一类带变号非线性项 Dirac 方程解的存在性

陈文雄

华侨大学数学科学学院, 泉州 362021

E-mail: chenwenxiong@amss.ac.cn

收稿日期: 2018-04-10; 接受日期: 2019-11-26; 网络出版日期: 2021-08-09

摘要 本文讨论一类具有周期性的非线性 Dirac 方程. 在适当的条件下, 当非线性项是超线性的并且变号时, 利用变分方法得到 Dirac 方程至少有一个非平凡解.

关键词 Dirac 方程 超线性 变号 变分法

MSC (2020) 主题分类 35Q40, 49J35

1 引言

讨论如下形式的 Dirac 方程:

$$i \sum_{k=1}^3 \alpha_k \partial_k u + a \beta u + V(x)u = F_u(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (1.1)$$

其中 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{C}^4$, $a > 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 是 4×4 复 Pauli 矩阵:

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

并且

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

对于方程 (1.1) 的研究源于非线性 Dirac 方程的稳态解, 非线性 Dirac 方程是常见于自动化、核物理、引力物理等学科的重要模型 (参见文献 [1]). 关于方程 (1.1) 或类似的 Dirac 方程解的存在性及解的其他性态, 近年来有许多结果 (参见文献 [2–10]). 利用变分法寻求 Dirac 方程的解时, 往往对于位势函数及非线性项提出各种不同的假设, 整体解的结果可参见文献 [2], 周期解的结果可参见文

英文引用格式: Chen W X. Existence of solutions for a Dirac equation with sign-changing nonlinearity (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1369–1376, doi: 10.1360/N012018-00089

献 [9, 10]. 据我们所知, 当利用变分法对于 Dirac 方程寻求整体解时, 关于非线性项均要求其非负 (参见文献 [2-8]). 于是有一个自然的问题: 如果非线性项变号时, Dirac 方程是否还有整体解? 本文在一定的条件下给出问题肯定的答案.

关于位势函数及非线性项作下列假设:

(V) $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, V 关于 x_k 以 1 为周期 ($k = 1, 2, 3$), 且 $|V|_\infty := \max |V| < a$;

(F₀) $F \in C^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^4, \mathbb{R})$ 且 F 关于 x_k 以 1 为周期 ($k = 1, 2, 3$);

(F₁) 当 $|u| \rightarrow 0$ 时, $F(x, u) = o(|u|)$ 对于 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立;

(F₂) 当 $|u| \rightarrow \infty$ 时, $F(x, u)|u|^{-2} \rightarrow \infty$ 对于 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立;

(F₃) 存在 $p \in (2, 3)$ 及正数 ρ, C_1, C_2 , 使得当 $|u| \geq \rho$ 且 $x \in \mathbb{R}^3$ 时, 下列不等式成立:

$$|F_u(x, u)| \leq C_1 |u|^{p-1}, \quad F(x, u) \geq 0,$$

$$\tilde{F}(x, u) \geq C_2 |u|^p, \quad \text{其中 } \tilde{F}(x, u) = \frac{1}{2} F_u(x, u) \cdot u - F(x, u);$$

(F₄) $2\mu C_1(\rho^{p-2} + \frac{1}{C_2} \sup_{|u| \leq \rho, x \in \mathbb{R}^3} \frac{|\tilde{F}(x, u)|}{|u|^2}) + \sup_{|u| \leq \rho, x \in \mathbb{R}^3} \frac{|F_u(x, u)|}{|u|} < a - |V|_\infty$, 其中 $\mu = d_p$ 是第 2 节中不等式 (2.4) 给出的一个正数.

本文的主要结果如下:

定理 1.1 如果条件 (V) 及条件 (F₀)–(F₄) 均满足, 则方程 (1.1) 至少有一个非平凡解 $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$.

注 1.1 设 $2 < s < q < 3$, $\lambda > 0$, 令 $F(x, u) = \frac{1}{q} |u|^q - \frac{\lambda}{s} |u|^s$, $\forall (x, u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^4$. 则对于每个 $\lambda > 0$, $F(x, u)$ 均是变号的, 而当 λ 足够小时不难得到 $F(x, u)$ 满足 (F₀)–(F₄).

这一结果说明在上述的条件下, 当非线性项 F 在变号时可以得到 Dirac 方程的非平凡整体解. 周期的 Dirac 方程关于周期解的结果相对较多, 而整体解的结果并不多, 据我们所知超线性 Dirac 方程当非线性项变号时整体解的存在性结果目前是没有的. 但遗憾的是我们要求非线性项变号的范围不能太大, 即假设条件中的 (F₄), 如果能将这一条件放宽将会是一个更有趣的问题.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节建立相应问题的适当的变分框架, 并给出应用的抽象结论, 第 3 节讨论问题相应泛函的变分结构及 $(\bar{C})_c$ 序列的行为, 最后, 第 4 节证明主要结论定理 1.1.

2 变分框架

对于 $1 \leq q \leq \infty$, 令 $L^q = L^q(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$, 以 $|\cdot|_q$ 和 $(\cdot, \cdot)_2$ 分别表示通常的 L^q 范数及 L^2 内积. 令 $H_0 = i \sum_{k=1}^3 \alpha_k \partial_k + a\beta$, 则 H_0 是空间 L^2 上的自伴算子且其域为 $\mathcal{D}(H_0) = H^1 \equiv H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$. 算子 H_0 仅有连续谱且其谱 $\sigma(H_0) = \mathbb{R} \setminus (-a, a)$, 从而可诱导出空间 L^2 的正交分解:

$$L^2 = L^+ \oplus L^-, \quad u = u^+ + u^-, \quad (2.1)$$

使得 H_0 分别在闭子空间 L^+ 和 L^- 上是正定和负定的. 再令 $E = \mathcal{D}(|H_0|^{\frac{1}{2}}) \equiv H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$, 赋予其内积 $\langle u, v \rangle = (|H_0|^{\frac{1}{2}} u, |H_0|^{\frac{1}{2}} v)_2$, 则 E 是可分的 Hilbert 空间且有诱导范数 $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$, 其中 $|H_0|^{\frac{1}{2}}$ 表示算子 H_0 绝对值的平方根. 由算子 H_0 的谱结构可知, 对于任意 $u \in E$ 均有

$$a|u|_2^2 \leq \|u\|_2^2, \quad (2.2)$$

从而可以得到上述的诱导范数与通常的 $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ 范数是等价的, 因此 E 可连续嵌入到 L^q ($q \in [2, 3]$) 且可紧嵌入到 L^q_{loc} ($q \in [1, 3]$). 此外空间 E 具有正交分解:

$$E = E^+ \oplus E^-, \quad E^\pm = E \cap L^\pm, \quad (2.3)$$

这一正交分解关于内积 $(\cdot, \cdot)_2$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 均是成立的. E 的正交分解 (2.3) 可诱导出空间 L^q 的直和分解 (详见 [8, 命题 2.1]), 从而对于任何 $q \in (1, \infty)$, 存在 $d_q > 0$, 使得对于任意 $u \in E$ 有

$$|u^\pm|_q \leq d_q |u|_q. \quad (2.4)$$

在 Hilbert 空间 E 上定义泛函

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(H_0 u, u)_2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(x)|u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(x, u) dx, \quad (2.5)$$

由上述的讨论, 泛函 Φ 可写成

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(x)|u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(x, u) dx. \quad (2.6)$$

在我们的假设条件下, Φ 是 C^1 泛函并且其临界点是方程 (1.1) 的弱解. 而零是 Φ 的平凡临界点, 因此我们寻求它的非平凡临界点.

我们将利用文献 [11, 定理 1.3] 给出的环绕定理证明主要结果, 为方便起见, 在此简述这一定理. 设 X 是可分的 Hilbert 空间且其内积和范数分别为 $(\cdot, \cdot)$ 及 $\|\cdot\|$, X 具有闭子空间的直和分解 $X = X^+ \oplus X^-$. 令 $\{e_j^-\}$ 是 X^- 上的正规正交序列, 在 X 上定义范数

$$\|u\| = \max \left\{ \|P^+ u\|, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} |(P^- u, e_j^-)| \right\}, \quad (2.7)$$

其中 $P^\pm$ 表示 X 到 $X^\pm$ 的投影算子, 则有 $\forall u \in X$,

$$\|P^+ u\| \leq \|u\| \leq \|u\|. \quad (2.8)$$

设 $R > r > 0$, $e \in X^+$ 且 $\|e\| = 1$, 令 $N = \{u \in X^+ \mid \|u\| = r\}$, $Q = \{u + se \mid u \in X^-, s \geq 0, \|u + se\| \leq R\}$, 且以 ∂Q 表示 Q 的边界. 设 $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, 如果序列 $\{u_n\} \subset X$ 使得 $\sup_n \Phi(u_n) \leq c$ 且 $(1 + \|u_n\|)\Phi'(u_n) \rightarrow 0$, 则称 $\{u_n\}$ 是泛函 Φ 的一个 $(\bar{C})_c$ 序列.

定理 2.1 假设 $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ 且满足下列条件:

(i) Φ' 是弱序列连续的且 $\sup_Q \Phi < \infty$;

(ii) 存在 $\delta > 0$, $e \in X^+$ 且 $\|e\| = 1$, $R > r > 0$, 使得 $\inf_N \Phi > \max\{\sup_{\partial Q} \Phi, \sup_{\|u\| \leq \delta} \Phi(u)\}$.

则泛函 Φ 存在一个 $(\bar{C})_c$ 序列 $\{u_n\} \subset X$ 且 $\inf_n \|u_n\| \geq \delta/2$, 其中 $c = \sup_Q \Phi$.

3 环绕结构及 $(\bar{C})_c$ 序列

下面说明由 (2.6) 所定义的泛函 Φ 满足环绕结构, 并讨论其 $(\bar{C})_c$ 序列的性质.

引理 3.1 若条件 (V) 和 $(F_0)-(F_3)$ 均满足, 则存在 $r > 0$ 使得 $\inf_N \Phi > 0$, 其中 $N = \{u \in E^+ \mid \|u\| = r\}$.

证明 由 (F_0) , (F_1) 及 (F_3) , 可得到对任何的 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$|F(x, u)| \leq \varepsilon |u|^2 + C_\varepsilon |u|^p, \quad (3.1)$$

从而由 (2.6) 并结合 (2.2) 可知存在 $C, C' > 0$ 使得, 当 $u \in E^+$ 时,

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(x) |u|^2 dx - \frac{a - |V|_\infty}{4} |u|_2^2 - C |u|_p^p \geq \frac{a - |V|_\infty}{4a} \|u\|^2 - CC' \|u\|^p,$$

从而当 $\|u\|$ 足够小时, 引理 3.1 结论成立. $\square$

引理 3.2 若条件 (V) 和 (F_0) – (F_4) 均满足, 则对 $e \in X^+$ 且 $\|e\| = 1$, 存在 $R > r > 0$ 使得 $\sup_{\partial Q} \Phi \leq 0$, 其中 $Q = \{u + se \mid u \in X^-, s \geq 0, \|u + se\| \leq R\}$.

证明 只需证明当 $u \in E^- \oplus \mathbb{R}^+ e$ 且 $\|u\| \rightarrow \infty$ 时, $\Phi(u) \rightarrow -\infty$. 若不然, 则有序列 $u_n \in E^- \oplus \mathbb{R}^+ e$ 且 $\|u_n\| \rightarrow \infty$, 并且存在 $M > 0$ 使得 $\Phi(u_n) \geq -M$. 令 $v_n = u_n / \|u_n\|$, 则可得 $\|v_n\| = 1$, 从而在子列的意义下我们有 $v_n \rightharpoonup v$, $v_n^- \rightharpoonup v^- \in E^-$ 且 $v_n^+ \rightharpoonup v^+ \in E^+$. 而由 (2.6) 可得到

$$\frac{-M}{\|u_n\|^2} \leq \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2} \|v_n^+\|^2 - \frac{1}{2} \|v_n^-\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(x) |v_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx, \quad (3.2)$$

再令

$$F_1(x, u) = \begin{cases} F(x, u), & x \in \mathbb{R}^3, \quad |u| \leq \rho, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad |u| > \rho, \end{cases}$$

并记 $F_2 = F - F_1$, 由条件 (F_4) 可知 $|F_1(x, u)| \leq \frac{A}{2} |u|^2$, 其中

$$A = \sup_{|u| \leq \rho, x \in \mathbb{R}^3} \frac{|F_u(x, u)|}{|u|} < a - |V|_\infty.$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F_1(x, u_n)|}{\|u_n\|^2} dx \leq \frac{A}{2} |v_n|_2^2 \leq \frac{A}{2a} \|v_n\|^2,$$

结合 (2.2) 和 (3.2) 可推导出

$$\frac{-M}{\|u_n\|^2} \leq \frac{a + |V|_\infty + A}{2a} \|v_n^+\|^2 - \frac{a - |V|_\infty - A}{2a} \|v_n^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F_2(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx. \quad (3.3)$$

下面分两种情形讨论: (1) $v = 0$, (2) $v \neq 0$.

(1) 如果 $v = 0$, 则 $v^+ = 0$, 从而 $\|v_n^+\| \rightarrow 0$ 且 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n^-\| \geq 1$. 由 F_2 的构造及 (F_3) 可知当 $(x, u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^4$ 时 $F_2(x, u) \geq 0$, 如此结合 (3.3) 可得到 $0 \leq -\frac{a - |V|_\infty - A}{2a}$, 这与 $A < a - |V|_\infty$ 矛盾.

(2) 如果 $v \neq 0$, 由 (F_2) 可得当 $|u| \rightarrow \infty$ 时, $F_2(x, u) |u|^{-2} \rightarrow \infty$ 对于 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立, 于是当 $x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid v \neq 0\}$ 时, 可推导出 $|u_n(x)| \rightarrow \infty$, 从而

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\{x \in \mathbb{R}^3 \mid v \neq 0\}} \frac{F_2(x, u_n) |v_n|^2}{|u_n|^2} dx = \infty. \quad (3.4)$$

我们又有

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F_2(x, u_n) |v_n|^2}{|u_n|^2} dx \geq \int_{\{x \in \mathbb{R}^3 \mid v \neq 0\}} \frac{F_2(x, u_n) |v_n|^2}{|u_n|^2} dx, \quad (3.5)$$

于是结合 (3.3) 可推导出

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a + |V|_\infty + A}{2a} \|v_n^+\|^2 - \frac{a - |V|_\infty - A}{2a} \|v_n^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F_2(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx \right) = -\infty, \quad (3.6)$$

这与 $-M/\|u_n\|^2 \rightarrow 0$ 矛盾.

如此可知引理 3.2 结论成立. $\square$

引理 3.3 若条件 (V) 和 $(F_0)-(F_4)$ 均满足, 则

$$\limsup_{\|u\| \rightarrow 0} \Phi(u) \leq 0.$$

证明 由引理 3.2 的证明过程及 (2.8) 可知

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(x) |u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F_1(x, u) dx - \int_{\mathbb{R}^3} F_2(x, u) dx \\ &\leq \frac{a + |V|_\infty + A}{2a} \|u^+\|^2 - \frac{a - |V|_\infty - A}{2a} \|u^-\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F_2(x, u_n) dx \\ &\leq \frac{a + |V|_\infty + A}{2a} \|u^+\|^2 - \frac{a - |V|_\infty - A}{2a} \|u^-\|^2 \\ &\leq \frac{a + |V|_\infty + A}{2a} \|u^+\|^2 \leq \frac{a + |V|_\infty + A}{2a} \|u\|^2. \end{aligned}$$

从而所证的结论成立. $\square$

结合引理 3.1-3.3 可知泛函 Φ 满足形如定理 2.1 中的环绕结构.

引理 3.4 若条件 (V) 和 $(F_0)-(F_4)$ 均满足, 则对于 $e \in E^+$ 且 $\|e\| = 1$, 存在 $\delta > 0$, $R > r > 0$, 使得

$$\inf_N \Phi > \max \left\{ \sup_{\partial Q} \Phi, \sup_{\|u\| \leq \delta} \Phi(u) \right\}.$$

关于 Φ 的 $(\bar{C})_c$ 序列, 可得到下面的结论.

引理 3.5 若条件 (V) 和 $(F_0)-(F_4)$ 均满足, 序列 $\{u_n\} \subset E$ 是 Φ 的 $(\bar{C})_c$ 序列, 则 $\{u_n\}$ 是有界序列.

证明 由于 $\{u_n\} \subset E$ 是 Φ 的 $(\bar{C})_c$ 序列, 则有 $\sup_n \Phi(u_n) \leq c$, $(1 + \|u_n\|)\Phi'(u_n) \rightarrow 0$. 又可得

$$\Phi'(u_n)(u_n^+ - u_n^-) = \|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u_n (u_n^+ - u_n^-) dx - \int_{\mathbb{R}^3} F_u(x, u_n) (u_n^+ - u_n^-) dx, \quad (3.7)$$

$$\Phi(u_n) - \frac{1}{2} \Phi'(u_n) u_n = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{F}(x, u_n) dx. \quad (3.8)$$

于是由 (3.7) 可知

$$\|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u_n (u_n^+ - u_n^-) dx = \int_{\mathbb{R}^3} F_u(x, u_n) (u_n^+ - u_n^-) dx + o(1), \quad (3.9)$$

而由 (3.8) 有 $c + o(1) \geq \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{F}(x, u_n) dx$, 由此结合 (F_3) 可以得到

$$\begin{aligned} c + o(1) + \int_{\{x \mid |u_n(x)| < \rho\}} |\tilde{F}(x, u_n)| dx &\geq c + o(1) - \int_{\{x \mid |u_n(x)| < \rho\}} \tilde{F}(x, u_n) dx \\ &\geq \int_{\{x \mid |u_n(x)| \geq \rho\}} \tilde{F}(x, u_n) dx \end{aligned}$$

$$\geq C_2 \int_{\{x \mid |u_n(x)| \geq \rho\}} |u_n|^p dx, \quad (3.10)$$

这可以推导出

$$\begin{aligned} C_2 |u_n|_p^p &\leq C_2 \int_{\{x \mid |u_n(x)| < \rho\}} |u_n|^p dx + \int_{\{x \mid |u_n(x)| < \rho\}} |\tilde{F}(x, u_n)| dx + c + o(1) \\ &\leq C_2 \rho^{p-2} |u_n|_2^2 + \sup_{|u| \leq \rho, x \in \mathbb{R}^3} \frac{|\tilde{F}(x, u)|}{|u|^2} |u_n|_2^2 + c + o(1) \\ &\leq \frac{1}{a} \left(C_2 \rho^{p-2} + \sup_{|u| \leq \rho, x \in \mathbb{R}^3} \frac{|\tilde{F}(x, u)|}{|u|^2} \right) \|u_n\|^2 + c + o(1). \end{aligned} \quad (3.11)$$

由 (F_3) 、Hölder 不等式和 (2.4) 可得到

$$\begin{aligned} \int_{\{x \mid |u_n(x)| \geq \rho\}} F_u(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx &\leq C_1 \int_{\{x \mid |u_n(x)| \geq \rho\}} |u_n|^{p-1} |u_n^+| dx \\ &\quad + C_1 \int_{\{x \mid |u_n(x)| \geq \rho\}} |u_n|^{p-1} |u_n^-| dx \\ &\leq C_1 |u_n|_p^{p-1} |u_n^+|_p + C_1 |u_n|_p^{p-1} |u_n^-|_p \leq 2\mu C_1 |u_n|_p^p, \end{aligned} \quad (3.12)$$

结合 (3.11) 推导出

$$\begin{aligned} \int_{\{x \mid |u_n(x)| \geq \rho\}} F_u(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx &\leq \frac{2\mu C_1}{a} \left(\rho^{p-2} + \frac{1}{C_2} \sup_{|u| \leq \rho, x \in \mathbb{R}^3} \frac{|\tilde{F}(x, u)|}{|u|^2} \right) \|u_n\|^2 \\ &\quad + \frac{2\mu C_1 c}{C_2} + o(1). \end{aligned} \quad (3.13)$$

此外还可得到

$$\begin{aligned} \int_{\{x \mid |u_n(x)| < \rho\}} |F_u(x, u_n)| |u_n^+ - u_n^-| dx &= \int_{\{x \mid |u_n(x)| < \rho\}} \frac{|F_u(x, u_n)|}{|u_n|} |u_n^+ + u_n^-| |u_n^+ - u_n^-| dx \\ &\leq \sup_{|u| \leq \rho, x \in \mathbb{R}^3} \frac{|F_u(x, u)|}{|u|} |u_n|_2^2 \\ &\leq \sup_{|u| \leq \rho, x \in \mathbb{R}^3} \frac{|F_u(x, u)|}{|u|} \frac{\|u_n\|^2}{a}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

从而由 (3.13) 及 (3.14) 可推导出

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} F_u(x, u_n)(u_n^+ - u_n^-) dx &\leq \frac{1}{a} \left(2\mu C_1 \rho^{p-2} + \frac{2\mu C_1}{C_2} \sup_{|u| \leq \rho, x \in \mathbb{R}^3} \frac{|\tilde{F}(x, u)|}{|u|^2} + \sup_{|u| \leq \rho, x \in \mathbb{R}^3} \frac{|F_u(x, u)|}{|u|} \right) \|u_n\|^2 \\ &\quad + \frac{2\mu C_1 c}{C_2} + o(1), \end{aligned} \quad (3.15)$$

结合 (2.2) 和 (3.9) 可得到

$$\frac{a - |V|_\infty}{a} \|u_n\|^2 \leq \|u_n\|^2 - |V|_\infty |u_n|^2 \leq \|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u_n (u_n^+ - u_n^-) dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{a} \left(2\mu C_1 \rho^{p-2} + \frac{2\mu C_1}{C_2} \sup_{|u| \leq \rho, x \in \mathbb{R}^3} \frac{|\tilde{F}(x, u)|}{|u|^2} + \sup_{|u| \leq \rho, x \in \mathbb{R}^3} \frac{|F_u(x, u)|}{|u|} \right) \|u_n\|^2 \\ &\quad + \frac{2\mu C_1 c}{C_2} + o(1), \end{aligned} \quad (3.16)$$

如此由 (F_4) 可知 $\{u_n\}$ 有界. $\square$

4 定理 1.1 的证明

取 $X = E$, $X^\pm = E^\pm$. E 是可分的 Hilbert 空间且由 (2.6) 所定义的泛函 $\Phi \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$. 引理 3.4 表明 Φ 具有形如定理 2.1 中的环绕结构. 在 (V) 和 $(F_0)-(F_4)$ 均成立的条件下, 不难得出 Φ' 是弱序列连续的, 从而 Φ 满足定理 2.1 的所有条件. 于是对于 $c = \sup_Q \Phi$, Φ 有 $(\bar{C})_c$ 序列 $\{u_n\} \subset E$ 且 $\inf_n \|u_n\| > 0$. 而引理 3.5 说明序列 $\{u_n\}$ 是有界的, 则在子列的意义下, 序列 $\{u_n\}$ 必居下列两种情形之一:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_1(y)} |u_n|^2 dx = 0$;
- (2) 存在 $\kappa > 0$ 及 $k_n \in \mathbb{Z}^3$ 使得 $\int_{B_1(k_n)} |u_n|^2 dx \geq \kappa$.

若 (1) 成立, 利用 Lions 引理及 (3.1) 可以得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} F_u(x, u_n) u_n^\pm dx = 0$ (类似的证明可参见文献 [12, 引理 3.6]), 从而由 (2.2) 和 (3.9) 可得

$$\begin{aligned} \frac{a - |V|_\infty}{a} \|u_n\|^2 &\leq \|u_n\|^2 - |V|_\infty |u_n|^2 \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^3} F_u(x, u_n) u_n^+ dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^3} F_u(x, u_n) u_n^- dx \right| + o(1), \end{aligned} \quad (4.1)$$

于是 $\|u_n\| \rightarrow 0$, 这与 $\inf_n \|u_n\| > 0$ 矛盾. 所以只能是 (2) 成立, 此时令 $\tilde{u}_n(x) = u_n(x + k_n)$, 则由 V 和 F 的周期性假设可知序列 $\{\tilde{u}_n\}$ 满足 $(1 + \|\tilde{u}_n\|)\Phi'(\tilde{u}_n) \rightarrow 0$. 并且由 $\{\tilde{u}_n\}$ 的构造可知 $\tilde{u}_n \rightharpoonup u_0 \neq 0$, 又 Φ' 是弱序列连续的, 从而可得到 $\Phi'(u_0) = 0$. 故 $u_0 \in E$ 是方程 (1.1) 的非平凡解.

致谢 在此对本文审稿人所作评价以及建议致以衷心的感谢.

参考文献

- 1 Thaller B. The Dirac Equation. Berlin: Springer, 1992
- 2 Esteban M J, Séré E. Stationary states of the nonlinear Dirac equation: A variational approach. Comm Math Phys, 1995, 171: 323–350
- 3 Esteban M J, Séré E. An overview on linear and nonlinear Dirac equations. Discrete Contin Dyn Syst, 2002, 8: 381–397
- 4 Bartsch T, Ding Y H. Solutions of nonlinear Dirac equations. J Differential Equations, 2006, 226: 210–249
- 5 Ding Y H, Ruf B. Solutions of a nonlinear Dirac equation with external fields. Arch Ration Mech Anal, 2008, 190: 57–82
- 6 Ding Y H, Wei J C. Stationary states of nonlinear Dirac equations with general potentials. Rev Math Phys, 2008, 20: 1007–1032
- 7 Zhao F K, Ding Y H. Infinitely many solutions for a class of nonlinear Dirac equations without symmetry. Nonlinear Anal, 2009, 70: 921–935
- 8 Ding Y H, Xu T. Localized concentration of semi-classical states for nonlinear Dirac equations. Arch Ration Mech Anal, 2015, 216: 415–447
- 9 Ding Y H, Liu X Y. Periodic waves of nonlinear Dirac equations. Nonlinear Anal, 2014, 109: 252–267
- 10 Ding Y H, Liu X Y. Periodic solutions of a Dirac equation with concave and convex nonlinearities. J Differential Equations, 2015, 258: 3567–3588
- 11 Chen S W, Wang C L. An infinite-dimensional linking theorem without upper semi-continuous assumption and its applications. J Math Anal Appl, 2014, 420: 1552–1567

- 12 Szulkin A, Zou W M. Homoclinic orbits for asymptotically linear Hamiltonian systems. J Funct Anal, 2001, 187: 25–41

Existence of solutions for a Dirac equation with sign-changing nonlinearity

Wenxiong Chen

Abstract In this paper, we consider a class of periodically nonlinear Dirac equations. Under certain assumptions, we obtain that there exists at least one non-trivial solution for the super-linear Dirac equation with sign-changing nonlinearity via the variational method.

Keywords Dirac equation, super-linear, sign-changing, variational method

MSC(2020) 35Q40, 49J35

doi: 10.1360/N012018-00089