



光晶格中自旋 $3/2$ 超冷费米原子的 Mott 绝缘态及其量子相变

张广铭*, 涂鸿浩

清华大学物理系, 北京 100084

*E-mail: gmzhang@mail.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2011-01-14; 接受日期: 2011-01-27

摘要 我们首先简要介绍了超冷原子和光晶格, 然后利用推广的单带 Hubbard 模型讨论了二维正方光晶格中自旋 $3/2$ 费米型超冷原子体系中的几种 Mott 绝缘态, 其中该系统的自旋自由度具有较大 $SO(5)$ 对称性. 对于对称性破缺的自旋四极矩有序态和自旋偶极-八极矩共存有序态, 我们详细研究了系统的低能集体激发模式-Goldstone 玻色激发的具体行为. 在 $SU(4)$ 对称点附近, 我们发现强烈的量子涨落可能会演生出一个 $SU(4)\pi$ 通量的自旋液体态. 对此, 我们还分析了这两种奇异量子态之间可能存在的量子相变.

关键词 超冷原子, Mott 绝缘态, 集体激发, 量子相变

PACS: 71.10.Fd, 02.70.Ss

1 引言

从 20 世纪初量子力学建立以来, 人们在原子尺度上对自然界微观规律的认识进入了新的时代, 量子力学基本理论在解释各种物理实验现象及应用领域上都取得了巨大的成功. 另一方面, 在面对由大量原子组成的多粒子体系时, 尽管微观粒子的运动规律满足量子力学的运动方程-薛定谔方程, 但求解粒子数在 10^{23} 量级上的量子关联体系对应的薛定谔方程在可以预见的将来都是一个不可能完成的任务. 随着高温超导、量子霍尔效应等众多新奇的宏观量子效应的发现, 人们逐渐认识到大量粒子组成复杂体系之后, 系统的整体行为不能通过其微观组成单元的性质外推得到. 因此, 在量子关联多体系统中寻找新的方法, 发展新的概念一直是物理学研究中的重要问

题. 这一领域的不断发展还推动了一种新的科学研究指导思想-演生论 (Emergence) 的形成, 即认为自然界依据尺度和复杂性分为不同的层次, 每一个层次都有其特有的基本规律, 并与其组成部分的微观细节相对独立. 诺贝尔物理奖得主 Anderson 对演生论的一个精辟说法是: More is different.

量子关联多体系统中的一个重要领域是对量子自旋系统的研究. 早在量子力学建立初期的 1931 年, Bethe^[1] 就对一维量子自旋 $1/2$ 反铁磁海森堡链进行了研究, 开辟了量子自旋链研究的篇章. 对于高维情形下的反铁磁体, Anderson 等人^[2,3] 在 50 年代发展了自旋波理论, 预言了高维的反铁磁海森堡模型具有长程序, 低能元激发为无能隙的自旋波模式. 与量子自旋系统相关的物理研究涉及凝聚态物理、量子场论、数学物理等多个研究领域, 一直是物理学发展中

引用格式: 张广铭, 涂鸿浩. 光晶格中自旋 $3/2$ 超冷费米原子的 Mott 绝缘态及其量子相变. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, 41: 356-368

Zhang G M, Tu H H. Mott insulating states and their quantum phase transitions of interacting spin- $3/2$ ultracold fermionic atoms on optical lattices (in Chinese). Sci Sin Phys Mech Astron, 2010, 41: 356-368, doi: 10.1360/132011-61

的常青树. 为研究这类体系的物理性质, 人们发展了许多解析方法, 如可积模型、玻色化、共形场论等许多有力的工具.

从实验的角度来看, 固体材料中的大自旋通常需要洪特 (Hund) 相互作用产生, 自旋 $S > 2$ 的情形并不多见. 自从 20 世纪 90 年代稀薄玻色气体的玻色爱因斯坦凝聚 (BEC) 被实现以来, 超冷原子成为现代物理学研究中越来越重要的研究方向. 在超冷原子体系中, 人们可以研究与之相关的凝聚态物理、量子光学、原子物理、甚至粒子物理与核物理问题, 因而超冷原子体系吸引了多个领域的物理学工作者们的广泛关注. 超冷原子体系非常纯净, 并且众多的重要物理参数便于调节, 使得超冷原子体系相比于其他实验体系具有特别的优势. 从凝聚态物理研究者的角度出发, 超冷原子体系提供了一个平台: 我们不仅可以去用它来模拟传统的固体电子体系, 而且可以利用超冷原子去作量子调控, 制备一些仅存在于实验室中的量子态, 这些量子态不仅具有奇特的物理性质, 还有可能在以后被用来实现可行的量子计算方案.

近年来, 快速发展的超冷原子体系提供了一个新的研究大自旋量子多体系统的实验平台. 2002 年, 德国的 Greiner 等人率先在光晶格中实现了玻色原子从超流态到 Mott 绝缘态的量子相变^[4], 开启了利用超冷原子体系研究量子关联体系的先河. 在超冷原子体系中, 不仅环境非常纯净, 而且系统的众多参数可以进行调节. 因而, 人们有望用冷原子系统来模拟传统的强关联电子体系, 甚至以人工量子调控的方式在更多的研究对象中寻找新的量子物态. 在超冷原子体系中, 研究的基本对象是原子, 而原子的自旋由核自旋与外层电子自旋耦合得到, 一般均大于 $1/2$. 在光晶格中, 原子的自旋自由度将完全被释放出来, 因此光晶格中的超冷原子体系是一个高度可控的大自旋量子关联系统, 为研究大自旋量子多体系统中的新奇物态提供了舞台.

2 光晶格与冷原子的强关联体系

冷原子物理中的第一个重大突破是实现玻色爱因斯坦凝聚. 众所周知, 玻色原子的统计性质满足玻色爱因斯坦分布率. 对于理想的玻色气体, 如果降低体系的温度至某个临界温度 T_c , 体系的化学势为 0, 此

时体系发生玻色爱因斯坦凝聚, 宏观数目的玻色原子都凝聚在零动量的态上. 若体系温度为 T , 玻色原子的质量为 m , 则其热德布罗依波长为 $\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}}$. 若降低体系的温度, 则德布罗依波长增大, 在玻色爱因斯坦凝聚相变发生的时候, 德布罗依波长增大到原子与原子之间平均距离的量级, 此时原子与原子的波包产生交叠, 从而呈现出宏观尺度的物质波.

看上去我们只要能达到足够低的温度, 即可制备玻色爱因斯坦凝聚体, 但实际上这并非易事. 一般而言, 降低温度时, 通常的原子气体在进入量子简并极限之前会凝聚为液体或者固体. 为了避免在发生 BEC 相变之前发生气-液和气-固相变, 原子气体必须非常稀薄, 这将使得 BEC 转变温度降低到纳开尔文 (Nano Kelvin) 量级. 一直到 1995 年, 美国科罗拉多大学的 JILA 研究小组和麻省理工学院的 Ketterle 研究小组结合激光制冷和蒸发制冷的办法, 在磁势阱中分别独立制备了碱金属原子气体 ^{23}Na 和 ^{87}Rb 的 BEC. 这是自 1925 年爱因斯坦和玻色预言 BEC 以来, 70 年来人们第一次成功观测到 BEC, Cornell, Wieman 和 Ketterle 三位物理学家也因此被授予 2001 年 Nobel 物理学奖.

在过去的几年中, 光晶格实验技术的发展, 更是将超冷原子的研究推向了前所未有的高度, 并建立了与凝聚态物理特别是强关联体系的广泛联系. 简而言之, 光晶格利用相向传播的激光束形成驻波, 而冷原子可被束缚于驻波的势阱中, 二维和三维光晶格的构造方式如图 1 所示. 这样的人造晶格结构对于模拟凝聚态体系尤为重要, 它使得在超冷原子体系中研究强相互作用的多体效应成为可能. 在这样的条件下, 不仅传统的电子体系可以被冷原子系统模拟, 而且以人工调控的方式研究新的量子态也成为可能. 2002 年, 德国的 Greiner 等人^[4] 率先利用光晶格实现了玻色原子超流态到 Mott 绝缘态的量子相变, 这是利用冷原子体系研究强关联多体物理的开端. 在 2.1 节中, 我们先以此为例, 介绍相关的冷原子实验与理论的物理背景.

2.1 超冷玻色原子的超流-Mott 相变

实验中, 六束两两相向传播的正交激光束在空间中形成一个周期性的晶格势

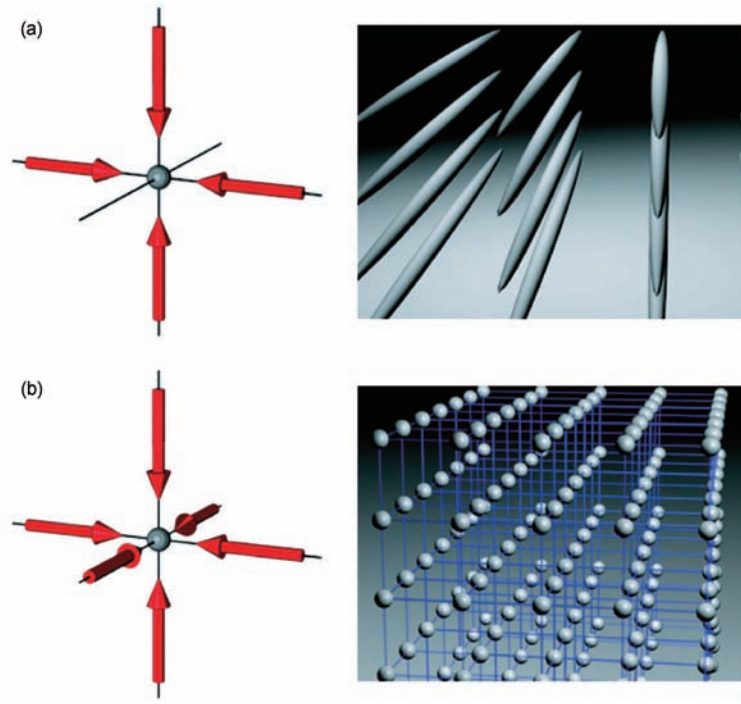


图 1 利用四束和六束相向传播的激光束干涉形成驻波, 得到二维 (a) 与三维 (b) 光晶格 [5]

Figure 1 The formations of the two-dimensional (a) and three-dimensional (b) optical lattices by using four or six counter propagating laser beams [5].

$$V(x, y, z) = V_0(\sin^2 kx + \sin^2 ky + \sin^2 kz), \quad (1)$$

冷原子则被束缚在这个晶格势中. 1998 年 Jaksch 等人 [6] 撰文指出, 如果将无内部自由度 (自旋) 的玻色原子置入光晶格中, 描述系统的哈密顿量将是 Bose-Hubbard 模型:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} b_i^\dagger b_j + \frac{1}{2} U \sum_i n_i(n_i - 1) - \mu \sum_i n_i, \quad (2)$$

其中 $n_i = b_i^\dagger b_i$ 为 i 格点的粒子数算符, 在位 (on-site) 排斥相互作用参数 $U = \frac{\hbar^2 a_s}{\pi m} \int d^3 r |\mathbf{w}(\mathbf{r})|^4$, 近邻格点跃迁矩阵元 $J = \int d^3 r \mathbf{w}^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \left[-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \mathbf{w}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$, 其中 $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ 为光晶格 s 轨道的 Wannier 波函数.

这个看似简单的 Bose-Hubbard 模型能够忠实的描述光晶格中单分量玻色原子的多体行为, 原因是: 在单个格点上, 热激发和原子相互作用的能量尺度, 都远小于 s 轨道和 p 轨道之间的带隙, 并且 Wannier 波函数在一个晶格长度 (半个激光波长) 的尺度内迅速衰减. 光晶格的优势在于它具备极强的调控能力,

如果改变激光的波长和势阱的深度等参数, 跃迁交叠积分 J 和相互作用强度 U 均可在很大的参数范围内变化. 我们可以给出一个直观的物理图象: 如果增大势阱深度, 则原子在阱间隧穿几率变小, 即 J 减小, 如果激光波长更短, 则势阱变“窄”, 原子在同一个阱中波函数交叠更大, 因而排斥相互作用强度 U 更大. 在极低温环境中, 束缚在阱中的原子能量低, 一般处于阱底, 为进行理论和实验的对比, 人们可以采用简谐近似处理光约束势, 具体参数可参阅 Bloch 等人 [5] 的综述文章.

Bose-Hubbard 模型即使是在一维也是无法求解的, 为了理解这个模型的基本物理, 我们可以采取“抓两头, 看中间”的方式, 首先考虑两种极端情形:

(i) 超流态 $U/J \rightarrow 0$, 所有玻色原子凝聚在 $k=0$ 的最低 Bloch 带, 此时多体基态波函数可写作

$$|SF\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(b_{k=0}^\dagger \right)^N |0\rangle. \quad (3)$$

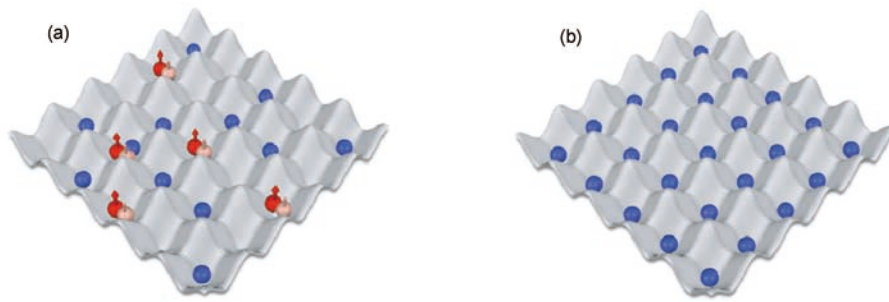


图2 光晶格中玻色子超流态 (a) 到 Mott 态 (b) 的量子相变 [7]

Figure 2 The quantum phase transition from the bosonic superfluid state (a) to Mott insulating state (b) on optical lattices [7].

(ii) Mott 绝缘态 $U/J \rightarrow \infty$, 不妨假设粒子填充数 $\bar{n} = 1$, 即平均每个格点一个原子, 零级近似下玻色子在光晶格间跃迁可忽略, 体系基态波函数为

$$|MI\rangle = \prod_i b_i^\dagger |0\rangle, \quad (4)$$

这两个态的示意图可参见图 2.

如果调节 U/J 从小到大变化, 可以期待在某个临界值 $(U/J)_c$ 时, 体系会发生超流态到 Mott 绝缘态的量子相变. 众所周知, 量子力学中坐标与动量是一对共轭量, 它们满足 Heisenberg 不确定性关系. 事实上, 类似的共轭物理量还有相位 θ 和粒子数 N , 它们在超流-Mott 绝缘体相变中起到重要作用: 在超流态中, 所有玻色原子间呈现出相位刚性 (Phase Rigidity), 即相位确定, 但每个格点的粒子数完全不确定, 低能激发为无能隙且具有线性色散 ($\omega_k = v_s |k|$) 的超流声子. 而 Mott 绝缘态失去相位相干性, 每个格点上粒子数的涨落很小, 对所有类型的激发都有能隙, 属于不可压缩态. 值得一提的是, 超流-Mott 绝缘体相变完全由量子涨落所控制, 不同于气-液相变等由热涨落控制的经典相变, 所以它属于量子相变的范畴.

早在 20 世纪 80 年代, Fisher 等人就对 Bose-Hubbard 模型进行了系统的理论研究 [8], 当时并没有与之对应的实验体系, 而 Greiner 等人 [4] 基于冷原子的实验工作填补了这一空白. 由于 Mott 绝缘态与超流态的区别在于是否存在相位相干, Greiner 等人 [4] 注意到可以通过 Time-of-flight 方法来区分 Mott 态与超流态: 如图 3 所示, 在填充数为 $\bar{n} = 1$ 的条件下, 他

们通过改变光势阱深度 V_0 来观测不同的干涉图样. 如果冷玻色原子处于超流相, 突然撤去光晶格势, 则干涉图样中会出现标志性的零动量相干峰. 当增大 V_0 到临界值 $12 - 13 E_r$ 时, 标志着超流态的相干峰消失, 此时体系进入 Mott 绝缘态. 这一实验结果与理论预测的临界值 $V_0/E_r = 11.89$ 符合的很好.

2.2 光晶格中的量子磁学

目前, 冷原子物理中一个很有前景的方向是与量子磁学的结合, 其中大自旋体系又格外引人关注. 众所周知, 固体材料中的强关联物理主要由自旋为 $1/2$ 电子的相互作用行为所决定. 在超冷原子体系中, 研究的基本对象是原子, 而原子的自旋由核自旋与外层电子自旋耦合得到, 一般均大于 $1/2$. 若采用传统的磁势阱, 原子的自旋自由度被冻结, 束缚的实际上是一系列磁量子数中的最低能量态, 等效为单分量 (无自旋) 的体系. 而在光势阱和光晶格中, 原子的自旋自由度完全被释放出来. 例如, 若将自旋 $1/2$ 的 ^6Li 原子置入光晶格中, 则这个体系由著名的 Hubbard 模型所描述:

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle, \alpha} c_{i\alpha}^\dagger c_{j\alpha} + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} - \mu \sum_i n_i, \quad (5)$$

其中费米型的 ^6Li 原子填充数由化学势控制. 当填充数为 $\bar{n} = 1$ 时, 光晶格的 s 轨道半填满. 在光势阱很深的条件下, 在位排斥相互作用项远大于动能项, 可

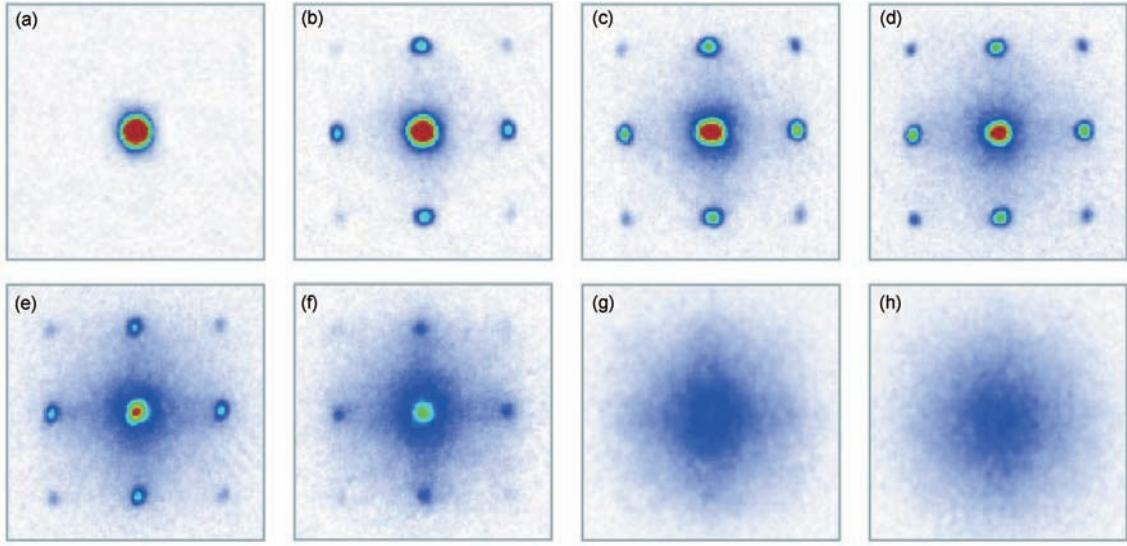


图 3 当光晶格势 V_0 分别等于 (a) $0E_r$, (b) $3E_r$, (c) $7E_r$, (d) $10E_r$, (e) $13E_r$, (f) $14E_r$, (g) $16E_r$, (h) $20E_r$ 时, 进行 time-of-flight 实验得到的干涉图样 [4], 飞行时间为 15 ms

Figure 3 The interference patterns obtained from the time-of-flight experiments with time of 15 ms for different optical trapping potentials [4].

以将动能项作为微扰处理. 利用二阶微扰论, 我们可以得到低能有效模型:

$$H_{\text{eff}} = \frac{4t^2}{U} \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j. \quad (6)$$

在一维光晶格中, 这正是我们在第一章中讨论过的自旋 1/2 的量子反铁磁 Heisenberg 模型. 在两维情形, 该模型被认为很好的描述了高温超导体的母体材料, 如果我们用冷原子模拟高温超导体: 在温度足够低时, 如果我们对这个体系进行“空穴掺杂”(用激光移除少量原子), 可以期待冷原子以 d 波配对的形式呈现超流态, 这将给高温超导理论的研究带来很多启示.

若采用自旋为 1 的玻色原子 ^{23}Na 和 ^{87}Rb , 在单位填充数的 Mott 极限下, 其有效模型可以写成 [9~12]:

$$H_{\text{eff}} = -J_1 \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - J_2 \sum_{\langle ij \rangle} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j)^2. \quad (7)$$

在一维情形, 我们曾在 3.4 节中讨论过这个自旋 1 的双线性 - 双二次模型的相图. 对于超冷原子实验中常用的 ^{23}Na 和 ^{87}Rb 原子, 它们不同的散射长度导致了不同的参数范围: 对于 ^{23}Na , $J_1 < J_2$; 对于 ^{87}Rb ,

$J_1 > J_2$; 在二维条件下, 这两种体系的基态分别对应于自旋液晶态 (四极矩有序) 和铁磁态 (偶极矩有序), 其中前者作为一种非磁的新奇量子有序态, 近年来引起了研究者的广泛关注.

3 自旋 3/2 超冷费米原子

最近日本京都大学的 Takahashi 小组在冷却自旋 5/2 的稀土族费米原子 ^{173}Yb 中取得了很大的突破 [13], 他们成功地将它冷却到量子简并极限下, 这是对大自旋费米子体系研究的重要进展, 大自旋费米子的冷原子体系也已经引起了许多实验和理论物理学家的兴趣. 在这一节中, 我们主要讨论光晶格中的自旋 3/2 超冷原子的几种 Mott 绝缘态, 并分析了与之对应的朗道序参量和对称性破缺, 以及可能存在的非传统量子相变等问题.

简并性自旋 3/2 费米气体可以通过冷却碱金属原子 ^{132}Cs 或者碱土金属原子 ^9Be , ^{135}Ba 和 ^{137}Ba 获得, 对自旋 3/2 费米子体系的研究是对自旋 1/2 费米子体系最自然的推广. 如果将它们束缚在光势阱中,

这些大自旋的费米原子可能产生许多新奇的基态和集体激发模式^[14~17]. 目前, 人们对自旋 3/2 费米原子的超流态已经进行了较多的研究, 相比于通常的自旋 1/2 费米原子, 自旋 3/2 费米原子超流 Cooper 对的结构更为丰富. 它们不仅可以形成自旋单态的 Cooper 对, 还有可能产生总自旋为 2 的 Cooper 对^[18], 甚至还可能形成一种由四个费米原子组成 Cooper 对的超流态^[19~21], 类似于核物质中的重子 (baryon).

3.1 推广的单带 Hubbard 模型

为研究二维正方光晶格中自旋 3/2 超冷费米原子可能的 Mott 态, 我们先介绍描述该体系的模型 – 推广的单带 Hubbard 模型. 实验中, 我们可利用六束激光形成束缚势:

$$V(r) = \sum_{r=x,y,z} V_r \sin^2(k \cdot r),$$

若将束缚势调制为 $V_z \gg V_x = V_y$, 则自旋 3/2 冷原子被束缚在二维 x - y 平面上的正方晶格中. 描述光晶格中的自旋 3/2 相互作用费米子体系的哈密顿量为推广的单带 Hubbard 模型, 写作

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle} (\psi_i^\dagger \psi_j + \text{H.c.}) + \frac{c_0}{2} \sum_i (N_i - 2)^2 + \frac{c_2}{2} \sum_i S_i^2 - \mu \sum_i N_i, \quad (8)$$

其中四分量的自旋 3/2 费米子旋量 ψ 定义为 $\psi_i = (\psi_{i,3/2}, \psi_{i,1/2}, \psi_{i,-1/2}, \psi_{i,-3/2})^T$, 能带半满 (每个格点填充两个费米原子) 时化学势 $\mu = 0$. 其中, i 格点的粒子数算符与自旋算符分别定义为

$$N_i = \sum_{\alpha} \psi_{i\alpha}^\dagger \psi_{i\alpha}, S_i = \sum_{\alpha\beta} \psi_{i\alpha}^\dagger S_{\alpha\beta} \psi_{i\beta}, \quad (9)$$

这里的 S 是自旋 3/2 对应的 4×4 矩阵.

我们可以看到推广的 Hubbard 模型 (8) 式与通常 Hubbard 模型 (5) 式的区别: 对于自旋 1/2 费米子, 由于 S_i^2 可以表示为粒子数算符的形式, 所以保持自旋旋转不变且独立的相互作用项只有一种可能. 而对于自旋 3/2 费米子, S_i^2 和 $(N_i - 2)^2$ 相互独立, 则推广的 Hubbard 模型中既包含密度密度型的在位排斥相

互作用, 也包含自旋依赖的相互作用, 这是推广的自旋 3/2 费米子 Hubbard 模型的一个特点.

由于自旋 3/2 费米原子具有四个分量, 仅仅用粒子数算符与自旋算符无法描述全部的自由度, 我们还需要考虑自旋矩阵的乘积. 其中, 自旋四极矩矩阵定义为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} (S^x S^y + S^y S^x) &= \Gamma^1, & \frac{1}{\sqrt{3}} (S^z S^x + S^x S^z) &= \Gamma^2, \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (S^z S^y + S^y S^z) &= \Gamma^3, & (S^z)^2 - \frac{5}{4} &= \Gamma^4, \\ \frac{1}{\sqrt{3}} [(S^x)^2 - (S^y)^2] &= \Gamma^5, \end{aligned}$$

这 5 个 Γ 矩阵分别对应于

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma^{2,3,4} &= \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \\ \Gamma^5 &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

它们满足所谓的 Clifford 代数 $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\delta_{ab}$, I 是 2×2 的单位矩阵, σ 是 Pauli 矩阵. 利用这些 Γ 矩阵, 我们还可以构造出 $SO(5)$ 生成元矩阵 $\Gamma^{ab} = -\frac{i}{2} [\Gamma^a, \Gamma^b]$, 通过 Γ^{ab} 的线性组合, 我们可以得到自旋 3/2 矩阵:

$$\begin{aligned} S^x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Gamma^{34} + \frac{1}{2} (\Gamma^{12} + \Gamma^{35}), \\ S^y &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \Gamma^{24} - \frac{1}{2} (\Gamma^{13} - \Gamma^{25}), \\ S^z &= -\Gamma^{15} + \frac{1}{2} \Gamma^{23}, \end{aligned}$$

它们构成了自旋角动量的 $SU(2)$ 李代数 $[S^\alpha, S^\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma$. 此外, 七个自旋八极矩矩阵可以写作:

$$\begin{aligned} (S^x)^3 &= \frac{7\sqrt{3}}{8} \Gamma^{34} + \frac{7}{8} \Gamma^{35} + \frac{13}{8} \Gamma^{12}, \\ (S^y)^3 &= -\frac{7\sqrt{3}}{8} \Gamma^{24} + \frac{7}{8} \Gamma^{25} - \frac{13}{8} \Gamma^{13}, \\ (S^z)^3 &= \frac{13}{8} \Gamma^{23} - \frac{7}{4} \Gamma^{15}, \\ \{S^x, (S^y)^2 - (S^z)^2\} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \Gamma^{34} + \frac{3}{2} \Gamma^{35}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{S^y, (S^z)^2 - (S^x)^2\} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\Gamma^{24} - \frac{3}{2}\Gamma^{25}, \\ \{S^z, (S^x)^2 - (S^y)^2\} &= \sqrt{3}\Gamma^{14}, \\ S^x S^y S^z + S^z S^y S^x &= \frac{\sqrt{3}}{2}\Gamma^{45},\end{aligned}$$

利用这些 Γ 矩阵, 自旋四极矩算符和自旋偶极 - 八极矩算符可以用费米算符的二次型来定义

$$n_i^a = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \psi_{i\alpha}^\dagger \Gamma_{\alpha\beta}^a \psi_{i\beta} \quad (1 \leq a \leq 5), \quad (11)$$

$$L_i^{ab} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \psi_{i\alpha}^\dagger \Gamma_{\alpha\beta}^{ab} \psi_{i\beta} \quad (1 \leq a < b \leq 5), \quad (12)$$

其中 10 个 L_i^{ab} 算符满足 $SO(5)$ 代数的对易关系:

$$[L_i^{ab}, L_j^{cd}] = i\delta_{ij}(\delta_{ad}L_i^{bc} + \delta_{bc}L_i^{ad} - \delta_{ac}L_i^{bd} - \delta_{bd}L_i^{ac}), \quad (13)$$

根据物理量由对称性来分类的基本原则, 5 个 n_i^a 对应于 $SO(5)$ “超自旋”矢量, 它们与 10 个 L_i^{ab} 共同构成 15 个生成元的 $SU(4)$ 李代数, 这也是四分量的自旋 3/2 费米子在粒子空穴通道中可以具备的最高的对称群。

必须强调的是, 在经典电动力学的多极展开中, 高阶的多极矩相互作用一般远小于偶极相互作用。但在我们的问题中, 由于自旋偶极矩、四极矩和八极矩算符都是写成费米子二次型的形式, 不同仅在于插入不同的矩阵, 因而它们是同阶的。

3.2 隐藏的 $SO(5)$ 对称性

推广的单带 Hubbard 模型 (8) 式不仅具有 $SU(2)$ 自旋旋转不变性, 它还隐藏着更高的 $SO(5)$ 对称性^[14]。利用前面构造的 $SO(5)$ 算符, 我们可将这个模型改写为

$$\begin{aligned}H &= -t \sum_{\langle ij \rangle, \alpha} (\psi_{i\alpha}^\dagger \psi_{j\alpha} + \text{H.c.}) - \frac{3c_2}{4} \sum_{i, 1 \leq a \leq 5} (n_i^a)^2 \\ &\quad + \frac{8c_0 - 15c_2}{16} \sum_i (N_i - 2)^2 - \mu \sum_i N_i,\end{aligned} \quad (14)$$

或者

$$\begin{aligned}H &= -t \sum_{\langle ij \rangle, \alpha} (\psi_{i\alpha}^\dagger \psi_{j\alpha} + \text{H.c.}) + \frac{3c_2}{4} \sum_{i, 1 \leq a < b \leq 5} (L_i^{ab})^2 \\ &\quad + \frac{c_0}{2} \sum_i (N_i - 2)^2 - \mu \sum_i N_i,\end{aligned} \quad (15)$$

这两种形式分别利用 $SO(5)$ 矢量和 $SO(5)$ 生成元来表示推广的 Hubbard 模型, 使得隐藏的 $SO(5)$ 对称性显现出来。

为了理解 $SO(5)$ 对称性, 一个好的办法是观察能级的简并度。我们考虑自旋 3/2 的推广单带 Hubbard 模型在 $t = 0$ 的极限情形, 此时只需分析单格点哈密顿量:

$$H_0 = \frac{c_0}{2} N(N-1) + \frac{c_2}{2} \left(S^2 - \frac{15}{4} N \right), \quad (16)$$

用粒子数 n , 总自旋 S 和自旋 z 分量 m 来标记的体系本征能量为

$$E_0 = \frac{c_0}{2} n(n-1) + \frac{c_2}{2} \left(S(S+1) - \frac{15}{4} n \right), \quad (17)$$

单格点 Hilbert 空间中的所有本征态与能量均列在表 1 中。

表 1 单格点本征态与本征值

Table 1 Eigen functions and eigen values for s single site

粒子数 n	总自旋 S	能量 E_0
0	0	0
1	3/2	0
2	0	$c_0 - \frac{15}{4}c_2$
2	2	$c_0 - \frac{3}{4}c_2$
3	3/2	$3c_0 - \frac{15}{4}c_2$
4	0	$6c_0 - \frac{15}{2}c_2$

对于单格点的 Hilbert 空间, 空态、格点单态和完全填满的态构成 $SO(5)$ 单态 (无简并), 一个粒子的态与三个粒子的态构成 $SO(5)$ 旋量 (四重简并), 格点五重态构成 $SO(5)$ 矢量 (五重简并)。可以看出, 费米子所满足的 Pauli 不相容原理对 Hilbert 空间起到了强烈的限制, 从而对能级简并和隐藏的 $SO(5)$ 对称性起到了关键的作用。

在以下的部分中, 我们把注意力集中在每个格点两个粒子的 Mott 绝缘态上。从表 1 可以清楚地看到, 在 $t = 0$ 的极限下, 单格点的基态有两种可能性: 当 $c_2 > 0$ 时两个原子构成自旋单态 ($S_i = 0$), 而 $c_2 < 0$ 时为自旋五重态 ($S_i = 2$), 在 $c_2 = 0$ 时体系六重简并。由于目前还没有自旋 3/2 冷原子的散射长度的实验报道, 我们考虑 $c_0 \gg |c_2|$ 且 $c_0 \gg t$ 的参数范围, 此时

自旋相关的相互作用要远弱于密度密度型的相互作用, 这样的参数范围使得双占据 Mott 绝缘态的稳定性得以保证, 而且也符合目前碱金属原子实验的参数情况.

3.3 自旋四极矩有序态

首先, 我们考虑 $c_2 > 0$ 的情形, 此时将推广的 Hubbard 模型写成 (14) 式. 在 Mott 极限下, 粒子数涨落可忽略, 此时自旋四极矩密度的涨落占主导地位, 这种涨落将导致费米面的不稳定性, 自旋四极矩有序态的产生 [16]. 不失一般性, 序参量可选作 $(-1)^i \langle n_i^4 \rangle \neq 0$, 其中

$$2n_i^4 = \psi_{i,\frac{3}{2}}^\dagger \psi_{i,\frac{3}{2}} + \psi_{i,-\frac{3}{2}}^\dagger \psi_{i,-\frac{3}{2}} - \psi_{i,\frac{1}{2}}^\dagger \psi_{i,\frac{1}{2}} - \psi_{i,-\frac{1}{2}}^\dagger \psi_{i,-\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

这样的序参量对应的经典构形如图 4 所示. 我们知道 $c_2 > 0$ 对应于格点单态, 则序参量 n_i^4 的含义是 $S^z = \pm 3/2$ (长的蓝箭头) 与 $S^z = \pm 1/2$ 自旋密度的差 (短的红箭头). 这种所谓的自旋液晶态破坏了自旋的 $SU(2)$ 不变性, 但保持了时间反演不变性. 值得一提的是, 由于自旋对称性已经被破坏, 这种自旋四极矩有序态并不能被称作自旋液体态.

这样的基态构形, 使得体系的对称性由 $SO(5)$ 破缺到 $SO(4)$, Goldstone 流形为

$$SO(5)/SO(4) = S^4,$$

从而体系的低能激发为 4 支 Goldstone 玻色子. 对通常的自旋 1/2 半满的单带 Hubbard 模型, 反铁磁基态的对称性破缺对应的 Goldstone 流形为

$$SO(3)/SO(2) = S^2,$$

剩余的 $SO(2)$ 对称性并不禁止横向的涨落模式耦合, 正是这种模式耦合在大 U 极限下抑制了波速, 使它的行为趋近于 $v_{\text{SDW}} \sim t^2/U$ 的行为. 由于剩余的 $SO(4)$ 对称性对体系的低能有效理论有很强的限制, 在高斯涨落的层次上, Goldstone 玻色子之间不能相互耦合, 这使得自旋四极矩密度波的波速呈饱和趋势, 在 c_2 较大时呈 $v_Q \sim t$ 行为.

关于自旋四极矩有序态的另一个有意思的问题是, 关于非阿贝尔的 Berry 相位 [22~24]. 数学上讲, 由于

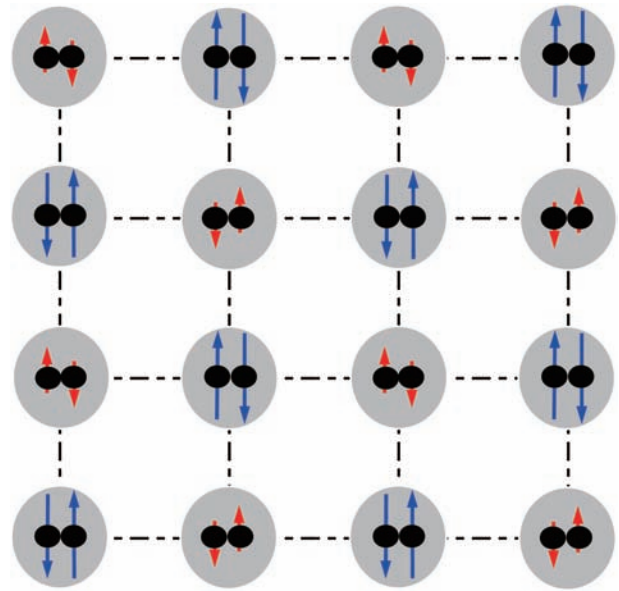


图 4 二维正方光晶格上自旋四极矩有序相的经典图像, 对应序参量为 $(-1)^i \langle n_i^4 \rangle \neq 0$

其中每个格点两个原子都构成自旋单态, 蓝色长箭头和红色短箭头分别代表费米子磁量子数为 $S^z = \pm \frac{3}{2}$ 和 $S^z = \pm \frac{1}{2}$

Figure 4 The classical picture of the spin quadrupole ordering state on two-dimensional square optical lattice, where the two atoms form a spin singlet on each lattice site.

四分量的 $SO(5)$ 旋量构成一个 S^7 球, 若在 Goldstone 流形 S^4 上绝热地旋转自旋四极矩有序态的破缺方向, 则费米型准粒子将获得所谓的非阿贝尔 Berry 相. 这个原因是 $S^7 \rightarrow S^4$ 的映射定义了第二类 Hopf 映射, 并存在对应的 $SU(2)$ 纤维丛和规范结构, 物理上对应为非阿贝尔 Berry 相. 由于费米型准粒子是二重简并态, 则绝热旋转对称性破缺的方向, 再回到原来的破缺方向时, 得到的末态与初始态由一个 2×2 的 $SU(2)$ 幺正矩阵相联系. 因此, 四极矩有序态由 $SU(2)$ 非阿贝尔 Berry 相和第二类 Chern 数所刻画, 这是自旋四极矩有序态相关的新物理.

3.4 自旋偶极 - 八极矩有序态

在这一节中, 我们考虑 $c_2 < 0$ 的情形. 利用 $SO(5)$ 李代数, 我们可将推广的 Hubbard 模型写成 (15) 式, 此时自旋偶极 - 八极矩的涨落将占主导地位, 使得体系形成自旋偶极 - 八极矩共存有序态 [17].

不失一般性, 偶极 - 八极矩有序态的序参量可选作 $(-1)^i \langle L_i^{15} \rangle \neq 0$ 或者 $(-1)^i \langle L_i^{23} \rangle \neq 0$, 它们分别是

$$2L_i^{15} = \psi_{i, \frac{3}{2}}^\dagger \psi_{i, \frac{3}{2}} + \psi_{i, \frac{1}{2}}^\dagger \psi_{i, \frac{1}{2}} - \psi_{i, -\frac{1}{2}}^\dagger \psi_{i, -\frac{1}{2}} - \psi_{i, -\frac{3}{2}}^\dagger \psi_{i, -\frac{3}{2}}, \quad (19)$$

$$2L_i^{23} = \psi_{i, \frac{1}{2}}^\dagger \psi_{i, \frac{1}{2}} + \psi_{i, -\frac{3}{2}}^\dagger \psi_{i, -\frac{3}{2}} - \psi_{i, \frac{3}{2}}^\dagger \psi_{i, \frac{3}{2}} - \psi_{i, -\frac{1}{2}}^\dagger \psi_{i, -\frac{1}{2}}, \quad (20)$$

这样的序参量对应的经典构形如图 5 所示. 与自旋

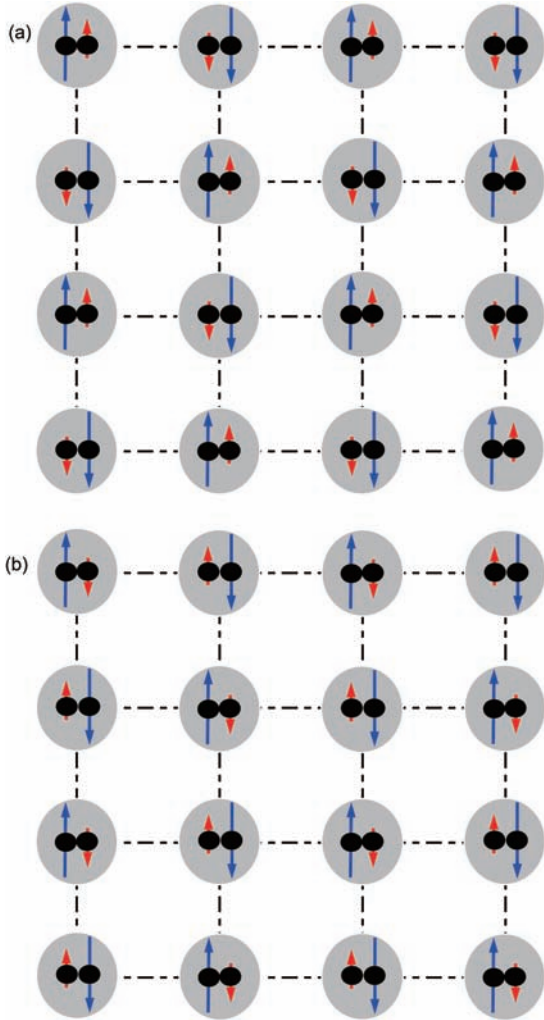


图 5 二维正方光晶格上自旋偶极 - 八极矩有序相的经典图像, 对应序参量为 (a) $(-1)^i \langle L_i^{15} \rangle \neq 0$, (b) $(-1)^i \langle L_i^{23} \rangle \neq 0$

其中每个格点上两个原子都构成自旋五重态

Figure 5 The classical physical picture of the spin dipole/octupole ordering state on a two dimensional square optical lattice, where the two atoms form a spin quintuplet on each lattice site.

四极矩有序态不同的是, 这样的态不但破缺了自旋旋转不变性, 而且破缺了时间反演对称性.

不失一般性, 我们以序参量 $(-1)^i \langle L_i^{15} \rangle \neq 0$ 的态为例进行分析. 此时, 不破缺的 $SO(5)$ 生成元为 L_i^{15} , L_i^{23} , L_i^{24} 和 L_i^{34} , 其中后三个构成了 $SU(2)$ 子代数. 因而, 这种情况下对称性破缺的 Goldstone 流形为 $SO(5)/[SU(2) \times U(1)] = CP^3$. 根据 Goldstone 定理, 体系的低能激发为 6 支 Goldstone 玻色子. 为研究这些 Goldstone 模式的行为, 我们可以在鞍点解基础之上考虑高斯涨落的办法得到自旋偶极 - 八极矩密度波的有效作用量, 并求出它们的色散关系. 此时, 对称性破缺的剩余对称性 $SU(2) \times U(1)$ 并不禁止 Goldstone 涨落模式之间的耦合. 自旋四极矩密度波和自旋偶极 - 八极矩密度波的波速比较如图 6 所示. 在小 c_2 极限下, 由于模式耦合并不重要, 自旋偶极 - 八极矩密度波的波速与自旋四极矩密度波行为接近. 而在大 c_2 极限下, 正是由于模式耦合起主导地位, 使得自旋偶极 - 八极矩密度波的波速与自旋四极矩密度波完全不同, 它将呈现出类似于 Hubbard 模型中反铁磁自旋密度波的 $v \sim t^2/U$ 行为.

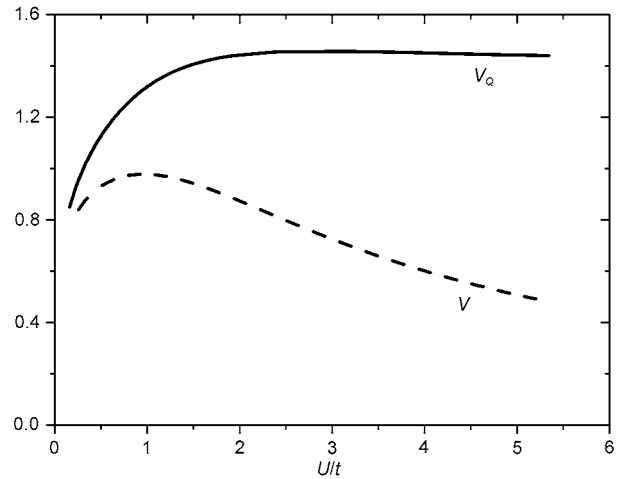


图 6 自旋偶极 - 八极矩密度波速度 v (点线) 与自旋四极矩密度波速度 v_Q (实线)

Figure 6 The velocity of the dipole/octupole density wave compared with the velocity of the quadrupole density wave.

自旋偶极 - 八极矩有序态的拓扑属性同样有趣. 四分量的 $SO(5)$ 旋量仍然构成 S^7 球, 但不同于自旋

四极矩有序情形的 Goldstone 流形, 数学上 S^7 球可以认为是 CP^3 空间的 $U(1)$ 纤维丛, 即定义了一个阿贝尔的 Berry 相位 [25]. 若在 Goldstone 流形 CP^3 上绝热地旋转自旋偶极 - 八极矩有序态的破缺方向, 则费米型准粒子将获得一个 $U(1)$ 的相位, 此时两重简并的费米型准粒子间将不会如同非阿贝尔 Berry 相位中出现线性组合的情况. 在拓扑上, 这种自旋偶极 - 八极矩有序态由 $U(1)$ 阿贝尔 Berry 相和第一类 Chern 数所刻画, 这是与自旋四极矩有序态的一个重要区别.

3.5 自旋液体态

在前面的讨论中, 我们主要集中在两种有序的 Mott 绝缘态. 一旦靠近 $c_2 = 0$ 这个特别的 $SU(4)$ 高对称点, 两种有序态的能量很接近, 量子涨落将非常强. 这两种有序态具有完全不同的对称性、低能激发以及拓扑性质, 因而在它们之间发生连续相变的可能性几乎不存在. 那么, 一种非常奇特的代数自旋液体态有可能作为量子临界态在 $SU(4)$ 高对称点附近出现 [17].

我们首先考虑 $SU(4)$ 点的情形, 此时 $c_2 = 0$, 推广的单带 Hubbard 模型约化为 $SU(4)$ Hubbard 模型:

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle, \alpha} (\psi_{i\alpha}^\dagger \psi_{j\alpha} + \text{H.c.}) + \frac{c_0}{2} \sum_i (N_i - 2)^2, \quad (21)$$

在强耦合极限下, $c_0 \gg t$. 利用二阶微扰论, 我们可以得到超交换形式的低能有效模型

$$H_{\text{eff}} = J \sum_{\langle ij \rangle} \left[\sum_{1 \leq a < b \leq 5} L_i^{ab} L_j^{ab} + \sum_{1 \leq a \leq 5} n_i^a n_j^a \right], \quad (22)$$

其中耦合常数 $J \sim t^2/c_0$. 如果采用四分量的费米型自旋子 (Spinon) 表示, 则算符 n_i^a 和 L_i^{ab} 可以被表示为

$$n_i^a = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} f_{i\alpha}^\dagger \Gamma_{\alpha\beta}^a f_{i\beta}, \quad (1 \leq a \leq 5),$$

$$L_i^{ab} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} f_{i\alpha}^\dagger \Gamma_{\alpha\beta}^{ab} f_{i\beta}, \quad (1 \leq a < b \leq 5),$$

同时单个格点上的粒子数约束条件为 $\sum_\alpha f_{i\alpha}^\dagger f_{i\alpha} = 2$. 利用这些条件, 有效模型 (22) 式可以写成

$$H_{\text{eff}} = -J \sum_{\langle ij \rangle, \alpha\beta} f_{i\alpha}^\dagger f_{j\alpha} f_{j\beta}^\dagger f_{i\beta}, \quad (23)$$

这正是 $SU(4)$ 反铁磁海森堡模型. 为了寻找一个合适的低能有效理论, 我们将对应的配分函数写成一个泛函积分的形式:

$$Z = \int \mathcal{D}f^\dagger \mathcal{D}f \mathcal{D}\lambda \exp \left[- \int_0^\beta L_{\text{eff}}(\tau) d\tau \right], \quad (24)$$

其中有效拉式量为

$$L_{\text{eff}} = \sum_{i,\alpha} f_{i\alpha}^\dagger \partial_\tau f_{i\alpha} + H_{\text{eff}} + \sum_i \lambda_i \left(\sum_\alpha f_{i\alpha}^\dagger f_{i\alpha} - 2 \right), \quad (25)$$

为保证粒子数的约束条件, 我们引入了一个拉格朗日乘子场 λ_i . 再利用 Hubbard-Stratonovich 变换, 我们可以通过引入价键辅助场解耦合四费米相互作用:

$$\exp \left[\int_0^\beta d\tau \sum_{\langle ij \rangle, \alpha\beta} f_{i\alpha}^\dagger f_{j\alpha} f_{j\beta}^\dagger f_{i\beta} \right]$$

$$= \int \mathcal{D}\chi e^{\int_0^\beta d\tau [\sum_{\langle ij \rangle, \alpha} (f_{i\alpha}^\dagger f_{j\alpha} \chi_{ji} + \text{H.C.}) - \sum_{\langle ij \rangle} |\chi_{ij}|^2]}, \quad (26)$$

其中 $\chi_{ij} = \chi_{ji}^* = |\chi_{ij}| e^{-ia_{ij}}$, a_{ij} 是一个相位场. 如果进行 $U(1)$ 规范变换 $a_{ij} \rightarrow a_{ij} + \theta_i - \theta_j$, $f_i \rightarrow f_i e^{i\theta_i}$, 我们会发现有效作用量是不变的, 因而体系的低能有效理论一定是 $U(1)$ 规范理论. 在规范固定时, 不妨取 χ_{ij} 为实场, 则鞍点近似下我们得到如下 π 通量态 [26,27]:

$$\chi_{i,i+x} = -\chi(-1)^{i_y}, \quad \chi_{i,i+y} = \chi, \quad (27)$$

尽管上述平均场假定破坏了格点的平移对称性, 但如果将上述平均场基态投影到每个格点两个自旋子的物理 Hilbert 空间中, 平移对称性仍得以保持. 采用鞍点近似后, 我们可以得到自旋子激发谱为 $\epsilon_k^\pm = \pm 2J\chi \sqrt{\cos^2 k_x + \cos^2 k_y}$, 它在 $k_x = \pm \frac{\pi}{2}$ 和 $k_y = \pm \frac{\pi}{2}$ 处有四个能隙消失的节点. 另外, 体系的基态能量由填充负能量的自旋子能带得到

$$\epsilon_{\pi F} = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dk_y}{2\pi} \epsilon_k^- + 2J\chi^2, \quad (28)$$

通过自洽计算, 我们发现能量的极小值在 $\chi = 0.958091$ 时取得.

事实上, $SU(4)$ π 通量态的低能有效理论是无质量的 $U(1)$ 规范场最小耦合 Dirac 费米子的 2+1 维量子电动力学. 它与 $SU(2)$ π 通量态有很大不同, 后者的低能有效理论隐藏了更高对称性的 $SU(2)$ 规范结

构. 但 $SU(4)$ π 通量态与 $SU(2)$ 交错通量态 (staggered flux) 非常相似. 最近 Hermele 等人 [28] 宣称, $2N$ 分量的 Dirac 费米子耦合紧致的 $U(1)$ 规范场的理论, 在 N 足够大时费米子是解紧闭的. 不久之后, Assaad 也采用量子蒙特卡罗模拟了二维正方晶格上的 $SU(N)$ 反铁磁海森堡模型, 他发现 $N=4$ 时哈密顿量 (23) 式的基态很可能是 π 通量态, 同时自旋关联函数呈幂律衰减, 晶格平移对称性和自旋旋转不变性都不破缺 [29]. 因而, 二维光晶格中的自旋 3/2 相互作用费米子系统, 也许是观测这种新奇量子态的最佳实验平台. 对于 π 通量态, 自旋四极矩关联的等时关联函数与自旋偶极 - 八极矩算符的等时关联函数相等, 并且都呈现幂律衰减的趋势:

$$(-1)^{(i_x+i_y)} \langle n_i^a n_0^a \rangle = (-1)^{(i_x+i_y)} \langle L_i^{ab} L_0^{ab} \rangle \sim \frac{1}{|r_i|^\eta}. \quad (29)$$

在冷原子体系中, 这类关联函数原则上可以通过空间噪声谱实验测得 [30,31]. 在平均场框架下, 上述关联函数衰减的形式为 $1/|r|^\eta$, 原因是低能极限下自旋子等效为相对论性的 Dirac 费米子. 然而, 正如量子蒙特卡罗模拟 [29] 中展示的 $1/|r|^{1.12}$ 衰减行为一样, 规范涨落将增强代数关联, 这也与大 N 展开的解析计算 [32,33] 定性一致.

根据 Landau 的连续相变理论, 两种具有不相容对称性的量子态之间不可能发生连续相变 [34,35]. 在前面的讨论中, 我们也展示了作为量子临界态出现的 π 通量态分开了两种有序态, 当然, 我们不能排除 π 通量态实际上控制了参数空间中一个区域的可能性, 这是因为我们对推广的 Hubbard 模型采用的鞍点近似方法忽略了粒子数的涨落, 而粒子数的涨落可能在有限大小的 c_2 区域里破坏自旋有序态的存在, 使得代数自旋液体更稳定.

为了阐述这一问题, 我们可以从强耦合极限的有效哈密顿量 [36] 出发:

$$H_{\text{eff}} = J_1 \sum_{\langle ij \rangle, a < b} L_i^{ab} L_j^{ab} + J_2 \sum_{\langle ij \rangle, a} n_i^a n_j^a + J_3 \sum_{i, a < b} (L_i^{ab})^2, \quad (30)$$

其中 $J_3 \propto c_2$. 在 $SU(4)$ 点处, $J_3 = 0$ 并且 $J_1 = J_2 = 4t^2/c_0$, 则有效模型约化为前面讨论的 $SU(4)$ 反铁磁海森堡模型. 在自旋四极矩有序相中, 我们有 $J_2 \gg J_1 > 0$ 和 $J_3 > 0$, 则模型的第一项可以被忽略, 体系的有效模型是一个 $SO(5)$ 转子模型. 而在自旋偶极 - 八极矩有序相中, 我们有 $J_1 \gg J_2 > 0$ 和 $J_3 < 0$, 则模型的后两项可以被忽略, 体系的有效模型是一个 $SO(5)$ 反铁磁海森堡模型. 因此, 上述有效模型正确描述了体系的低能物理, 它计及了强耦合极限下粒子数涨落, 有序态的产生可以认为是代数自旋液体态的不稳定性造成的. 基于这一思想, 我们利用平均场近似, 得到了整个体系的基态相图, 如图 7 所示.

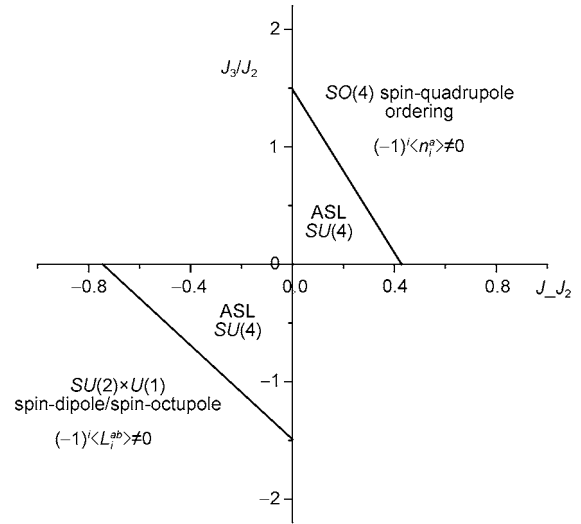


图 7 强耦合极限下有效模型的平均场相图

其中 ASL 表示代数自旋液体, 并且 $J_- = J_2 - J_1$

Figure 7 The mean field phase diagram of the effective model Hamiltonian in the strong coupling limit.

4 总结

我们研究了两维正方光晶格中自旋 3/2 费米冷原子的 Mott 绝缘态, 其中既包括两个非传统的对称性破缺态 - 自旋四极矩有序态和自旋偶极 - 八极矩有序态, 也包括不破缺任何对称性的自旋液体态. 其中自旋四极矩有序态是一种不破缺时间反演对称性的非磁性态, 类似于经典系统中的液晶, 由于连续对称性破缺的方式是 $SO(5)/SO(4) = S^4$, 在这个相中存在 4 个自旋四极矩密度波形式的 Goldstone 玻色子激发. 在自旋偶极 - 八极矩有序态中, 时间反演对称性被破缺, 连续对称性破缺的方式是

$SO(5)/[SU(2) \times U(1)] = CP^3$, 因此在该相中存在 6 个自旋偶极 - 八极矩密度波形式的 Goldstone 玻色子激发. 由于这两个相具有截然不同的对称性, 它们之间几乎不可能存在直接的二级相变, 在这两个相之间的 $SU(4)$ 高对称点附近存在很强的量子涨落, 我们发现在临界区域可能出现 $SU(4)$ 代数自旋液体相, 此时

体系的低能激发为 $U(1)$ 规范玻色子和自旋 3/2 的自旋子, 并且自旋四极矩算符和自旋偶极 - 八极矩算符的两点关联函数呈幂律衰减. 从实验的角度, 我们还预言了这些 Mott 绝缘态中非传统的序可能被噪声谱实验观测到, 因此这些量子态的物性还值得进一步的研究.

致谢 作者衷心感谢于涿院士的有益合作.

参考文献

- 1 Bethe H. Zur theorie der metalle I, Eigenwerte und eigenfunktionen der linearen atomkette. *Z Phys*, 1931, 71: 205–226
- 2 Anderson P W. Limits on the energy of the antiferromagnetic ground state. *Phys Rev*, 1951, 83: 1260
- 3 Kubo R. The spin-wave theory of antiferromagnetics. *Phys Rev*, 1952, 87: 568–580
- 4 Greiner M, Mandel O, Esslinger T, et al. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 2002, 415: 39–44
- 5 Bloch I, Dalibard J, Zwerger W. Many-body physics with ultracold gases. *Rev Mod Phys*, 2008, 80: 885–964
- 6 Jaksch D, Bruder C, Cirac J I, et al. Cold bosonic atoms in optical lattices. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 3108–3111
- 7 Gerbier F, Foelling S, Widera A, et al. Probing number squeezing of ultracold atoms across the superfluid-Mott insulator transition. *Phys Rev Lett*, 2006, 96: 090401
- 8 Fisher M P A, Weichman P B, Grinstein G, et al. Boson localization and the superfluid-insulator transition. *Phys Rev B*, 1989, 40: 546–570
- 9 Imambekov A, Lukin M, Demler E. Spin-exchange interactions of spin-one bosons in optical lattices: Singlet, nematic, and dimerized phases. *Phys Rev A*, 2003, 68: 063602
- 10 Snoek M, Zhou F. Microscopic wave functions of spin-singlet and nematic Mott states of spin-one bosons in high-dimensional bipartite lattices. *Phys Rev B*, 2004, 69: 094410
- 11 García-Ripoll J J, Martín-Delgado M A, Cirac J I. Implementation of spin Hamiltonians in optical lattices. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 250405
- 12 Tsuchiya S, Kurihara S, Kimura T. Superfluid-Mott insulator transition of spin-1 bosons in an optical lattice. *Phys Rev A*, 2004, 70: 043628
- 13 Takeshi F, Yosuke T, Mitsutaka K, et al. Degenerate Fermi gases of Ytterbium. *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 030401
- 14 Wu C, Hu J P, Zhang S C. Exact $SO(5)$ symmetry in the spin-3/2 fermionic system. *Phys Rev Lett*, 2003, 91: 186402
- 15 Wu C, Zhang S C. Sufficient condition for absence of the sign problem in the fermionic quantum Monte Carlo algorithm. *Phys Rev B*, 2005, 71: 155115
- 16 Tu H H, Zhang G M, Yu L. Spin-quadrupole ordering of spin-3/2 ultracold fermionic atoms in optical lattices in the one-band Hubbard model. *Phys Rev B*, 2006, 74: 174404
- 17 Tu H H, Zhang G M, Yu L. Mott insulating phases and quantum phase transitions of interacting spin-3/2 fermionic cold atoms in optical lattices at half filling. *Phys Rev B*, 2007, 76: 014438
- 18 Chern C H, Chen H D, Wu C, et al. Non-abelian Berry phase and Chern numbers in higher spin-pairing condensates. *Phys Rev B*, 2004, 69: 214512
- 19 Wu C. Competing orders in one-dimensional spin-3/2 fermionic systems. *Phys Rev Lett*, 2005, 95: 266404
- 20 Lecheminant P, Boulat E, Azaria P. Confinement and superfluidity in one-dimensional degenerate fermionic cold atoms. *Phys Rev Lett*, 2005, 95: 240402
- 21 Capponi S, Roux G, Azaria P, et al. Confinement versus deconfinement of Cooper pairs in one-dimensional spin-3/2 fermionic cold atoms. *Phys Rev B*, 2007, 75: 100503
- 22 Wilczek F, Zee A. Appearance of gauge structure in simple dynamical systems. *Phys Rev Lett*, 1984, 52: 2111–2114
- 23 Zee A. Non-Abelian gauge structure in nuclear quadrupole resonance. *Phys Rev A*, 1988, 38: 1–6
- 24 Demler E, Zhang S C. Non-abelian holonomy of BCS and SDW quasiparticles. *Ann Phys*, 1999, 271: 83–119
- 25 Berry M V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc R Soc London Ser A*, 1984, 392: 45–57
- 26 Affleck I, Marston J B. Large- n limit of the Heisenberg-Hubbard model: Implications for high- T_c superconductors. *Phys Rev B*, 1988, 37: 3774–3777
- 27 Marston J B, Affleck I. Large- n limit of the Hubbard-Heisenberg model. *Phys Rev B*, 1989, 39: 11538–11558

- 28 Hermele M, Senthil T, Fisher M P A, et al. Stability of $U(1)$ spin liquids in two dimensions. *Phys Rev B*, 2004, 70: 214437
- 29 Assaad F F. Phase diagram of the half-filled two-dimensional $SU(N)$ Hubbard-Heisenberg model: A quantum Monte Carlo study. *Phys Rev B*, 2005, 71: 075103
- 30 Altman E, Demler E, Lukin M D. Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations. *Phys Rev A*, 2004, 70: 013603
- 31 Fölling S, Gerbier F, Widera A, et al. Spatial quantum noise interferometry in expanding ultracold atom clouds. *Nature*, 2005, 434: 481–484
- 32 Rantner W, Wen X G. Electron spectral function and algebraic spin liquid for the normal state of underdoped high T_c superconductors. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 3871–3874
- 33 Rantner W, Wen X G. Spin correlations in the algebraic spin liquid: Implications for high- T_c superconductors. *Phys Rev B*, 2002, 66: 144501
- 34 Senthil T, Vishwanath A, Balents L, et al. Deconfined quantum critical points. *Science*, 2004, 303: 1490–1494
- 35 Senthil T, Balents L, Sachdev S, et al. Quantum criticality beyond the Landau-Ginzburg-Wilson paradigm. *Phys Rev B*, 2004, 70: 144407
- 36 Wu C. Hidden symmetry and quantum phases in spin-3/2 cold atomic systems. *Mod Phys Lett B*, 2006, 20: 1707–1738

Mott insulating states and their quantum phase transitions of interacting spin-3/2 ultracold fermionic atoms on optical lattices

ZHANG GuangMing* & TU HongHao

Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China

We first introduce the ultracold atoms and the optical lattices. Then, we analyze various Mott insulating phases of interacting spin-3/2 fermionic ultracold atoms in two-dimensional square optical lattices. Using a generalized Hubbard model, we identify two distinct symmetry breaking phases: the spin-quadrupole ordering phase and the spin-dipole-spin-octupole ordering phase. Near the $SU(4)$ symmetric point, we find that an algebraic spin liquid phase may emerge due to strong quantum fluctuations. Finally, the possible quantum phase transitions between these exotic phases are also discussed.

ultracold atoms, Mott insulating states, collective excitations, quantum phase transitions

PACS: 71.10.Fd, 02.70.Ss

doi: 10.1360/132011-61