$K_{1,1,m} \square P_n$ 的交叉数

欧阳章东^{①*}, 王晶^②, 黄元秋^③

① 湖南第一师范学院数学系, 长沙 410205;

② 长沙学院信息与计算科学系, 长沙 410003;

③ 湖南师范大学数学系, 长沙 410081

E-mail: oymath@163.com, wangjing1001@hotmail.com, hyqq@hunnu.edu.cn

收稿日期: 2013-09-01; 接受日期: 2014-08-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11301169 和 11371133)、湖南省教育厅青年基金 (批准号: 12B026)、湖南省自然科学基金 (批准号: 13JJ4110 和 14JJ3138) 和湖南省高校科技创新团队支持计划资助项目

摘要 借助拉链积运算, Cartesian 积图 $K_{1,m} \square P_n$ 和 $K_{2,m} \square P_n$ 的交叉数最近被先后确定. 本文进一步证明了: 对于 $m, n \geq 1$, 有

$$cr(K_{1,1,m} \square P_n) = 2n \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + (n-1) \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

结论的证明基于 Bokal 关于树的 Cartesian 积图交叉数的有关结果. 另外, 我们也给出了确定 $K_{2,m} \square P_n$ 交叉数的一个简洁方法.

关键词 交叉数 Cartesian 积 拉链积 路**MSC (2010) 主题分类** 05C10, 05C62

1 引言

本文未加说明的图论术语均同文献 [1]. 图 $G = (V, E)$ 在平面上的一个画法, 是指图 G 到平面上的一个同胚映射 ϕ , 其中, 图 G 的每个顶点对应到平面上不同的节点, 图 G 的边 $uv \in E$ 对应到一条连接 $\phi(u)$ 和 $\phi(v)$ 的不穿过其他节点的连续弧. 在不引起歧义的情况下, 也称节点为顶点, 称弧为边. 为了简单起见, 一个画法还应满足如下条件: (1) 没有三条边相交于一个公共的点, (2) 如果两条边有一个公共的内部点 p , 则它们在点 p 产生交叉, (3) 任意两条边只有有限个交叉点. 图 G 的交叉数, 记作 $cr(G)$, 是指在图 G 的所有画法中边与边产生的交叉的最小值. 设 ϕ 是图 G 的一个画法, 我们记 G 在 ϕ 下的交叉数为 $cr_\phi(G)$. 更多关于交叉数方面的知识, 请读者参阅文献 [2] 及其参考文献. 图 G 和 H 的 Cartesian 积图, 记作 $G \square H$, 其顶点集为 $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$, 边集 $E(G \square H) = \{(x_1, y_1)(x_2, y_2) \mid x_1 = x_2 \text{ 且 } y_1 y_2 \in E(H) \text{ 或者 } y_1 = y_2 \text{ 且 } x_1 x_2 \in E(G)\}$.

图的交叉数研究是一个经典却又十分困难的问题 [2]. 事实上, 计算图的交叉数是一个 NP-完全问题 [3]. 目前, 已得到了一些特殊图类与路、圈以及星图的 Cartesian 积图的交叉数 [4–16]. 特别地, 借助拉链积运算, Cartesian 积图 $K_{1,m} \square P_n$ [4] 和 $K_{2,m} \square P_n$ [6] 的交叉数最近被先后确定. 自然地, 我们希

望进一步得到完全三部图与路的 Cartesian 积图的交叉数. Klešč 在文献 [7] 中确定了 $K_{1,1,3} \square P_n$ 的交叉数. 本文进一步证明了: 对于 $m, n \geq 1$, 有

$$cr(K_{1,1,m} \square P_n) = 2n \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + (n-1) \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

结论的证明基于 Bokal 文献 [5] 中的一个结果. 另外, 我们在第 4 节中也给出了确定 $K_{2,m} \square P_n$ 交叉数的一个简洁方法.

2 定义和引理

设 A 和 B 是 E 的两个互不相交的边子集. 在画法 ϕ 中, 用 $cr_\phi(A, B)$ 表示由集合 A 中的边与集合 B 中的边产生的交叉个数, 用 $cr_\phi(A)$ 表示由集合 A 中的边与边产生的交叉个数. 由交叉数的定义, 如下命题显然成立.

命题 2.1 设 ϕ 是图 G 的一个画法, A, B, C 为 $E(G)$ 的互不相交的边子集. 则,

$$cr_\phi(A \cup B) = cr_\phi(A) + cr_\phi(B) + cr_\phi(A, B), \quad (2.1)$$

$$cr_\phi(A, B \cup C) = cr_\phi(A, B) + cr_\phi(A, C). \quad (2.2)$$

引理 2.1 (参见文献 [17]) 当 $m \leq 6$ 时, $cr(K_{m,n}) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

引理 2.2 当 $m \geq 1$ 时, $cr(K_{1,2,m}) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$.

证明 $K_{1,2,m}$ 包含子图 $K_{3,m}$, 由引理 2.1 得 $cr(K_{1,2,m}) \geq cr(K_{3,m}) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$. 另一方面, 图 1 展示了一个含有 $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ 个交叉的 $K_{1,2,m}$ 画法. 因此, 引理得证. $\square$

引理 2.3 (参见文献 [18]) 当 $m \geq 1$ 时, $cr(K_{1,3,m}) = 2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.

为了方便表述与阅读, 下面我们重复文献 [5] 中的相关定义和结论.

设 $G_i, i = 1, 2$ 为图, $v_i \in V(G_i)$, 且 $\deg_{G_i}(v_i) = d$, 用 $N_i = N_{G_i}(v_i)$ 表示 v_i 的邻域集. 称双射函数 $\sigma: N_1 \rightarrow N_2$ 为 G_1 和 G_2 在顶点 v_1 和 v_2 处的拉链函数. 在 $G_1 - v_1$ 和 $G_2 - v_2$ 的并图中添加边 $u\sigma(u), u \in N_1$, 得到的图称为 G_1 和 G_2 的拉链积, 记作 $G_1 \odot_\sigma G_2$.

将图 G 的所有顶点分别与 i 个孤立点 $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ 相连, 得到的图称为是 G 的 i 阶悬挂, 记作 $G^{(i)}$, 其中 $v_1, v_2, \dots, v_i$ 称为 $G^{(i)}$ 的尖端. 设 $L \subseteq V(G_2)$ 为多重集, 对于 $v \in L$ 的每个拷贝, 增加一个

图 1 $K_{1,2,m}$ 的一个画法

新的顶点 v' , 并将 v' 与 $G_1 \square \{v\}$ 的所有顶点相连, 这样得到的图称为 G_1 与 G_2 的带帽 Cartesian 积图, 记作 $G_1 \square_L G_2$, 并称 v' 为 v 的帽子. 对于 $v \in V(G_2)$, 用 $\chi_L(v)$ 表示 v 在 L 中的重数, 令 $\ell(v) := \deg_{G_2}(v) + \chi_L(v)$. 对于 $E(G_2)$ 中的边 uv , 如果 $\ell(u) \neq \ell(v)$, 则称 uv 是不平衡的. 用 $\beta(G_2)$ 表示 G_2 中不平衡边的数目.

图 $G^{(i)}$ 的一个画法 ϕ 称为是尖端齐次的, 如果 G 存在一个顶点置换 ρ , 使得每个尖端的顶点旋系或者是 ρ 或者是 ρ^{-1} . $G^{(i)}$ 的画法 $\phi^{(i)}$ 与 $G^{(j)}$ 的画法 $\phi^{(j)}$ 称为是互相尖端齐次的, 如果 $\phi^{(i)}$ 和 $\phi^{(j)}$ 相应于同一个置换 ρ 是尖端齐次的. 图 G 有全尖端齐次画法, 如果存在 $G^{(i)}$ 的画法 $\phi^{(i)}$, $i \geq 1$, 使得它们两两互相尖端齐次. 更多相关细节, 可参阅文献 [4, 5, 19].

本文主要结果的证明基于 Bokal 的下述引理.

引理 2.4 (参见文献 [5]) 设 G 为 n 阶图, T 是一棵树, $L \subseteq V(T)$ 是一个多重集, 且对于任意 $v \in V(T)$, 或者 $\ell(v) \geq 3$, 或者 $\ell(v) \geq 2$ (若 G 含有一个支配点). 定义

$$B = \sum_{v \in V(T)} cr(G^{\ell(v)}),$$

则, $B \leq cr(G \square_L T) \leq B + \frac{\beta(T)}{2} \binom{n}{2}$. 并且, 如果 G 有全尖端齐次画法, 则 $cr(G \square_L T) = B$.

3 $K_{1,1,m} \square P_n$ 的交叉数

设 $\{a\}$, $\{b\}$ 和 $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ 为完全三部图 $K_{1,1,m}$ 的 3 个划分点集. 用 $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ 表示 P_n 的顶点集, 且对于 $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 点 i 与点 $i+1$ 相邻. 为表述方便, 对于任意 $x \in Z \cup \{a, b\}$, 以及 $i = 0, 1, \dots, n$, 用 x^i 表示 $K_{1,1,m} \square P_n$ 中的顶点 (x, i) . 对于 $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m+1$, 分别用 $K_{1,1,m}^i$ 以及 P_n^j 表示 $K_{1,1,m} \square P_n$ 中的 $n+1$ 个 $K_{1,1,m}$ 拷贝和 $m+2$ 个 P_n 拷贝.

设 G 为图, ϕ 是 G 的一个画法, 对于 $v \in V(G)$, $e \in E(G)$, 我们用 $r_\phi(v)$ 表示在画法 ϕ 下与顶点 v 关联的所有边上产生的交叉个数, 用 $r_\phi(e)$ 表示在画法 ϕ 下边 e 上产生的交叉个数.

引理 3.1 对于 $m, n \geq 1$, 有 $cr(K_{1,1,m} \square P_n) \leq 2n \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + (n-1) \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.

证明 图 2 展示的是 $K_{1,1,m} \square P_n$ 的一个画法 ϕ . 不难看出, 对于 $i, j = 0, 1, \dots, n$ 且 $i \neq j$, 有 $cr_\phi(K_{1,1,m}^i) = 0$ 以及 $cr_\phi(K_{1,1,m}^i, K_{1,1,m}^j) = 0$.

对于 $i = 1, 2, \dots, n-1$, 有

$$\begin{aligned} r_\phi(a^i) &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} r_\phi(a^i z_j^i) + \sum_{j=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+1}^m r_\phi(a^i z_j^i) + r_\phi(a^i b^i) \\ &= \left[\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 2 \right) + \cdots + 0 \right] + \left[0 + 1 + \cdots + \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1 \right) \right] + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

类似地, 对于 $i = 1, 2, \dots, n-1$, 有

$$r_\phi(b^i) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

于是不难得到, 对于 $i = 1, 2, \dots, n-1$,

$$cr_\phi \left(K_{1,1,m}^i, \bigcup_{j=0}^{m+1} P_n^j \right) = \sum_{j=1}^m [r_\phi(a^i z_j^i) + r_\phi(b^i z_j^i)] + r_\phi(a^i b^i)$$

 图 2 $K_{1,1,m} \square P_n$ 的一个画法 ϕ

$$\begin{aligned}
 &= r_\phi(a^i) + r_\phi(b^i) - r_\phi(a^i b^i) \\
 &= 2 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.
 \end{aligned}$$

另外, 对于 $i = 0, n$, 我们又有

$$\begin{aligned}
 r_\phi(a^i) &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} r_\phi(a^i z_j^i) + \sum_{j=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}^m r_\phi(a^i z_j^i) + r_\phi(a^i b^i) \\
 &= \left[\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 2 \right) + \cdots + 0 \right] + \left[0 + 1 + \cdots + \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1 \right) \right] + 0 \\
 &= \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor
 \end{aligned}$$

并且 $cr_\phi(K_{1,1,m}^i, \bigcup_{j=0}^{m+1} P_n^j) = r_\phi(a^i) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$.

从而,

$$\begin{aligned}
 cr_\phi(K_{1,1,m} \square P_n) &= \sum_{i=0}^n cr_\phi \left(K_{1,1,m}^i, \bigcup_{j=0}^{m+1} P_n^j \right) \\
 &= (n-1) \left(2 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right) + 2 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \\
 &= 2n \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + (n-1) \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.
 \end{aligned}$$

因此, 引理得证. $\square$

定理 3.1 对于 $m, n \geq 1$, 有

$$cr(K_{1,1,m} \square P_n) = 2n \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + (n-1) \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

证明 根据引理 3.1, 我们只需证明

$$cr(K_{1,1,m} \square P_n) \geq 2n \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + (n-1) \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

设多重集 L 包含路 P_n 的所有顶点, 其中每个顶点的重数均为 1. 由引理 2.2-2.4 可以得到

$$\begin{aligned} cr(K_{1,m} \square_L P_n) &\geq 2cr(K_{1,m}^{(2)}) + (n-1)cr(K_{1,m}^{(3)}) \\ &= 2cr(K_{1,2,m}) + (n-1)cr(K_{1,3,m}) \\ &= 2 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + (n-1) \left(2 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right) \\ &= 2n \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + (n-1) \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

同时, 不难验证 $K_{1,1,m} \square P_n$ 包含子图 $K_{1,m} \square_L P_n$. 因此 $cr(K_{1,1,m} \square P_n) \geq 2n \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + (n-1) \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, 定理得证. $\square$

4 $K_{2,m} \square P_n$ 的交叉数

唐玲等人^[6]和郑文萍等人^[16]分别用不同的方法独立确定了 $K_{2,m} \square P_n$ 的交叉数. 下面, 我们将给出确定 $K_{2,m} \square P_n$ 交叉数的一个简洁方法.

定理 4.1 (参见文献 [6, 16]) 对于 $m, n \geq 1$, 有

$$cr(K_{2,m} \square P_n) = 2n \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor.$$

证明 图 2 展示了 $K_{1,1,m} \square P_n$ 的一个画法, 且 $K_{1,1,m} \square P_n$ 在此画法下的交叉数为 $2n \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + (n-1) \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. 在此画法中, 去掉边 $a^i b^i, i = 0, 1, \dots, n$, 可得到的 $K_{2,m} \square P_n$ 的一个画法, 并且在去边过程中可以保证减少的交叉数为 $(n-1) \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. 因此 $cr(K_{2,m} \square P_n) \leq 2n \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$. 接下来我们只需证明

$$cr(K_{2,m} \square P_n) \geq 2n \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor.$$

设多重集 L 包含路 P_n 的所有顶点, 其中每个顶点的重数均为 2. 用 $\bar{K}_m$ 表示含有 m 个顶点的空图. 根据引理 2.1 和 2.4, 有

$$\begin{aligned} cr(\bar{K}_m \square_L P_n) &\geq 2cr(\bar{K}_m^{(3)}) + (n-1)cr(\bar{K}_m^{(4)}) \\ &= 2cr(K_{3,m}) + (n-1)cr(K_{4,m}) \\ &= 2 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + 2(n-1) \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \\ &= 2n \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

同时, 不难验证 $K_{2,m} \square P_n$ 包含子图 $\bar{K}_m \square_L P_n$. 所以 $cr(K_{2,m} \square P_n) \geq 2n \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$, 定理得证. $\square$

致谢 诚挚地感谢审稿人和编委提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London: Macmillan Press Ltd, 1976
- 2 Erdős P, Guy R K. Crossing number problems. Amer Math Monthly, 1973, 80: 52–58
- 3 Garey M R, Johnson D S. Crossing number is NP-complete. SIAM J Algeb Disc Meth, 1983, 4: 312–316
- 4 Bokal D. On the crossing number of Cartesian products with paths. J Combin Theory Ser B, 2007, 97: 381–384
- 5 Bokal D. On the crossing numbers of Cartesian products with trees. J Graph Theory, 2007, 56: 287–300
- 6 Tang L, Lv S X, Huang Y Q. The Crossing number of Cartesian products of complete bipartite graphs $K_{2,m}$ with paths P_n . Graphs Combin, 2007 23: 659–666
- 7 Klešč M. The crossing numbers of certain Cartesian products. Discuss Math Graph Theory, 1995, 15: 5–10
- 8 Klešč M. On the crossing numbers of products of stars and graphs of order five. Graphs Combin, 2001, 17: 289–294
- 9 Jendroľ S, Ščerbová M. On the crossing numbers of $S_m \square P_n$ and $S_m \square C_n$. Čas Pest Mat, 1982, 107: 225–230
- 10 Glebsky L Y, Salazar G. The crossing number of $C_m \square C_n$ is as conjectured for $n \geq m(m+1)$. J Graph Theory, 2004, 47: 53–72
- 11 Adamsson J, Richter R B. Arrangements, circular arrangements and the crossing number of $C_7 \square C_n$. J Combin Theory Ser B, 2004, 90: 21–39
- 12 Salazar G. Drawings of $C_m \square C_n$ with one disjoint family. J Combin Theory Ser B, 1999, 76: 21–39
- 13 Shahrokhi F, Sýkora O, Székely L A, et al. Intersection of curves and crossing number of $C_m \square C_n$ on surfaces. Discrete Comput Geom, 1998, 19: 237–247
- 14 Ouyang Z D, Wang J, Huang Y Q. The crossing number of Cartesian product of paths with complete graphs. Discrete Math, 2014, 328: 71–78
- 15 Zheng W P, Lin X H, Yang Y S, et al. On the crossing number of $K_m \square P_n$. Graphs Combin, 2007, 23: 327–336
- 16 Zheng W P, Lin X H, Yang Y S. The crossing number of $K_{2,m} \square P_n$. Discrete Math, 2008, 308: 6639–6644
- 17 Kleitman D J. The crossing number of $K_{5,n}$. J Combin Theory Ser B, 1971, 9: 315–323
- 18 Asano K. The crossing number of $K_{1,3,n}$ and $K_{2,3,n}$. J Graph Theory, 1986, 10: 1–8
- 19 Beaudou L, Bokal D. On the sharpness of some results relating cuts and crossing numbers. Electron J Combin, 2010, 17: #R96

On the crossing number of $K_{1,1,m} \square P_n$

OUYANG ZhangDong, WANG Jing & HUANG YuanQiu

Abstract The crossing numbers of the Cartesian products $K_{1,m} \square P_n$ and $K_{2,m} \square P_n$ were recently determined with the zip product operation. In this paper, we further show that

$$cr(K_{1,1,m} \square P_n) = 2n \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor + (n-1) \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$$

for $n \geq 1, m \geq 1$. Our proof depends on Bokal's results for Cartesian products with trees. Furthermore, we give a simple proof for the crossing number of $K_{2,m} \square P_n$.

Keywords crossing number, Cartesian product, zip product, path

MSC(2010) 05C10, 05C62

doi: 10.1360/012014-57