力和离散力的各种表达式(1)~(3)和(8)代入(10)式中, 得

$$\begin{aligned} &\sum \left[C_{Di} A_{1i} D_i^2 \frac{\rho(U_b - u_i)^2}{2} + B_{D1} \tau_c A_4 D_i^2 \right] - \sum \left[A_{3i} (\gamma_s - \gamma) D_i^3 \right. \\ &\left. - C_{Li} A_{2i} \frac{\rho(U_b - u_i)^2}{2} D_i^2 - B_{L1} \tau_c A_4 D_i^2 \right] \operatorname{tg} \varphi = \sum A_{3i} \rho_s D_i^3 \frac{du_i}{dt}. \end{aligned} \quad (12)$$

将离散的推移质泥沙取为等效的相互关联的连续群体, 得

$$\begin{aligned} &C_D A_1 \frac{\rho(U_b - U)^2}{2} + B_{D1} \tau_c A_4 + B_{L1} \tau_c A_4 \cdot \operatorname{tg} \varphi \\ &- A_3 (\gamma_s - \gamma) D \cdot \operatorname{tg} \varphi + C_L \cdot A_2 \frac{\rho}{2} (U_b - U)^2 \operatorname{tg} \varphi = A_3 \rho_s D \frac{dU}{dt}. \end{aligned} \quad (13)$$

相应地, 方程式中 A_1 , A_2 和 A_3 为河床泥沙群体移动的面积修正系数; C_D 为河床泥沙群体移动的拖曳力阻力系数; A_L 为河床泥沙群体移动的上举力系数; U 为河床泥沙群体移动的速度; D 推移质运动代表粒径.

将(13)式展开, 并取 $\operatorname{tg} \varphi = \mu$, 则上式可写为

$$A_3 \rho_s D \frac{dU}{dt} = -\rho(C_D A_1 + C_L A_2 \mu) U_b \cdot U + \frac{\rho}{2} (C_D A_1 + C_L A_2 \mu) U^2 - A_3 (\gamma_s - \gamma) D \cdot \mu + (C_D A_1 + C_L A_2 \mu) \frac{\rho}{2} \cdot U_b^2 + B_{D1} \tau_c A_4 + B_{L1} \tau_c A_4 \cdot \mu. \quad (14)$$

令

$$G' = (C_D A_1 + C_L A_2 \mu), \quad (15a)$$

由于 C_D 和 C_L 为 Reynold 数 $Re = \frac{DU_b}{\nu}$ 的函数, 故 G' 亦为 Reynold 数 $Re = \frac{DU_b}{\nu}$ 的函数, 所以

$$G' = f_0(Re) = f_0\left(\frac{DU_b}{\nu}\right). \quad (15b)$$

则(14)式可表示为

$$A_3 \gamma_s D \frac{dU}{dt} = -G' \cdot \rho U_b \cdot U + \frac{G'}{2} \rho U^2 - A_3 (\gamma_s - \gamma) D \mu + \frac{G'}{2} \rho U_b^2 + B_{D1} \tau_c A_4 + B_{L1} \tau_c A_4 \mu. \quad (16)$$

当床面由均匀沙粒组成时, 外流垂线流速分布如下(见文献 [31]):

$$\frac{u}{U_*} = 5.75 \log 30.2 \frac{\chi y}{\alpha_1 D}, \quad (17)$$

式中, $\alpha_1 \approx 2$, χ 为与沙粒 Reynold 数有关的函数:

$$\chi = f_1\left(\frac{U_* D}{\nu}\right),$$

则作用流速 U_b 可取 $y = \alpha_2 D$ 处的流速, 其中 α_2 为接近 1 的系数, 代入(17)式, 并结合 χ 的表达式:

$$U_b = U_* f_2\left(\frac{U_* D}{\nu}\right), \quad (18)$$

$$\text{其中, } f_2\left(\frac{U_* D}{\nu}\right) = 5.75 \log \left[30.2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot f_1\left(\frac{U_* D}{\nu}\right) \right].$$

所以, 将(18)和(15)式代入(14)式, 两边同除以 $(\gamma_s - \gamma)D$ 得

$$\begin{aligned} \frac{A_3 \rho_s D}{(\gamma_s - \gamma)D} \cdot \frac{dU}{dt} = & -\frac{G' \rho U_*}{(\gamma_s - \gamma)D} f_2\left(\frac{U_* D}{\nu}\right) U + \frac{G' \rho}{2(\gamma_s - \gamma)D} \cdot U^2 \\ & - A_3 \cdot \mu + \frac{G'}{2} \cdot \frac{\rho U_*^2}{(\gamma_s - \gamma)D} \cdot f_2^2\left(\frac{U_* D}{\nu}\right) \\ & + (B_{D1} A_4 + B_{L1} A_4 \cdot \mu) \frac{\rho U_*^2}{(\gamma_s - \gamma)D} \frac{B_2 (\gamma_s - \gamma) M D_m}{\rho U_*^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

引入 Shields 参数, $\Theta = \frac{\rho U_*^2}{(\gamma_s - \gamma)D}$, 颗粒 Reynold 数 $Re_* = \frac{DU_*}{\nu}$, (19)式可化简为

$$\frac{A_3 \rho_s}{(\gamma_s - \gamma)} \cdot \frac{dU}{dt} = -\frac{G' \rho U_*}{(\gamma_s - \gamma)D} f_2\left(\frac{U_* D}{\nu}\right) U + \frac{G' \rho}{2(\gamma_s - \gamma)D} U^2 - A_3 \cdot \mu + \frac{G'}{2} \Theta f_2^2\left(\frac{U_* D}{\nu}\right) + (B_{D1} A_4 + B_{L1} A_4 \cdot \mu) \Theta \frac{B_2 (\gamma_s - \gamma) M D_m}{\rho U_*^2}. \quad (20)$$

方程式(20)中的各项系数具有明确的物理含义, 为此引入如下物理概念:

散体河床惯性参数:

$$I = \frac{A_3 \rho_s}{(\gamma_s - \gamma)}. \quad (21)$$

散体河床运动临界参数

$$C = \frac{G'}{2} \Theta f_2^2\left(\frac{U_* D}{\nu}\right) - A_3 \cdot \mu + (B_{D1} A_4 + B_{L1} A_4 \cdot \mu) \Theta \frac{B_2 (\gamma_s - \gamma) M D_m}{\rho U_*^2}. \quad (22)$$

散体河床运动阻力参数:

$$A = \frac{G' \rho}{2(\gamma_s - \gamma)D}, \quad (23)$$

$$B = -\frac{G' \rho U_*}{(\gamma_s - \gamma)D} f_2\left(\frac{U_* D}{\nu}\right). \quad (24)$$

综合(15)和(18)式得

$$G' = f_0(Re) = f_0\left[\frac{DU_*}{\nu} f_2\left(\frac{U_* D}{\nu}\right)\right] = f_3\left(\frac{DU_*}{\nu}\right). \quad (25)$$

所以, 散体河床运动阻力参数 A 和 B 为颗粒 Reynold 数 $Re_* = \frac{DU_*}{\nu}$ 的函数; 散体河床运动临界参数 C 则为颗粒 Reynold 数 Re_* 和 Shields 参数 Θ 的函数. 故河床运动方程写为

$$I \cdot \frac{dU}{dt} = A \left(\frac{DU_*}{\nu}\right) U^2 + B \left(\frac{DU_*}{\nu}\right) U + C \left(\frac{DU_*}{\nu}, \Theta\right). \quad (26)$$

3 推移质运动过程的非线性动力学特性分析

从方程的特性可以看出, 散体河床运动或推移质运动具有非线性特征, 随

颗粒 Reynold 数 $Re_* = \frac{DU_*}{\nu}$ 和 Shields 参数 $\Theta = \frac{\rho U_*^2}{(\gamma_s - \gamma)D}$ 的变化, 运动将表现出不同的非线性特征.

3.1 泥沙起动、止动状态及散体河床临界运动情况的分析

3.1.1 $C = 0$ 的情况

考察泥沙群运动方程(26), 当泥沙处于静止状态, 即速度 $U = 0$, 加速度 $\frac{dU}{dt} = 0$ 时, 可以得到 $C = 0$, 表示就是泥沙颗粒处于临界状态时的情况. 针对实际泥沙运动情况, 临界状态包含泥沙的起动和止动两种临界状态.

当 $C = 0$ 时, 由方程(22)有

$$\frac{G'}{2} \Theta f_2^2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) - A_3 \cdot \mu + (B_{D1} A_4 + B_{L1} A_4 \cdot \mu) \Theta \frac{B_2 (\gamma_s - \gamma) M D_m}{\rho U_*^2} = 0, \quad (27)$$

解之得

$$\Theta_{CS} = A_3 \mu / \left[\frac{G'}{2} f_2^2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) + (B_{D1} A_4 + B_{L1} A_4 \cdot \mu) \frac{B_2 (\gamma_s - \gamma) M D_m}{\rho U_*^2} \right], \quad (28)$$

这里, Θ_{CS} 代表考虑离散力作用的泥沙起动 Shields 参数. 由于 $G' = (C_D A_1 + C_L A_2 \mu)$, C_L 和 C_D 均为颗粒 Reynold 数的函数, 见(25)式, 所以(28)式可表示为 $\left(\frac{U_* D}{\nu} \right)$ 的函数:

$$\Theta_{CS} = f_4 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right), \quad (29a)$$

其中,

$$\begin{aligned} f_4 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) &= A_3 \mu / \left[\frac{1}{2} f_2^2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) f_3 \left(\frac{D U_*}{\nu} \right) + (B_{D1} A_4 + B_{L1} A_4 \cdot \mu) \frac{B_2 (\gamma_s - \gamma) M D_m}{\rho U_*^2} \right] \\ &= A_3 \mu / \left[\frac{1}{2} f_2^2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) f_0 \left(\frac{D U_*}{\nu} \right) f_2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) + (B_{D1} A_4 + B_{L1} A_4 \cdot \mu) \frac{B_2 (\gamma_s - \gamma) M D_m}{\rho U_*^2} \right]. \end{aligned}$$

很容易看出, 它其实就是代表着泥沙起动的即 Shields 曲线. 初始起动时不考虑离散力, 因此起动关系认为

$$\Theta_C = A_3 \mu / \left[\frac{G'}{2} f_2^2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) \right], \quad (29b)$$

这里, Θ_C 代表不考虑离散力作用的常规单颗粒泥沙起动 Shields 参数. 而 Θ_{CS} 代表考虑离散力作用的泥沙起动 Shields 参数, 它反映了群体泥沙起动时, 稍后起动泥沙的起动情况以及运动的泥沙止动时的情况.

3.1.2 $C \neq 0$ 的情况

当 $C \neq 0$ 时, C 为颗粒 Reynold 数 $Re_* = \frac{D U_*}{\nu}$ 和 Shields 参数 $\Theta = \frac{\rho U_*^2}{(\gamma_s - \gamma) D}$ 的

函数, 即 $C = C(Re_*, \Theta)$. 即当 $C > 0$ 时, 泥沙处于运动状态; 而当 $C < 0$ 时, 泥沙处于静止或运动减速状态. 对于 $U = 0$ 的情况, 化简原方程(26), 得到

$$I = \frac{dU}{dt} = C,$$

即

$$\frac{dU}{dt} = \frac{C}{I}. \quad (30)$$

这个式子表征泥沙起动时的加速度或者是泥沙即将落淤时的加速度(当显示泥沙起动加速度小于零的时候, 就是表征泥沙还未被起动, 即处于静止状态), 它们之间的不同之处就是起动的时候不考虑离散力的作用, 而当将要落淤的时候要考虑离散力的作用. 由于离散力两个分量的综合叠加效果:

$$(B_{D1}A_4 + B_{L1}A_4 \cdot \mu) \frac{B_2(\gamma_s - \gamma)MD_m}{\rho U_*^2} > 0,$$

所以在考虑离散力的作用效果之后, 泥沙落淤绝对加速度等值线将向减小(下移), 这也就解释了泥沙群运动的滞后性.

3.2 恒定均匀情况下散体河床推移质运动特性分析

根据非线性动力学理论, 推移质运动方程(26)所代表的动力系统的不动点由以下方程决定:

$$AU^2 + BU + C = 0. \quad (31)$$

当 $B^2 - 4AC = -4I^2\xi > 0$ (参见方程(33)~(35), 即 $\xi < 0$) 时, 可得两个不动点:

$$U_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad U_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

在此情况下, $\frac{dU}{dt} = 0$, 即推移质处于平衡输沙情况. 因此推移质运动方程(26)所代表的动力系统的不动点就对应于恒定均匀情况下的推移质运动状况, 即推移质平衡输沙.

将 A , B 和 C 的表达式(22)~(24)代入上式, 得恒定均匀情况下散体河床推移质运动速度:

(i) 以 Reynold 数 $Re_* = \frac{DU_*}{\nu}$ 和 Shields 参数 $\Theta = \frac{\rho U_*^2}{(\gamma_s - \gamma)D}$ 所表达的形式:

$$U_{1,2} = \frac{1}{\frac{\rho}{(\gamma_s - \gamma)D}} \left[\frac{\rho U_*}{(\gamma_s - \gamma)D} f_2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) \right]$$

$$\pm \sqrt{\frac{2\rho A_3 \cdot \mu + 2(B_{D1}A_4 + B_{L1}A_4\mu)\Theta \frac{B_2(\gamma_s - \gamma)MD_m}{U_*^2}}{(\gamma_s - \gamma)Df_3\left(\frac{DU_*}{\nu}\right)}}. \quad (32a)$$

(ii) 以作用在床面泥沙上的流速 U_b 所表达的形式:

$$U_{1,2} = U_b \pm \sqrt{\frac{2A_3(\gamma_s - \gamma)D\mu - 2A_4(B_{D1} + B_{L1}\mu)B_2(\gamma_s - \gamma)MD_m}{\rho f_0\left(\frac{DU_b}{\nu}\right)}}. \quad (32b)$$

由(32a)或(32b)式可知 U_1 小于水流作用速度, U_2 大于水流作用速度.

3.3 散体河床推移质运动过程的非线性特征及突变特性分析

根据非线性动力学方法, 首先寻求散体河床推移质运动系统的势函数. 将方程(26)可变为

$$\frac{dU}{dt} = \frac{A}{I}U^2 + \frac{B}{I}U + \frac{C}{I},$$

即

$$\frac{d\left(-\frac{A}{I}U - \frac{B}{2I}\right)}{dt} = -\left(-\frac{A}{I}U - \frac{B}{2I}\right)^2 - \frac{AC}{I^2} + \frac{B^2}{4I^2}. \quad (33)$$

然后再对上式进行坐标变换, 取

$$Y = -\frac{A}{I}U - \frac{B}{2I}, \quad (34)$$

则方程(33)变成一种比较简单的形式:

$$\frac{dY}{dt} = -Y^2 - \xi, \quad (35)$$

其中, $\xi = \frac{AC}{I^2} - \frac{B^2}{4I^2}$, (35)式所描述的系统显然是一个有势的系统, 即

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{dV(Y)}{dY}, \quad (36)$$

其中, $V(Y) = \frac{Y^3}{3} + \xi Y$, 即为势函数.

联立方程

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = 0, \end{cases} \quad (37)$$

寻找奇点, 即

$$\begin{cases} Y^2 + \xi = 0, \\ 2Y = 0, \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} Y = 0, \\ \xi = 0. \end{cases} \quad (38)$$

(i) 当 $\xi < 0$ 时, 可以求解出方程有两个平衡点 $Y = \pm\sqrt{-\xi}$; 将 $Y = \sqrt{-\xi}$ 代入 $\frac{\partial^2 V(Y)}{\partial Y^2} = 2Y = 2\sqrt{-\xi} > 0$, 可知该点处于位势极小点上; 将 $Y = -\sqrt{-\xi}$ 代入 $\frac{\partial^2 V(Y)}{\partial Y^2} = 2Y = -2\sqrt{-\xi} < 0$, 可知该点处于位势极大点上.

(ii) 当 $\xi = 0$ 时, 可以解出 $Y = 0$, 此点是拐点.

(iii) 当 $\xi > 0$ 时, 方程没有实数解, 所以也就没有位势极值点.

(iv) 以 Y 为纵轴, ξ 为横轴, 绘出突变特性曲线绘制突变分析图(图 4).

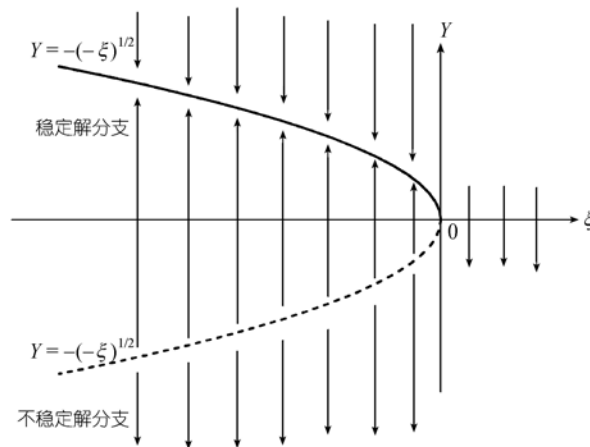


图 4 突变分析图(ξ - Y 坐标)

可以看出, 当 ξ 从小于零到大于零连续变化时, 原方程(26)也从原来的一个稳定解和一个不稳定解状态过渡到两个解合并成一个拐点的状态, 最后到达没有稳定(不稳定)解的情况. 换一句话说, 当 ξ 小于零时, 可以知道 $Y = \sqrt{-\xi}$ 和 $Y = -\sqrt{-\xi}$ 分别是方程的稳定解和不稳定解, 但当 ξ 大于或者等于零时, 将会随着 $t \rightarrow +\infty$, 出现 $Y \rightarrow -\infty$ 的情况, 此时 $U \rightarrow +\infty$.

回到 $\xi = \frac{AC}{I^2} - \frac{B^2}{4I^2}$, 将 A, B, C 和 I 的表达式(22)~(24)代入得

$$\xi = \left\{ \frac{G'\rho}{2(\gamma_s - \gamma)D} \left[\frac{G'}{2} \Theta f_2^2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) - A_3 \cdot \mu + (B_{D1} A_4 + B_{L1} A_4 \cdot \text{tg} \varphi) \cdot \Theta \frac{B_2(\gamma_s - \gamma) M D_m}{\rho U_*^2} \right] - \frac{1}{4} \frac{G' \rho U_*^2}{(\gamma_s - \gamma) D} f_2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) \right\} \cdot \frac{(\gamma_s - \gamma)^2}{A_3^2 \rho_s^2}. \quad (39)$$

从(39)式可以看出, 当不考虑离散力时, $\xi = \frac{-G'\rho(\gamma_s - \gamma)\mu}{2\rho_s^2 D A_3}$, $\xi < 0$ 恒成立, 推移质运动过程不会发生非线性突变; 当考虑离散力时, $\xi = 0$ 才有可能成立. 也就是说, 离散力是推移质泥沙运动发生突变的根本原因.

令 $\xi = 0$ 列方程, 然后在方程两边同除以 $\frac{G'^2 \rho}{2(\gamma_s - \gamma)D} \cdot \frac{(\gamma_s - \gamma)^2}{A_3^2 \rho_s^2}$ 得

$$\left[\frac{1}{2} \Theta f_2^2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) - \frac{A_3 \cdot \mu}{G'} + \frac{(B_{D1} A_4 + B_{L1} A_4 \cdot \text{tg} \varphi)}{G'} \Theta \frac{B_2(\gamma_s - \gamma) M D_m}{\rho U_*^2} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\rho U_*^2}{(\gamma_s - \gamma) D} \right] \left[f_2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) \right]^2 = 0. \quad (40)$$

引入 $G' = f_0(Re) = f_0 \left(\frac{DU_*}{\nu} f_2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) \right) = f_3 \left(\frac{DU_*}{\nu} \right)$ 和 Shields 参数 $\Theta = \frac{\rho U_*^2}{(\gamma_s - \gamma) D}$

上式变为

$$\left[\frac{1}{2} \Theta f_2^2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) - \frac{A_3 \cdot \mu}{f_3 \left(\frac{DU_*}{\nu} \right)} + \frac{(B_{D1} A_4 + B_{L1} A_4 \cdot \mu)}{f_3 \left(\frac{DU_*}{\nu} \right)} \Theta \frac{B_2(\gamma_s - \gamma) M D_m}{\rho U_*^2} \right] - \frac{1}{2} \Theta \left[f_2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) \right]^2 = 0,$$

解之得

$$\Theta_s = \frac{A_3 \cdot \mu \rho \nu^2}{(B_{D1} + B_{L1} \mu) A_4 B_2 (\gamma_s - \gamma) M D_m D^2} \frac{U_*^2 D^2}{\nu^2}, \quad (41)$$

这里, Θ_s 代表推移泥沙运动发生突变时的 Shields 参数.

由于 $\eta = D_{50}/D_{10}$, $M = 0.75 - 0.65/(2 + \eta)$, 所以 Θ_s 为不均匀程度 $\eta = D_{50}/D_{10}$,

Reynold 数 $Re_* = \frac{DU_*}{\nu}$, 推移质运动代表粒径 D 和非均匀沙平均粒径 D_m 的函数,

即

$$\Theta_s = f_5(\eta, D, D_m, Re_*) . \quad (42)$$

当泥沙组成确定后, $\Theta_c = f_5(\eta, D, D, Re_*)$ 为 Reynold 数 $Re_* = \frac{DU_*}{\nu}$ 的二次函数.

3.4 推移群体泥沙运动有效区域的估计

若将方程(26)取为

$$y = \frac{A}{I}U^2 + \frac{B}{I}U + \frac{C}{I}, \quad (43)$$

可以知道这是开口向上的二次曲线, 在 $U_0 = -\frac{B}{2A}$ 处获得极值, 为一特征点. 由

(18), (23)和(24)式知, $U_0 = U_b$, 也就是 $U = U_b$ 时, 即泥沙颗粒与作用水流拥有相同的速度, 此时泥沙将获得最大减速度/最小加速度, 此减/加速度全部由泥沙为克服摩擦阻力进行水平运动产生的, 这一速度为特征速度. 由于我们考虑的是单向流, 泥沙群体运动速度是由水流提供的, 所以, 很直观地可以认为 $U > U_b$ 部分所描述的泥沙群运动情况是无效的. 即在单向恒定均匀情况下, 以(43)式的极值点作为分界线, 泥沙群运动速度 $0 < U < U_b$ 的一支才是有效的(图 5).

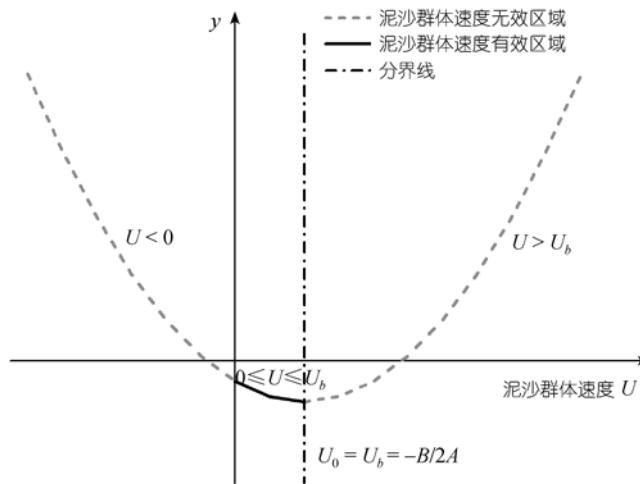


图 5 推移群体泥沙运动区域

根据所进行的坐标变换: $Y = -\frac{A}{I}U - \frac{B}{2I}$, 重新绘制突变分析图(ξ - U 坐标)(图 6). 图 6 中, 分界线和 ξ 轴所包围的一块区域是泥沙运动速度的有效区域, 图 6 与 4 的不同之处是: 图 4 是上支解是稳定的, 下支解不稳定, 而图 6 中则正

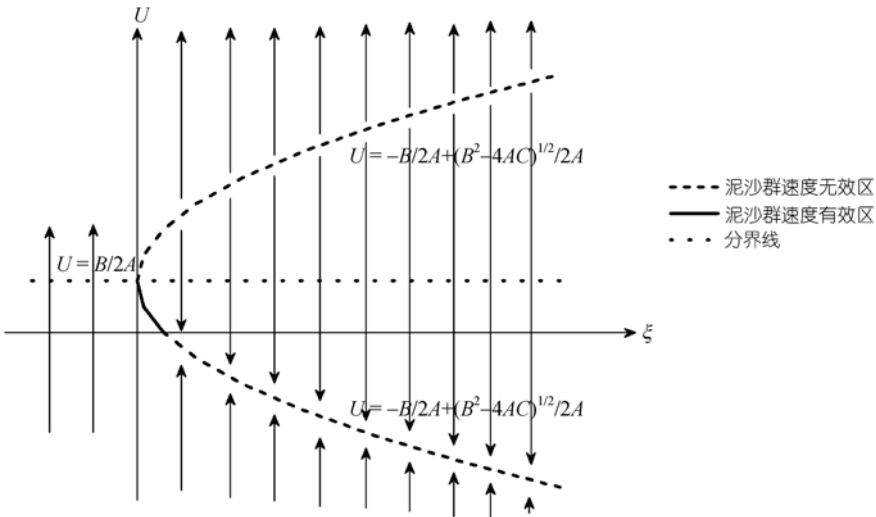


图 6 突变分析图(ξ - U 坐标)

相反.

通过前边的讨论可以得到: 方程的两个不动点就相当于势函数曲线上的两个极值点, 一个是势能的极大值点(相当于不稳定的不动点, 它随时会由于种种扰动平衡被破坏), 文章中所考虑的速度不在此范围内; 另一个就是势能极小值点, 它对扰动不敏感, 处在所讨论的范围之内. 文中所讨论的速度分布在极值点和速度为零的点之间, 在这一范围之内泥沙颗粒的速度是稳定的. 不管随机因素如何, 泥沙颗粒的运动总是逐渐趋向于水流速度.

4 非线性动力学特性分析结果计算绘图并与法国夏都水利实验室结果比较

4.1 绘图确定 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 的表达式, 并写出 $f_2(x)$, $f_3(x)$ 和 $f_4(x)$ 的表达式

4.1.1 $f_1(Re_*)$ 的确定方法

$f_1(Re_*)$ 的物理含义为对数流速公式中从床面光滑过渡到粗糙过程中的校正函数. 参见文献 [3, 12], 可通过如下方法确定:

$$\chi = f_1(Re_*) = \begin{cases} 0.3K_s U_* / \nu, & K_s / \delta < 0.25 \text{ (床面光滑)}, \\ \text{结果如图6所示}, & 0.25 \leq K_s / \delta \leq 10 \text{ (床面处于过渡区)}, \\ 1, & K_s / \delta > 10 \text{ (床面粗糙)}, \end{cases}$$

其中, δ 为近壁层流层的厚度, $\delta = 11.6\nu/U_*$, 而糙率尺寸 K_s 一般取为 $2D$, 所以

$$\frac{K_s U_*}{\nu} = 2Re_*.$$

对图 7 的结果进行回归, 最后得到 $f_1(Re_*)$ 的表达式:

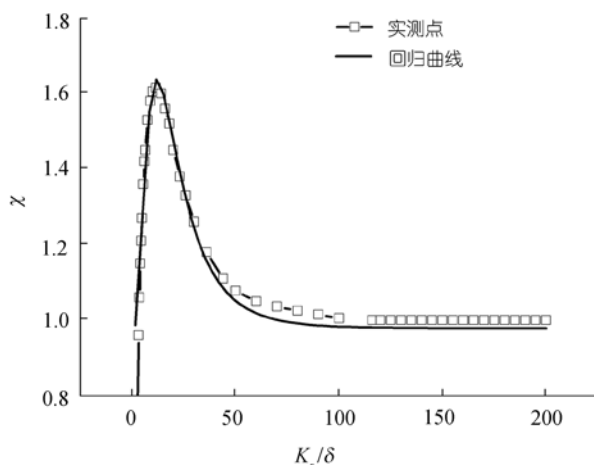


图 7 对数流速公式中从床面光滑过渡到粗糙过程中校正值 χ 和 K_s/δ 的关系

$$\chi = f_1(Re_*) = \begin{cases} 0.6Re_*, & Re_* < 1.45, \\ 0.97806 + \frac{17.0027}{0.68407\sqrt{2\pi}} \frac{Re_*}{5.8} e^{-\frac{\left(\ln \frac{Re_*}{19.01059 \times 5.8}\right)^2}{2 \times 0.68407^2}}, & 1.45 \leq Re_* \leq 58, \\ 1, & Re_* > 58. \end{cases}$$

4.1.2 $f_2(Re_*)$ 的确定方法

$f_2(Re_*)$ 的物理含义为: 相对作用流速 $\frac{U_b}{U_*}$ 随颗粒 Reynold 数 Re_* 变化的形状函数.

由于 $f_2\left(\frac{U_* D}{\nu}\right) = 5.75 \log \left[30.2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot f_1\left(\frac{U_* D}{\nu}\right) \right]$, 其中, $\alpha_1 \approx 2$, $\alpha_2 \approx 1$. 将 $f_1(Re_*)$ 的表达式代入其中, 可以得到

$$f_2(Re_*) = \begin{cases} 5.75 \log \left(30.2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot 0.6Re_* \right), & Re_* < 1.45, \\ 5.75 \log \left[30.2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \left(0.97806 + \frac{17.0027}{0.68407\sqrt{2\pi}} \frac{Re_*}{5.8} e^{-\frac{\left(\ln \frac{Re_*}{19.01059 \times 5.8}\right)^2}{2 \times 0.68407^2}} \right) \right], & 1.45 \leq Re_* \leq 58, \\ 5.75 \log \left(30.2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right), & Re_* > 58. \end{cases} \quad (44)$$

4.1.3 $f_3(Re^*)$, $f_0(Re)$ 的确定方法

$f_3(Re^*)$ 和 $f_0(Re)$ 的物理含义相同, 均代表泥沙阻力与升力之和随 Reynold 数变化的情况. $f_3(Re^*)$ 的物理含义为: 泥沙阻力与升力之和随泥沙颗粒 Reynold 数变化的情况; $f_0(Re)$ 的物理含义为: 泥沙阻力与升力之和随水流 Reynold 数变化的情况.

根据 Coleman 的实验结果 [13] (见图 8) 并参见文献 [3], 首先拟合出作用在床面密集排列圆球上的上举力与圆球水下重量的比值 K 与 Reynold 数的关系:

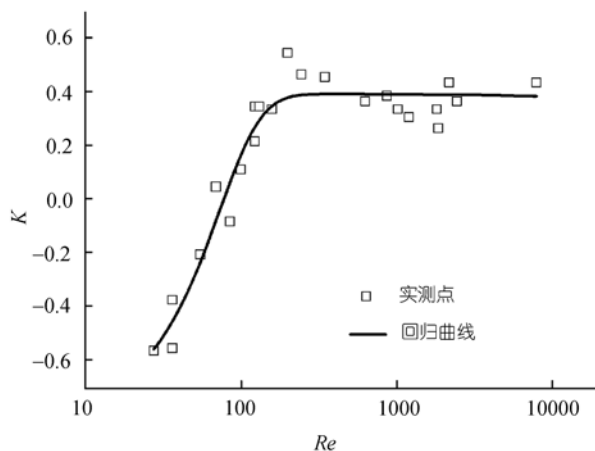


图 8 作用在床面密集排列的圆球上的上举力与圆球水下重量的比值 K 与 Reynold 数 Re 的关系

对于颗粒 Reynold 数, 有效区间 $6.5 < Re^* < 1500$

$$K = -1.22359 + \frac{3.21958}{1 + e^{\frac{Re - 5033.5718 + 9988.50124/2}{33.51376}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{Re - 5033.5718 - 9988.50124/2}{710473.1132}}} \right) \quad (6.5 < Re^* < 1500).$$

由此也可以得到升力系数 C_L 的表达式:

$$C_L = \left[-1.22359 + \frac{3.21958}{1 + e^{\frac{Re - 5033.5718 + 9988.50124/2}{33.51376}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{Re - 5033.5718 - 9988.50124/2}{710473.1132}}} \right) \right] \cdot \frac{4D(\rho_s - \rho)g}{3\rho U_b^2} \quad (45a)$$

由 $G' = f_0(Re) = f_0\left(\frac{DU^*}{\nu}\right) f_2\left(\frac{U_* D}{\nu}\right) = f_3\left(\frac{DU^*}{\nu}\right)$, 并结合(15a)和(15b)式, 得

$$f_3(Re_*) = C_D(Re_* f_2(Re_*)) \cdot A_1 + \left[-1.22359 + \frac{3.21958}{1 + e^{\frac{Re_* f_2(Re_*) - 5033.5718 + 9988.50124/2}{33.51376}}} \right] \cdot A_2 \mu \cdot \frac{4D(\rho_s - \rho)g}{3\rho U_b^2}, \quad (45b)$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{Re_* f_2(Re_*) - 5033.5718 - 9988.50124/2}{710473.1132}}} \right)$$

其中, $A_1 = \frac{\pi}{4}$, $A_2 = \frac{\pi}{4}$, $A_3 = \frac{\pi}{6}$, φ 是水下摩擦角, 一般取为 $30^\circ \sim 40^\circ$, 则可取 $\mu = \tan 35^\circ \approx 0.7$, 而 $f_2(Re_*)$ 的表达式同前.

4.1.4 $f_4(Re_*)$ 的确定方法

$f_4(Re_*)$ 的物理含义: Shields 参数随颗粒 Reynold 数的变化, 称之为 Shields 函数. 根据(28)式:

$$f_4(Re_*) = A_3 \mu \left[\frac{G'}{2} f_2^2 \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) + (B_{D1} A_4 + B_{L1} A_4 \cdot \tan \varphi) \frac{B_2 (\gamma_s - \gamma) M D_m}{\rho U_*^2} \right], \quad (46)$$

式中, B_{D1} 和 B_{L1} 分别为水平方向和垂直方向上的离散力分量系数, 考虑到离散力的两分量 $P_D \approx P_L$, 可以取 $B_{D1} = B_{L1} = \frac{\sqrt{2}}{2} B_1$. 根据离散力 P 与泥沙阻力 F_D 之间的关系 [14], 并参见文献 [3], 有 $P = \frac{0.15D}{s} F_D$, 其中, s 代表颗粒之间的距离. 而

$$P = B_2 B_1 (\gamma_s - \gamma) A_4 M \cdot D_M^3, \quad F_D = C_D A_1 D^2 \frac{\rho U_b^2}{2}, \quad \text{故得到}$$

$$B_1 B_2 A_4 (\gamma_s - \gamma) M = \frac{0.15}{s} C_D A_1 \frac{\rho U_b^2}{2}. \quad (47)$$

将上式代入(46)式中, 并且结合(29b)式, 若取 $s = 0.25D_m$, 则

$$\Theta_{CS} = \frac{A_3 \mu}{\left(\frac{G'}{2} + 0.15\sqrt{2}(1 + \mu) A_1 C_D \right) f_2^2(Re_*)}. \quad (48)$$

如果不考虑颗粒间的离散力, 且注意到 $A_1 = \frac{\pi}{4}$, $A_2 = \frac{\pi}{4}$, $A_3 = \frac{\pi}{6}$, 则上式变成

$$\Theta_C = \frac{A_3 \mu}{\left(\frac{G'}{2} \right) f_2^2(Re_*)} = \frac{4}{3} \frac{\mu}{(C_D + C_L \mu) f_2^2(Re_*)}, \quad (49)$$

此式即为 Shields 起动曲线. 通过 Shields 实验曲线 $\Theta_C(Re_*)$, 并考虑 C_L 的表达式就

可以反算阻力系数 C_D 的变化($6.4 \leq Re_* \leq 1500$):

$$C_D = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\Theta_C \cdot f_2^2(Re_*)} - C_L \mu. \quad (50)$$

C_D 随颗粒 Reynold 数 Re_* 变化的曲线见图 9.

根据(29a)式得

$$f_4(Re_*) = \Theta_{CS} = \frac{A_3 \mu}{\left[\frac{G'}{2} + 0.15\sqrt{2}(1+\mu)A_1 C_D \right] f_2^2(Re_*)}. \quad (51)$$

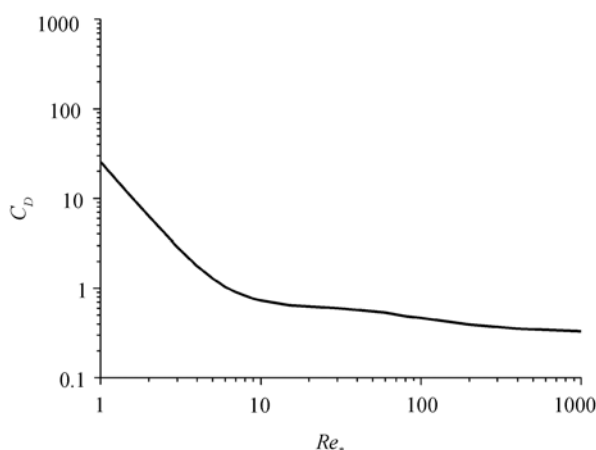


图 9 通过 Shields 曲线算得的阻力系数的变化情况

以 Reynold 数 $Re_* = \frac{DU_*}{\nu}$ 为横坐标, 以 Shields 参数 $\Theta = \frac{\rho U_*^2}{(\gamma_s - \gamma)D}$ 为纵坐标绘

泥沙起动曲线图给出颗粒 Reynold 数 $Re_* = \frac{DU_*}{\nu}$ 的大小, 在求得 C_D , C_L 及 G' 后,

根据(48)和(49)式算出水流强度 Θ_C 和 Θ_{CS} , 然后作图, 见图 10.

由于考虑的推移质泥沙群体的运动, 泥沙起动有先后, 刚开始起动的泥沙, 它只受到水流的作用, 泥沙之间尚不存在剪切作用, 也就不存在离散力. 而稍后起动的泥沙, 就会受到已起动了的泥沙的剪切作用, 从而受到离散力的作用. 图 10 为不考虑离散力和考虑离散力两种情况下的泥沙起动曲线, 其中, 不考虑离散力作用的泥沙起动 Shields 曲线 θ_c , 反映的是最先起动泥沙的情况; 而考虑离散力作用的泥沙起动 Shields 曲线 θ_{cs} , 则反映了群体泥沙起动时, 稍后起动泥沙的起动情况以及运动的泥沙止动时的情况. 通过这两条曲线的对比可以看出, 推移质

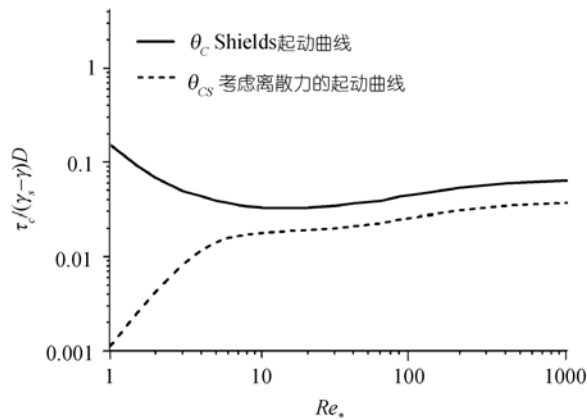


图 10 Shields 起动曲线和考虑离散力情况下的起动曲线

泥沙群体运动时,一旦有泥沙起动,稍后的泥沙起动将变得容易;另外,也可以看出,在离散力的作用下,泥沙止动所需的水流切应力小于起动切应力。

4.2 推移运动过程突变曲线及其与夏都床面形态判别准则实验的比较

以 Reynold 数 $Re_* = \frac{DU_*}{\nu}$ 为横坐标,以 Shields 参数 $\theta = \frac{\rho U_*^2}{(\gamma_s - \gamma) D}$ 为纵坐标绘推移运动过程突变曲线图。在确定出 C_D , C_L 和离散力 P 的基础上,根据(41)式进一步得到突变曲线表达式为

$$\theta_s = \frac{A_3 \mu v^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \mu) \frac{0.15 C_D A_1 U_b^2 D_m D^2}{2s}} \frac{U_*^2 D^2}{v^2}.$$

若仍然设 $s = 0.25 D_m$, 并表示为 Re_* 的函数, 则

$$\theta_s = \frac{A_3 \mu}{\sqrt{2} (1 + \mu) 0.15 C_D A_1} \frac{U_*^2}{U_b^2} = \frac{A_3 \mu}{\sqrt{2} (1 + \mu) 0.15 C_D A_1} \frac{1}{f_2^2(Re_*)}, \quad (52)$$

其变化曲线见图 11。

图 11 为推移运动过程产生运动性质非线性突变的分界线。为了更能说明问题的实质,将 θ_c , θ_{cs} 和 θ_s 三者的相对位置关系绘出,见图 12。从图 12 Shields 泥沙起动曲线和推移质泥沙运动突变分界线可以看出,在泥沙起动后,推移质泥沙存在两个性质迥然不同的运动。

绘出 θ_c , θ_{cs} 和 θ_s 三者的计算曲线并与床面形态判别准则实验结果比较选取

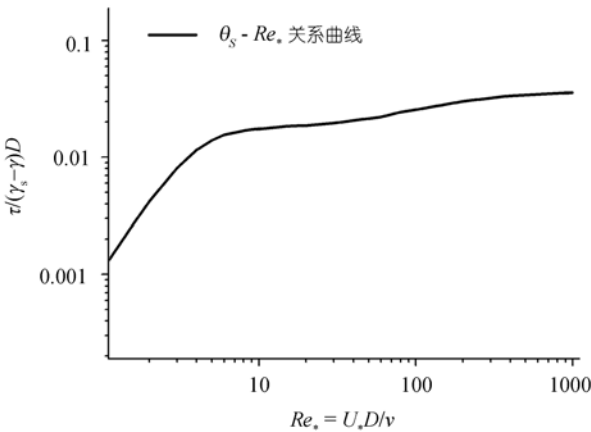


图 11 推移运动过程产生突变的分界线

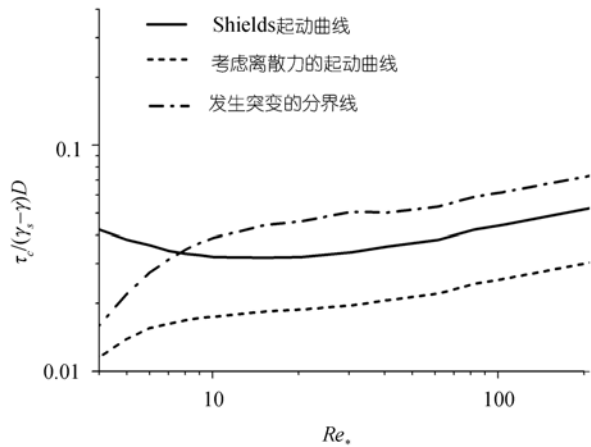


图 12 发生突变的分界线与起动曲线的相对位置

典型的 $\left(\text{Reynold 数 } Re_* = \frac{DU_*}{\nu}, \text{ Shields 参数 } \theta = \frac{\rho U_*^2}{(\gamma_s - \gamma)D} \right)$ 组, 绘出 θ_C , θ_{CS} 和 θ_S

三者所表示的曲线并与法国夏都水利实验室“平整-沙纹-沙垄区的判别准则”实验结果(参见文献 [3]和 [15])进行比较, 结果见图 13.

结合图 12 和 13 可以看出, 推移质泥沙运动突变分界线与法国夏都水利实验室“平整-沙纹-沙垄区的判别准则”试验曲线中出现沙垄的分界线相一致.

该结果表明, 在泥沙起动后, 推移质泥沙存在两个性质迥然不同的运动, 床面形态由平整到沙纹及沙垄的不同发展阶段, 受推移质运动过程的非线性动力

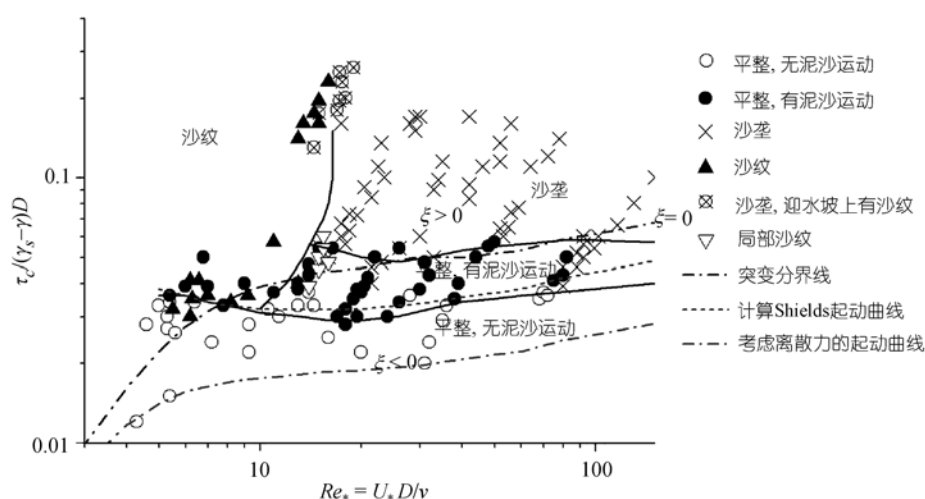


图 13 突变分界线在法国夏都水利实验室“平整-沙纹-沙垄区的判别准则”
试验曲线中的相对位置(参见文献 [31])

特征所决定, 它们分别对应于推移运动过程中的不同非线性状态. 通过与法国夏都水利实验室床面形态试验比较, 也进一步证明: “床面形态从平整到沙纹及沙垄的演化与否”是由推移质泥沙运动过程的突变特性所决定的, “突变分界线”正是平整床面与沙纹及沙垄床面的分界曲线.

5 结论与启发

本文从泥沙颗粒受力出发, 建立了床面层内推移质集体运动的微分方程, 进而从微分方程特性出发, 探讨了推移质运动过程的非线性动力学特征. 发现泥沙起动、推移质平衡输沙以及床面形态由平整到沙纹及沙垄的发展演化, 均受推移质运动过程的非线性动力特征参数所控制, 它们分别对应于推移运动过程中不同的非线性状态; 而推移质运动过程的非线性动力特征参数又取决于水流强度 Shields 参数和颗粒 Reynold 数, 是两者的复杂函数.

(i) 泥沙的起动与否对应着推移质集体运动方程中常数项是否为零. 当不考虑泥沙颗粒间的离散力, 即泥沙颗粒间不存在离散力时, 推移质集体运动方程中常数项为零, 就对应着传统的 Shields 泥沙起动曲线; 当考虑泥沙颗粒间的离散力, 即泥沙颗粒间存在离散力时, 由推移质集体运动方程中常数项为零, 又可以得到新的 Shields 曲线, 如果以 Shields 参数和颗粒 Reynold 数为纵横坐标, 则该曲线在传统 Shields 泥沙起动曲线的下方. 该现象说明两个问题: 第一, 床面泥沙最初起动是最困难的, 起动流速最大, 一旦床面有泥沙起动后, 其他床面泥沙

就有获得泥沙颗粒间离散力的可能, 如果是这样, 由此床面泥沙起动将变的容易, 泥沙起动流速将降低. 第二, 也从另一方面解释了泥沙止动流速为何小于泥沙起动流速的原因, 即泥沙颗粒间离散力的影响.

(ii) 推移质集体运动方程的平衡点或者称之为不动点对应着的是推移质泥沙的平衡输沙状态. 当 $B^2 - 4AC = -4I^2\xi \geq 0$, 即 $\xi \leq 0$ (对应于图 13 的平整床面区域) 时, 方程可以求得两个不动点, 理论上说这两个流速都对应推移质处于平衡输沙情况下的泥沙运动速度. 但其中一个运动速度 U_1 是大于水流速度 U_b , 属于无效的速度讨论区间, 同时它在图 6 中也属于不稳定的那一支解. 另一个运动速度 U_2 小于水流速度 U_b , 它在图 6 中属于稳定的那一支解, 也就是当泥沙颗粒运动一段时间后, 将会逐渐趋近于这个速度. 所以, 在平衡输沙时, 平整床面上的泥沙颗粒将逐渐会以稳定的速度 U_2 向前移动; 而当 $B^2 - 4AC = -4I^2\xi < 0$, 即 $\xi > 0$ (对应于图 13 中沙纹、沙垄区域) 时, 令 $AU^2 + BU + C = 0$, 无法求得实数解, 也就是在初始平整床面上, 推移质运动无法达到平衡状态. 而正是这种初始的不平衡输沙状态造成了床面的非均匀化, 并最终造成沙纹(沙垄)等床面形态的出现. 这样, 就从不动点理论的方面解释了平整床面和沙纹(沙垄)床面的区别所在.

(iii) 在突变分析中可以得到, 当突变参数 ξ 从小于零到大于零连续变化时, 方程(26)也从原来的一个稳定解和一个不稳定解状态过渡到两个解合并成一个拐点的状态, 最后到达没有稳定(不稳定)解的情况, 其中的 $\xi = 0$ 就是使方程性质发生突变的分界点. 在理论上的这个分界点就对应着床面形态由平整到沙垄发展的临界曲线, 通过进一步与法国夏都水利实验室床面形态试验比较证明: “床面形态从平整到沙垄的演化与否”是由推移质泥沙运动过程的突变特性所决定的, 推移质泥沙运动的突变分界线表达式, 亦可作为床面形态“平整区与沙垄区的判别准则”. 这就从理论方面解释了平整床面和沙垄(沙纹)床面的区别. 从泥沙运动过程非线性特征方面给出了法国夏都水利实验室“平整-沙纹-沙垄区的判别准则”实验曲线的理论解释.

参 考 文 献

- 1 郝柏林. 非线性科学丛书出版说明《非线性科学丛书》. 上海: 上海科学教育出版社, 1992. 1—3
- 2 林振山. 非线性科学及其在地学中的应用. 北京: 气象出版社, 2003. 1—10
- 3 钱 宁, 万兆惠. 泥沙运动力学. 北京: 科学出版社, 2003. 75—310
- 4 爱因斯坦, 著. 钱 宁, 译. 明渠水流挟沙能力. 北京: 水利出版社, 1956. 25—30
- 5 韩其为, 何明民. 泥沙运动统计理论. 北京: 科学出版社, 1984. 1—10
- 6 Bai Y C, Andreas M A, Jiang C B. A linear theory for disturbance of coherent structure and mechanism of sand wave in open channel flow. Inter J Sed Res, 2001, 15(2): 234—243

- 7 Bai Y C, Luo J S. The loss of stability of laminar flow in open channel and the mechanism of sand ripple formation. *Appl Math Mech*, 2002, 23(3): 254—268
- 8 白玉川, 蒋昌波, 罗纪生, 等. 振荡流底层拟序结构及其与泥沙相互作用研究. *力学进展*, 2003, 33(3): 347—356
- 9 白玉川, 徐海珏. 沙纹床面上明渠层流稳定性特征的研究. *中国科学, E 辑*, 2005, 35(1): 53—73
- 10 何文社, 曹叔尤, 雷孝章, 等. 泥沙起动条件的非线性理论. *水利学报*, 2004, (1): 28—32
- 11 Gessler J. Critical shear stress for sediment mixtures. *Proc 14th Conf Intern Assoc Hyd Res*, 1971. 1—8
- 12 Einstein H A. The bed load function of sediment transportation in open channel flows. *US Dept Agri, Tech Bull*, 1950, 1026: 71—80
- 13 Coleman N L. A theoretical and experimental study of drag and lift forces acting on a sphere resting on hypothetical stream-bed. *Proceeding of 12th Congress of International Association for Hydraulic Research*, 1967. 3
- 14 Rowe P N, Henwood G A. Drag forces in a hydraulic model of a fluidized bed-part I. *Tran Institute of Chem Engin*, 1961, 39(1): 41—45
- 15 Albertson M L, Simons D B, Richardson EV. Discussion-Mechanics of sediment ripple formation. *J Hydr Div Proc Amer Soc Civil Engrs*, 1958, 84(HY1): 90—97