三维标架场可控去旋方法

方贤忠¹, 金耀², 黄劲¹, 鲍虎军^{1*}

1. 浙江大学计算机辅助设计与图形学国家重点实验室, 杭州 310058

2. 浙江理工大学信息学院图形与数据智能研究所, 杭州 310018

* 通信作者. E-mail: bao@cad.zju.edu.cn

收稿日期: 2019-12-12; 修回日期: 2020-02-12; 接受日期: 2020-04-18; 网络出版日期: 2021-01-25

中国博士后科学基金 (批准号: 2019M662054)、国家自然科学基金 (批准号: 61702458, 61732016) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LY17F020031) 资助项目

摘要 六面体网格因其良好的数值性能成为有限元分析等领域中重要的一种离散化方法, 而基于标架场导引的重网格化是实现可控六面体网格剖分的重要技术. 现有的标架场生成技术由于所获得的标架场往往存在拓扑矛盾, 难以运用于纯六面体网格的生成, 但较易于六面体主导混合网格的生成. 然而, 这种六面体主导网格的质量容易受到标架场旋度的影响. 针对这一问题, 本文提出了一种三维标架场保向且长度可控去旋方法. 该方法通过分析三维向量场的旋度, 构造针对四面体网格的离散旋度能量, 并将其推广至三维标架场的旋度能量. 为保持原标架场方向并控制其长度, 引入了表达三维标架场 3 个子向量场长度伸缩量的标量场, 并将新标架场表示为标量场和原标架场的合成, 最后通过极小化合成场的旋度得到优化后的标架场. 实验结果表明, 通过约束标量场的变化范围, 能在保持其方向不变的情况下, 有效地控制去旋程度; 将该标架场运用于已有重网格化方法, 可得到方向和密度可控的六面体主导的混合网格. 此外, 该方法只需求解一个带约束的二次凸规划问题, 鲁棒性强且易于计算.

关键词 三维标架场, 去旋, 长度可控, 六面体主导网格

1 引言

有限元法是当前求解复杂偏微分方程的主要方法, 在制造产业、娱乐产业和科学研究的各种模拟计算中有着广泛而重要的应用. 有限元方法需要将复杂的问题定义域剖分为简单的几何单元. 其中三维实体模型作为常见的问题定义域, 一般被剖分为四面体或六面体单元. 而六面体单元由于在精度和收敛性方面有着不可替代的优势, 更受到人们的青睐. 然而针对复杂模型的高质量六面体单元剖分往往难度较大, 极具挑战性, 一直是几何建模与仿真计算领域重要的研究热点.

六面体网格单元剖分方法的发展较为迅速. 近些年来, 基于全局参数化法取得了较大成功^[1~3]. 相较于过去常见方法, 如铺面法^[4]、扫掠法^[5]等, 以标架场作为导引的全局参数化法可以自动地获得

引用格式: 方贤忠, 金耀, 黄劲, 等. 三维标架场可控去旋方法. 中国科学: 信息科学, 2021, 51: 263–278, doi: 10.1360/SSI-2019-0277
Fang X Z, Jin Y, Huang J, et al. Controllable curl-correction of 3D frame fields (in Chinese). Sci Sin Inform, 2021, 51: 263–278, doi: 10.1360/SSI-2019-0277

更为合理的拓扑结构以及更好的网格单元质量. 然而, 这类方法存在一个公开问题: 如何保证自动获得的拓扑结构符合拓扑合理性, 从而确保全局参数化求解成功. 在缺少这一关键保证的情况下, 当前的一个研究热门是如何通过局部参数化获得可控的高质量六面体主导的混合网格.

我们注意到纯六面体单元剖分所对应的参数化严格对应于一个可积分的标架场, 即无旋场. 在当前六面体单元主导的混合网格生成的典型算法^[6]中, 混合网格的六面体单元占比紧密关联于标架场的旋度. 因此, 去除标架场旋度是提高六面体单元占比的重要步骤^[6]. 然而, 现有基于局部参数化的去旋方法^[6]往往同时改变标架场的方向和长度, 且去旋后的标架长度变化可能过大, 从而降低了标架场的导引性, 失去对结果的有效控制, 甚至产生尺度极小、极大甚至退化的单元.

针对上述问题, 本文提出一种保持方向且长度变化有界的三维标架场去旋方法, 不仅能有效降低所生成混合网格中四面体单元的数量, 而且增强了网格单元朝向和大小的可控性. 本文的创新点包括:

- 提出了一种基于四面体网格的三维向量场旋度能量的线性度量方式, 该度量方式与向量场的全局缩放无关, 且将其用于了三维标架场离散旋度能量的构造.
- 将去旋向量场线性表示为初始向量场与标量场的合成, 通过标量场能控制向量场长度的伸缩变换, 且将去旋问题归结为全局优化, 构造了高效鲁棒的带界约束的二次凸规划问题进行求解.
- 将该方法应用于立方体对称的三维标架场去旋, 提高了六面体主导的混合网格的质量与可控性, 显著提高了混合网格中六面体单元的体积占比.

2 相关工作

标架场的生成以及标架场导引的重网格化技术一直是计算机图形学领域的研究热点. 以下从标架场生成、基于标架场的重网格化以及标架场去旋等方面概述与本文相关的研究工作.

三维标架场及其导引的重网格化. 由于网格需求的多样化, 重网格方法需要一定的可控性, 即能控制网格单元的排布方向与大小. 而以标架场为导引场的重网格化是一类能够实现可控性的重要方法.

正交标架场作为一种特殊且常用的标架场受到了很大的关注. Huang 等^[7]提出了基于球面调和函数的正交标架场生成方法. 该方法利用球面函数的对称性, 用球面调和表示对称三维正交标架, 并将标架场转化为 9 维向量场, 通过优化狄利克雷 (Dirichlet) 能量得到光滑的正交标架场. Li 等^[2]基于类似的对称表示, 提出了基于边的光滑能量生成正交标架场. Ray 等^[8]的工作进一步改善了 Huang 方法^[7]的边界约束条件. 最近, Gao 等^[9]提出基于全局多层次结构和局部迭代方法直接生成光滑的三维正交标架场. 然而, 这些三维正交标架场的生成方法不能保证所得到的标架场满足可六面体化的条件, 难以直接用于纯六面体网格的生成. 本文通过研究标架场与可参数化的梯度场之间的关系, 构造了一种三维标架场的离散旋度能量, 通过优化该能量, 得到旋度较低的新标架场, 可用于高质量的六面体主导网格的生成.

以基于标架场的纯六面体网格与六面体主导网格生成为代表的重网格化技术同样被广泛研究^[1,3,6,9]. 这些方法的基本思路是基于标架场构建全局或者局部参数化, 并通过抽取参数域的等值线获得最终网格. 但是重网格化技术对用以引导参数化的标架场有着苛刻的要求, 而现有方法由于难以满足可参数化条件而影响生成网格的质量. 对于全局参数化法^[1,2], 如果标架场的拓扑结构不能对应一个合理的参数化, 则可能导致参数化退化, 从而无法获取纯六面体网格. Fang 等^[3]提出了基于三维标架场的闭形式多立方体生成方法, 并应用于纯六面体网格的生成, 但是该方法获得六面体网格的

奇异结构全部位于表面, 网格单元质量受限, 可控性不高. 而基于局部参数化的方法^[6,9], 只能得到六面体单元主导的混合网格. 如果输入标架场的旋度过大, 则将引入更多的非六面体单元, 不利于获得高质量的网格.

标架场去旋. 目前关于标架场去旋的研究工作较少. 典型的方法有泊松重建法与 Hodge 分解法等. 泊松重建法通过求解一个最小二乘系统, 使参数化梯度场尽可能与标架场对齐, 得到的参数化梯度场可以看成去旋后的标架场, 但它可能改变原标架场的方向和长度, 在拓扑结构不合理的情况下将出现退化. Hodge 分解法可转化为泊松重建问题, 因而同样无法控制去旋后标架场的方向和长度以及退化问题. Ray 等^[10]提出的四边形主导网格的生成方法中涉及了二维正交标架场的去旋, 但该方法只考虑了各向同性的去旋优化, 去旋程度有限. Zhang 等^[11]针对四边形化, 提出了一种各向异性的正交标架场去旋方法, 该方法引入一个表示向量场长度的标量场, 通过优化旋度能量得到各向异性的旋度较低的标架场, 扩大了去旋的自由度. Sokolov 等^[6]提出的六面体主导网格的生成方法采用了基于局部参数化的去旋方法, 该方法针对四面体网格中每个三角面片上已有的参数化, 根据可参数化的条件, 并引入参数化的变化量, 进行全局优化得到新的参数化. 但其并非直接优化标架场, 无法控制标架场的对齐方向以及参数化退化的情况. 上述去旋方法, 均未考虑标架场长度的有界控制, 可能得到大小变化非常剧烈的结果, 不利于重网格化. Diamanti 等^[12]提出了基于多项式表示的二维标架场去旋方法, 但其优化方程的非线性程度很高, 求解困难, 且需要改变原有的标架场方向. 本文提出的去旋方法, 对于给定的任意的三维标架场, 在保持原输入标架场方向的情况下, 只需求解一个界约束的二次规划问题, 可以有效控制去除旋度的程度, 将其应用于重网格化中, 可以更加灵活地控制网格单元的方向和大小.

3 标架场指引的重网格化

在介绍四面体内部旋度大小度量方法以及如何减少标架场旋度之前, 本节将简要描述基于标架场指引的重网格化方法, 以及该方向场的对称性和离散化方法.

基于参数化的重网格化方法需要借助标架场作为导引场, 使参数化梯度场与标架场尽可能对齐. 因而, 由该方法生成的网格与标架场直接相关, 且标架场反映了网格单元的长度与方向. 网格线对应参数域中的等值线, 而等值线的垂直方向即为参数化的梯度方向. 简述之, 该类方法需在模型内部每个点生成轮换对称的 3 个方向, 然后运用类似求解泊松方程的方法, 沿着这些方向进行积分, 得到模型局部或者整体的参数化坐标. 因此方向场的可积性非常的重要^[13]. 目前已有的一些三维标架场生成方法^[7,8,14]所得到的标架场可积性差, 无法保证对应一个合理的参数化^[1]. 在六面体网格化中, 方向场的整体可积性还是一个开放问题^[2], 本文仅讨论方向场的局部可积性, 在不改变输入标架场方向的情况下, 对其长度伸缩进行全局优化, 得到尽可能可参数化的标架场, 从而利于重网格化应用.

3.1 对称标架场方向和长度的离散表示

目前生成面向六面体重网格化方向场的算法通常采用基于顶点^[8,9]、面^[7]和四面体单元^[2]的离散化表示. 本文选择基于顶点的离散化表示, 将标架场定义在顶点上, 使用 Huang 等^[7]的方法得到的标架场作为输入, 并将其插值到顶点上.

为分析标架场的局部可积性, 本文借鉴文献^[11]提出的表示方法, 在四面体网格上以分片线性的方式离散化具有对称性的三维标架场, 在使用局部对齐操作后将其转化为 3 个独立的普通向量场, 最终以这 3 个向量场在四面体内的旋度量局部可积性.

图 1 (网络版彩图) 标架对齐. 图中所示的标架在正立方体对称旋转群下是等价的, 这里展示了 6 个相互等价的标架, 这样等价的标架还有 18 种

Figure 1 (Color online) Frame alignment. The six frames are equivalent under cubic-symmetric rotational group, and there are other 18 frames

三维对称标架场 G 中每个点 p 的标架 $G(p)$ 包含 3 个向量 $G_d(p) = s_d(p)V_d(p)$, $d = 1, 2, 3$, 其中 $s_d(p) \in \mathbb{R}^+$, $V_d(p) \in \mathbb{R}^3$. 本文在输入四面体网格 $\mathcal{M}$ 的每个顶点上存储 3 个向量 $V_{v,d}$ 以及对应的 3 个标量 $s_{v,d}$, $d = 1, 2, 3$. 3 个向量构成了顶点 v 上的标架 $V_v = (V_{v,1}, V_{v,2}, V_{v,3})^T$, $|V_v| > 0$, 3 个标量构成了 $s_v = (s_{v,1}, s_{v,2}, s_{v,3})$, 则所有单元的向量和标量构成了四面体网格域上的离散向量场 $\mathcal{V}$ 和离散标量场 $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{V} \triangleq \{V_v | v \in \mathcal{M}\}, \quad \mathcal{S} \triangleq \{s_v | v \in \mathcal{M}\}. \quad (1)$$

三维标架场可以看成 3 个线性无关向量场的组合 $G_v = (G_v(1), G_v(2), G_v(3))^T$, 如下所示:

$$\forall v \in \mathcal{M}, \quad G_v = \text{diag}(s_v)V_v = (s_{v,1}V_{v,1}, s_{v,2}V_{v,2}, s_{v,3}V_{v,3})^T, \quad (2)$$

其中 $|G_v| > 0$, $s_{v,i} > 0$, $G_v(i) = s_{v,i}V_{v,i}$. 本文定义离散标架场 $\mathcal{G}$ 为

$$\mathcal{G} := \{G_v | v \in \mathcal{M}\}. \quad (3)$$

这里, $\mathcal{G}$ 中的 $\mathcal{S}$ 可理解为 $\mathcal{V}$ 在长度上的伸缩变换量.

3.2 对称标架场的局部对齐和分解

六面体化需要考虑其包含的 3 个方向之间的对称性^[1,15]. 三维标架 V 的 3 个向量在正立方体旋转不变群下等价 (图 1), 即

$$RV \sim V, \quad \forall R \in \mathbf{R}_c, \quad (4)$$

其中 $\mathbf{R}_c$ 表示三维空间中正立方体旋转不变群^[1,15].

类似文献 [6, 11], 在每个单元内部插值标架场之前, 首先需要将局部方向对齐以去除对称性. 如图 1 所示, 本文寻找能将点 a 处 3 个方向最佳对齐到 b 处 3 个方向的变换 $R_{a,b}$. 具体而言, 对齐局部标架场的变换矩阵通过如下所示的优化方程得到:

$$R_{a,b} = \text{argmin}_{R \in \mathbf{R}_c} \|R\bar{V}_a - \bar{V}_b\|, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{R}_c$ 表示三维空间中正立方体旋转不变群^[1,15], $\bar{V}$ 表示对 V 的每行向量做归一化处理, 即 $\bar{V} = (\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3)^T$, $\bar{V}_i = V_i / \|V_i\|_2$ ($i = 1, 2, 3$). 通过枚举 $\mathbf{R}_c$ 中 24 种旋转矩阵获得最优的解 $R_{a,b}$.

对于四面体单元 t , 该四面体的 4 个顶点分别为 $\{v_{t1}, v_{t2}, v_{t3}, v_{t4}\}$, 顶点处的标架场分别为

$$\{G_{v_{t1}}, G_{v_{t2}}, G_{v_{t3}}, G_{v_{t4}}\}. \quad (6)$$

利用式 (5) 进行标架对齐, 定义对齐后的标架 (图 2) 为 $\{G_{t1}, G_{t2}, G_{t3}, G_{t4}\}$, 为从三维对称标架场中得到四面体 t 内的对齐的标架场 G_{tk} ($k = 1, 2, 3, 4$), 本文选取顶点 v_{t1} 的标架, 即

$$G_{t1} \triangleq G_{v_{t1}} = s_{v_{t1}}V_{v_{t1}},$$

图 2 (网络版彩图) 四面体单元顶点处标架的局部对齐

Figure 2 (Color online) Local frame alignment on the vertices of a tetrahedron

作为参考, 将其他 3 个顶点的标架 $G_{v_{tk}}$, 通过变换 $R_{v_{tk}, v_{t1}}$ 将其对齐, 即

$$G_{tk} \triangleq R_{v_{tk}, v_{t1}} G_{v_{tk}} = R_{v_{tk}, v_{t1}} S_{v_{tk}} V_{v_{tk}}, \quad \forall k \in \{2, 3, 4\},$$

其中 $S_{v_{ti}} = \text{diag}(s_{v_{ti}})$.

在使用上述局部对齐操作之后, 该四面体内的对称标架场被分解为 3 个独立的方向场. 每一个分量都可以通过类似于求解泊松方程的方法积分得到三维参数化中一个维度的参数化坐标. 因此整个局部可积性的度量就被分解到每个四面体内每一个方向场之上:

$$\mathcal{G} \text{ 的旋度能量} \triangleq \sum_{t \in \mathcal{T}} E_t(\mathcal{G}) = \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{d=1}^3 E_{t,d}(\mathcal{G}), \quad (7)$$

其中 $\mathcal{T}$ 表示四面体网格 $\mathcal{M}$ 中四面体单元的集合, $E_{t,d}(\mathcal{G})$ 表示四面体 t 上 $\mathcal{G}$ 的第 d 个方向场的旋度能量大小.

本文令局部对齐之后四面体 t 中 4 个顶点处每个维度上的原始向量、伸缩变换的大小为 V_{ti} , s_{ti} , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. 三维标架场在每个四面体上是 3 个线性无关向量场的组合. 为了度量标架场的旋度, 本文首先分析四面体单元上单一向量场旋度, 由此构造离散化的旋度能量, 并将其扩展到三维标架场旋度能量的构造. 基于该旋度能量构建全局优化方程, 并对标量场 s 施加有界控制, 以减小标架场 G 的旋度, 得到尽量无旋度的新标架场 $G = \text{diag}(s)V$. 最后将优化后的新标架场用于生成六面体主导网格, 获得长度和方向可控的结果.

4 三维向量场的旋度能量

对于三维空间 Ω 中的连续向量场 sV , 其中, $s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是标量场, $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 是向量场, 由向量微积分可知 sV 的旋度为

$$\nabla \times (sV) = \nabla s \times V + s \nabla \times V. \quad (8)$$

易知, 该等式关于 s 是齐次的, 即当 s^* 为其一个解时, 对于任意的常数 $\alpha \in \mathbb{R}$, αs^* 也是一个解. 为消除齐次性, 得到易于求解的问题, 将式 (8) 两边同时除以 s , 并根据等式 $\nabla \ln(s) = \frac{\nabla s}{s}$ 对其进行变换, 则无旋条件 $\nabla \times (sV) = \mathbf{0}$ 对应如下所示偏微分方程:

$$\nabla \ln(s) \times V + \nabla \times V = \mathbf{0}. \quad (9)$$

为方便讨论, 在下文中定义 $\tilde{s} \triangleq \ln(s)$.

上述等式建立了无旋条件下标量场 $\tilde{s}$ 与向量场 V 的线性关系, 下面据此介绍如何构造离散的旋度能量.

4.1 四面体单元上旋度能量的离散化

对于以 $v_{t1}, v_{t2}, v_{t3}, v_{t4} \in \mathbb{R}^3$ 为顶点的非退化四面体 t , 其内部一点 $p \in t$ 的向量和坐标值通过重心坐标 $w_t(p)$ 插值得到:

$$V_t(p) = (V_{t1}, V_{t2}, V_{t3}, V_{t4}) w_t(p) \triangleq V_t w_t(p), \quad \tilde{s}_t(p) = (\tilde{s}_{t1}, \tilde{s}_{t2}, \tilde{s}_{t3}, \tilde{s}_{t4}) w_t(p) \triangleq \tilde{s}_t w_t(p), \quad p \in t, \quad (10)$$

其中 $w_t(p) = (w_{t1}(p), w_{t2}(p), w_{t3}(p), w_{t4}(p))^T \in \mathbb{R}^4$ 为 p 点相对 $v_{t1}, v_{t2}, v_{t3}, v_{t4}$ 4 个顶点的重心坐标. 由四面体重心坐标性质可知

$$w_t(p) = \begin{pmatrix} v_{t1} & v_{t2} & v_{t3} & v_{t4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \triangleq W_t \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

可见, 四面体内的向量场和标量场线性于坐标 p :

$$V_t(p) = V_t W_t \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{s}_t(p) = \tilde{s}_t W_t \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

其中 $V_t = (V_{t1}, V_{t2}, V_{t3}, V_{t4})$, $\tilde{s}_t = (\tilde{s}_{t1}, \tilde{s}_{t2}, \tilde{s}_{t3}, \tilde{s}_{t4})$. 因此, $\nabla V_t(p)$ 和 $\nabla \tilde{s}_t(p)$ 都与 p 无关, 即

$$\nabla V_t(p) = V_t W_t \begin{pmatrix} \text{Id}_{3 \times 3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \tilde{s}_t(p) = \tilde{s}_t W_t \begin{pmatrix} \text{Id}_{3 \times 3} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

其中, $\text{Id}_{3 \times 3}$ 表示三维单位矩阵. 而 $\nabla \times V_t(p)$ 由 $\nabla V_t(p)$ 计算得到, 故 $\nabla \times V_t(p)$ 也与 p 无关.

考虑式 (9) 在四面体内的积分:

$$0 = \frac{1}{|t|} \int_t (\nabla \tilde{s}_t(p) \times V_t(p) + \nabla \times V_t) dp = \nabla \tilde{s}_t \times \frac{\sum_{i=1}^4 V_{ti}}{4} + \nabla \times V_t(p) \triangleq C_t(s, V), \quad (14)$$

则四面体单元 t 上的旋度能量可以定义为

$$E_t(sV) \triangleq \|C_t(s, V)\|^2. \quad (15)$$

C_t 具体计算公式见第 4.2 小节.

4.2 旋度能量的计算

四面体上向量场的旋度可由向量场的梯度得到, 即

$$D(p) \triangleq \nabla V_t(p) = \frac{\partial V_t(p)}{\partial p} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (16)$$

$$\nabla \times V_t(p) = (D_{3,2}(p) - D_{2,3}(p), D_{1,3}(p) - D_{3,1}(p), D_{2,1}(p) - D_{1,2}(p))^T,$$

其中 $D_{i,j}$ 表示矩阵 D 的第 i 行第 j 列元素. 为了给出 C_t 的公式, 这里首先定义几个关于四面体 t 的常量矩阵, 如下所示:

$$V_a \triangleq \sum_{i=1}^4 V_{ti}/4, \quad W \triangleq W_t \begin{pmatrix} \text{Id}_{3 \times 3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D \triangleq \nabla V_t(p) = V_t W, \quad (17)$$

其中 $V_t = (V_{t1}, V_{t2}, V_{t3}, V_{t4})$. 显然在四面体单元 t 中 $D(p)$ 与 p 无关. 根据式 (14), 可以得到

$$C_t = \begin{bmatrix} W_{1,2}V_{a3} - W_{1,3}V_{a2} & W_{2,2}V_{a3} - V_{a2}W_{2,3} & V_{a3}W_{3,2} - V_{a2}W_{3,3} & V_{a3}W_{4,2} - V_{a2}W_{4,3} \\ V_{a1}W_{1,3} - W_{1,1}V_{a3} & V_{a1}W_{2,3} - W_{2,1}V_{a3} & V_{a1}W_{3,3} - V_{a3}W_{3,1} & V_{a1}W_{4,3} - V_{a3}W_{4,1} \\ W_{1,1}V_{a2} - V_{a1}W_{1,2} & V_{a2}W_{2,1} - V_{a1}W_{2,2} & V_{a2}W_{3,1} - V_{a1}W_{3,2} & V_{a2}W_{4,1} - V_{a1}W_{4,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{s}_{t1} \\ \tilde{s}_{t2} \\ \tilde{s}_{t3} \\ \tilde{s}_{t4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{3,2} - D_{2,3} \\ D_{1,3} - D_{3,1} \\ D_{2,1} - D_{1,2} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

故 C_t 是关于 $\tilde{s}_t = (\tilde{s}_{t1}, \tilde{s}_{t2}, \tilde{s}_{t3}, \tilde{s}_{t4})$ 的线性函数. 式 (18) 右侧第 1 项是 $\nabla \tilde{s}_t \times V_a = \tilde{s}_t W \times V_a$ 的展开式, 第 2 项是 $\nabla \times V_t$.

5 三维标架场的去旋优化

5.1 三维标架场的旋度能量

三维标架场每一个分量的旋度可以被单独分析. 对于每个四面体单元, 4 个顶点上的标架场可以分解为 3 个独立的向量场, 每个独立的向量场在四面体单元内部由顶点处的向量线性插值得到, 它们表示为

$$\mathcal{G}_t(d) \triangleq \{G_{t1}(d), G_{t2}(d), G_{t3}(d), G_{t4}(d)\}, \quad \forall d \in \{1, 2, 3\}, \quad (19)$$

其中,

$$G_{tk}(d) \triangleq G_{v_{tk}}(d_k) = \mathbf{s}_{v_{tk}, d_k} R_{tk, t1}(d, d_k) \mathbf{V}_{v_{tk}, d_k} \in \mathbb{R}^3, \quad d_k \in \{1, 2, 3\} \text{ and } R_{tk, t1}(d, d_k) \neq 0. \quad (20)$$

为了简化符号, $R_{tk, t1}$ 表示 $R_{v_{tk}, v_{t1}}$, d_k 由 $R_{tk, t1}$ 决定, 这里, $R_{tk, t1}(d, d_k)$ 表示矩阵 $R_{tk, t1}$ 的第 d 行第 d_k 列. 对于 $\mathbf{R}_c$ 中的每一个旋转矩阵, 每行每列只有一个非零元素, $R_{t1, t1} = \text{Id}$, $d_1 = d$.

四面体单元上的 3 个离散向量场 $\mathcal{G}_t(1), \mathcal{G}_t(2), \mathcal{G}_t(3)$ 相互无关, 可以独立考虑. $\mathcal{G}_t(d)$ 中的 4 个向量在四面体上能插值得到一个连续的向量场 (图 2 中右侧对齐后的标架, 每种颜色的向量场可以单独考虑). 易见, $\mathcal{G}_t(d)$ 是由顶点处的 4 个标量和 4 个向量构成, 即

$$\begin{aligned} s(\mathcal{G}_t(d)) &\triangleq \{s_{tk} \mid \forall k \in \{1, 2, 3, 4\}, s_{tk} = \mathbf{s}_{v_{tk}, d_k}\}, \\ V(\mathcal{G}_t(d)) &\triangleq \{V_{tk} \mid \forall k \in \{1, 2, 3, 4\}, V_{tk} = R_{tk, t1}(d, d_k) \mathbf{V}_{v_{tk}, d_k}\}. \end{aligned} \quad (21)$$

下面讨论标架场旋度能量时, 为了简化符号, 使用符号 s 和 V 表示标量场和向量场.

根据四面体单元 t 上的 4 个向量和标量可以计算 $\mathcal{G}_t(d)$ 对应的向量场 sV 的旋度能量. 根据第 4 节定义的旋度能量 (式 (15)), 可以得到四面体单元 t 上标架场的旋度能量, 即

$$E_t(\mathcal{G}) = \sum_{d=1}^3 E_{t,d}, \quad E_{t,d} = E_t(\mathcal{G}_t(d)) = \|C_t(s, V)\|^2, \quad (22)$$

其中 $s = s(\mathcal{G}_t(d)), V = V(\mathcal{G}_t(d))$.

由上述标架场在四面体单元上的旋度能量, 定义标架场在四面体网格 $\mathcal{M}$ 上总旋度能量, 即

$$E_c(\tilde{\mathcal{S}}) = \alpha_r \sum_{t \in \mathcal{T}} E_t(\mathcal{G}), \quad \alpha_r = |\mathcal{M}|^{2/3}/n_t. \quad (23)$$

这里为了使得在输入标架场不变的情况下, 避免模型尺度和网格单元密度对能量的影响, 引入系数 α_r , $|\mathcal{M}|$ 表示四面体网格的体积, n_t 表示四面体单元的个数. 为了避免四面体单元体积大小对 C_t 的影响, 式 (14) 中的 C_t 已对体积做了归一化处理, C_t 与长度的逆相关, 故在 E_c 中引入 $|\mathcal{M}|^{2/3}$ 以抵消长度的影响. 同时, 引入 n_t 做归一化处理, 以降低网格单元密度对能量的影响.

5.2 去旋优化方程

式 (23) 所示的旋度能量是关于标量场 $\tilde{\mathcal{S}}$ 的二次函数, 即

$$E_c = \alpha_r \|A(\mathcal{V})\tilde{\mathcal{S}}\|_2^2, \quad (24)$$

其中 $A(\mathcal{V})\tilde{\mathcal{S}}$ 将旋度能量公式 E_t 重组为线性向量函数, $A \in \mathbb{R}^{9n_t \times 3n_v}$, n_v 表示四面体顶点个数, $\tilde{\mathcal{S}} = (\tilde{s}_{v_0}, \tilde{s}_{v_1}, \dots, \tilde{s}_{v_{n_v-1}})^T$. 对于每个四面体单元每个独立的方向场, C_t 为一个 3×1 向量, 其中该向量的每一行是 $\tilde{\mathcal{S}}$ 的线性组合.

为了灵活控制标量场, 类似于 Zhang 等^[11] 的方法, 可考虑标量场的拉普拉斯 (Laplace) 光顺能量

$$\int_{\Omega} \|\Delta(\tilde{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{s}}^*)\|^2 dp,$$

其中 $\mathbf{s}^*$ 为原始输入标架场对应的长度, 并将其离散化为如下形式:

$$\begin{aligned} L(\tilde{\mathbf{s}}) &\triangleq w_v \tilde{\mathbf{s}}_v^T - \sum_{p \in \mathcal{N}(v)} R_{p,v} \tilde{\mathbf{s}}_p^T / \|p - v\|_2, \\ E_s &\triangleq \frac{|\mathcal{M}|^{2/3}}{n_v} \sum_{v \in \mathcal{M}} \|L(\tilde{\mathbf{s}}) + L(\tilde{\mathbf{s}}^*)\|^2, \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $w_v = \sum_{p \in \mathcal{N}(v)} \frac{1}{\|p - v\|_2}$, $\mathcal{N}(v)$ 表示顶点 v 的相邻顶点.

本文固定标架场 $\mathcal{V}$ 的方向, 旨在通过优化标量场 $\tilde{\mathcal{S}}$ 以降低合成标架场 G 的旋度. 因此, 可将三维标架场的去旋问题归结为以下优化问题, 即

$$\min_{\tilde{\mathcal{S}}} E_c + w_s E_s \quad \text{s.t.} \quad \tilde{\mathcal{S}}_{\min} \leq \tilde{\mathcal{S}} \leq \tilde{\mathcal{S}}_{\max}, \quad (26)$$

其中 $\tilde{\mathcal{S}}_{\min}$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\max}$ 分别表示 $\tilde{\mathcal{S}}$ 的下界与上界. 易见, 上述三维标架场去旋优化方程是一个带有简单界约束的二次凸规化问题, 易于求解. 本文使用原始 - 对偶内点法进行求解^[16], 在实验中, 默认设置 $w_s = 0.01$. 图 3 所示为在空心圆柱模型上优化得到的标架场以及对应的 3 个标量场, 输入的标架场为正交场, 且长度为 1.

6 实验与结果

参数化误差. 本文将所得新的标架场作为引导场应用于体参数化^[1], 通过构造参数化结果分析去旋效果. 由于体参数化方法^[1] 所用标架场定义于四面体单元中, 因而需首先将四面体顶点上的 $\tilde{\mathbf{s}}$ 和 $\mathbf{V}$ 运用线性插值计算四面体单元内的标架场 $S_t \mathbf{V}_t$, 然后基于 CubeCover 方法^[1] 构造体参数化,

$$\tilde{\mathbf{s}}_{t,d} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \tilde{s}_{v_{tk},d_k}, \quad \mathbf{V}_{t,d} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 R_{tk,t1}(d, d_k) \mathbf{V}_{v_{tk},d_k},$$

其中 d_k 的计算方式与前面一致. $S_t = \text{diag}(\exp(\tilde{s}_{t,1}), \exp(\tilde{s}_{t,2}), \exp(\tilde{s}_{t,3}))$, $\mathbf{V}_t = (\mathbf{V}_{t,1}, \mathbf{V}_{t,2}, \mathbf{V}_{t,3})^T$. 通过计算参数化误差 E_V 与旋度能量 E_c 分析去旋结果, 即运用如下所示的参数化误差公式:

$$E_V(t) \triangleq \|\nabla \varphi_t(S_t \mathbf{V}_t)^{-1} - \text{Id}\|_F, \quad (27)$$

及其旋度能量公式:

$$E_c(t) \triangleq \sqrt{\alpha_r E_t(\mathcal{G})}. \quad (28)$$

图 3 (网络版彩图) 三维标架场的去旋优化. (a) 为输入的三维单位正交标架场; (b) 为最终的标架场; (c)~(e) 为优化得到的 3 个方向上的标量场

Figure 3 (Color online) Curl-correction optimization of 3D frame fields. (a) is the input 3D orthogonal frame field; (b) is the final frame field; (c)~(e) are the optimized scalar fields in the three directions

在不同长度区间控制下去旋, 将有效地控制新生成的标架场使之逐渐接近梯度场, 图 4 和 5 中所示的旋度能量和参数化误差随着区间的增大逐渐减小, 它们的误差分布直方图见图 6 和 7. 图 4 和 5 所示为两个模型的可控去旋结果, 以及相应的旋度能量和标架对齐误差的可视化结果. 通过对比未去旋的标架场和不同界控制下去旋标架场, 可看出本文方法能有效地去除旋度, 并且在长度界的控制下, 方便地控制去旋程度以及标架场的长度, 而所生成六面体网格的单元大小反映了该标架场的长度以及其变化.

图 4 和 5 的第 1 列为初始标架场下得到的结果, 与去旋后的结果相比, 其旋度能量 (式 (28)) 和参数化误差 (式 (27)) 均较大. 从分布直方图 (图 6 和 7) 来看, 空心圆柱和球模型的旋度能量在初始标架场下大多分布在 0.005 及以上的区间, 其中空心圆柱模型参数化误差在 $[0, 0.5]$ 区间上几乎均匀分布, 球模型参数化误差集中在区间 $[0.5, 0.6]$.

对于不同的长度界约束, 即 $[-0.2, 0.2]$, $[-0.5, 0.5]$ 和 $[-2, 2]$, 随着长度界逐步放松, $\tilde{s}$ 的允许变化范围越来越大, 去旋效果越来越好, 参数化误差也越来越小, 所得网格单元的大小变化更大. 从分布直方图可以进一步看出, 当长度界约束为 $[-2, 2]$ 时, 旋度能量集中分布在区间 $[0, 0.005]$, 参数化误差集中分布在区间 $[0, 0.1]$ 中.

光顺度控制. 本文方法通过调整式 (26) 中光顺项系数 w_s , 可有效地控制 $\tilde{s}$ 的光滑程度, 对比结果见图 8. 当 $w_s = 0$ 时, 即不考虑光顺项时, 标量场变化剧烈, 生成得到的六面体网格单元大小的变化较大; 当 $w_s = 0.01$ 时, 标量场变化较均匀, 对应的六面体网格的大小变化也较平缓. 图 8 中, 模型沿着径向的大小变化在考虑了光顺项后单元大小几乎一致, 而不考虑光顺项时, 变化较剧烈; 球模型在添加光顺项后沿着环向的大小变化较一致.

六面体主导网格的生成. 本文将去旋后的标架场运用于六面体主导网格生成方法 PGP3D^[6] 中, 得到了可控的六面体主导网格, 见图 4 和 5. 由图可见, 随着旋度逐渐减小, 六面体网格的单元体积

图 4 (网络版彩图) 空心圆柱体模型在不同控制约束下的标架场去旋效果. 第 1 列为原始标架场下的各项数据分析, 从第 2 列到第 4 列分别为不同控制下的结果展示: $[-0.2, 0.2]$, $[-0.5, 0.5]$, $[-2, 2]$. 第 1 行为优化后的旋度能量, 第 2 行为参数化误差, 第 3 行是对应于环向向量场的标量场, 第 4 行为使用 PGP3D 生成得到的网格 (六面体部分) [6]

Figure 4 (Color online) The curl-correction results of the hollow cylinder model with different constraints. The first column shows the analysis of the original frame field. The columns from 2 to 4 show results under different constraints $[-0.2, 0.2]$, $[-0.5, 0.5]$, $[-2, 2]$. The first row is the optimized curl energies, the second row is the parametric errors, the third row corresponds to the scalar fields in the circumferential direction, and the fourth row shows the meshes generated by PGP3D [6]. (a) Without curl correction; (b) $[-0.2, 0.2]$; (c) $[-0.5, 0.5]$; (d) $[-2, 2]$

占比逐渐增多. 去旋后的标架场能使 PGP3D 方法获得更多的六面体单元, 且不同区间控制下的去旋, 会得到长度分布不同的网格. 图 5 中最左侧网格单元大小几乎一致, 最右侧网格单元大小变化最大, 其中靠近中间的网格单元小, 靠近边界的网格单元大. 本文也将该方法应用于更加复杂的三维模型, 见图 9, 通过去除旋度, 能显著地提高六面体单元的体积占比, 具体统计数据见表 1. 为了生成大小合适的六面体单元, 在运用 PGP3D 生成网格之前, 本文对去旋得到的标架场做了全局缩放, 即 $G/s_g, s_g \in$

图 5 (网络版彩图) 球模型在不同去旋控制下的结果展示, 原始输入为边界对齐的三维单位正交标架场, $[a, b]$ 为 $\tilde{s}$ 的控制范围. 前 3 行分别为旋度能量、参数化误差和优化得到的 3 个标量场的均值 (每个点处 3 个标量场的均值, 模型切开展示), 第 4 和 5 行是运用 PGP3D 得到的六面体主导网格中的六面体部分^[6], 第 5 行展示的是切开后的网格

Figure 5 (Color online) The curl-correction results of the sphere model with different constraints. The original input field is a boundary-aligned cross-frame field and $[a, b]$ represents the range of $\tilde{s}$. The first row shows the distribution of the curl energies, the second row shows the parameterization errors, the third row visualizes the average value of the optimized scalar fields (the meshes are demonstrated partly by cutting), and the fourth row shows hex elements of the hex-dominant meshes generated by PGP3D, and the fifth row demonstrates the meshes partly by cutting. (a) Without curl correction; (b) $[-0.2, 0.2]$; (c) $[-0.5, 0.5]$; (d) $[-2, 2]$

图 6 (网络版彩图) 空心圆柱模型旋度能量和参数化误差的分布直方图

Figure 6 (Color online) The distributions of curl energies and parametric errors of the hollow cylinder model. (a) Non curl correction; (b) $[-0.2, 0.2]$; (c) $[-0.5, 0.5]$; (d) $[-2, 2]$

图 7 (网络版彩图) 球模型旋度能量和参数化误差的分布直方图

Figure 7 (Color online) The distributions of the curl energies and parametric errors of the sphere model. (a) Non curl correction; (b) $[-0.2, 0.2]$; (c) $[-0.5, 0.5]$; (d) $[-2, 2]$

图 8 (网络版彩图) 空心圆柱体和球模型 (上图所示为切开后的模型) 在 $\bar{s}_{\min} = -2, \bar{s}_{\max} = 2$ 下添加光滑项和不添加光滑项得到的结果. 根据生成的网格可以看出, 添加光滑项会使标量场的变化平滑, 网格单元大小的变化更均匀

Figure 8 (Color online) The results of the hollow cylinder model and the sphere model (demonstrated partly by cutting) with $\bar{s}_{\min} = -2, \bar{s}_{\max} = 2$ under different smoothness controls. Considering the smoothness term makes the resulting scalar fields smoother, so are the element size of the resulting meshes. (a) and (c) $w_s = 0.01$, (b) and (d) $w_s = 0$

图 9 (网络版彩图) 去旋控制下六面体主导网格的生成. 通过去除旋度, 显著提高了六面体单元的体积占比. 第 1 行是应用 PGP3D 生成得到的六面体主导的混合网格, 第 2 行是混合网格中的所有六面体单元

Figure 9 (Color online) Hex-dominant meshes guided by the curl-corrected frame fields. After curl-correcting, the volume ratio of the hex elements increases considerably. The first row shows the hex-dominant meshes generated by PGP3D, and the second row shows all the hex elements of the meshes. (a), (c) Without curl correction; (b), (d) $[-2, 2]$

$\mathbb{R}^+$, s_g 与模型大小和标架场的平均长度相关, 可用于控制输出网格单元的平均大小, 具体数据见表 1.

7 结论

本文采用的可控三维标架场去旋方法, 在保持标架场方向不变的情况下, 通过引入表示标架长度的标量场, 控制标架场的旋度. 实验表明, 将去旋后的标架场应用于体参数化, 得到的参数化误差更小;

表 1 本文实验数据统计^{a)}

Table 1 Statistics

Model	n_t	$[\tilde{s}_{\min}, \tilde{s}_{\max}]$	T_{cc} (s)	r_H (%)	n_H	w_s	s_g
hole_cylinder	31791	(Non curl correction)	—	45.05	13870	0.01	0.04
hole_cylinder	31791	$[-0.2, 0.2]$	7	61.25	16460	0.01	0.04
hole_cylinder	31791	$[-0.5, 0.5]$	7	84.32	19805	0.01	0.04
hole_cylinder	31791	$[-2, 2]$	11	98.49	28986	0.01	0.04
hole_cylinder	31791	$[-2, 2]$	12	97.79	28736	0	0.04
sphere	265280	(Non curl correction)	—	9.02	11857	0.01	0.03
sphere	265280	$[-0.2, 0.2]$	120	45.91	60383	0.01	0.03
sphere	265280	$[-0.5, 0.5]$	221	83.93	112063	0.01	0.03
sphere	265280	$[-2, 2]$	122	92.82	244418	0.01	0.03
sphere	265280	$[-2, 2]$	153	92.42	347428	0	0.03
bunny	169281	(Non curl correction)	—	40.78	17032	0.01	0.005
bunny	169281	$[-2, 2]$	130	66.41	28036	0.01	0.005
bone	145842	(Non curl correction)	—	44.07	3384	0.01	0.3
bone	145842	$[-2, 2]$	49	67.09	7203	0.01	0.3

a) n_t and n_H are the number of the tetrahedral and hexahedral elements respectively, T_{cc} is the time cost in second about curl-correction optimization, r_H is the volume ratio of the hex elements, s_g represents the global scale of the frame fields when applying them into PGP3D. All experiments are ran on a computer with CPU E5-2630v2@2.60 GHz.

将其应用于六面体主导网格的生成 (PGP3D), 获得的网格具有更高体积比的六面体单元; 通过控制标量场的变化范围, 可以有效控制去旋的程度, 且方便控制生成网格单元的大小. 本文方法在去除旋度时不改变奇异线的结构与位置, 制约了六面体单元比例的进一步提高, 因此在去除旋度的同时调节奇异结构是未来一个潜在的研究点.

参考文献

- 1 Nieser M, Reitebuch U, Polthier K. Cubecover-parameterization of 3D volumes. Comput Graph Forum, 2011, 30: 1397–1406
- 2 Li Y F, Liu Y, Xu W W, et al. All-hex meshing using singularity-restricted field. ACM Trans Graph, 2012, 31: 1–11
- 3 Fang X Z, Xu W W, Bao H J, et al. All-hex meshing using closed-form induced polycube. ACM Trans Graph, 2016, 35: 1–9
- 4 Staten M L, Owen S J, Blacker T D. Unconstrained paving & plastering: a new idea for all hexahedral mesh generation. In: Proceedings of the 14th International Meshing Roundtable, 2005. 399–416
- 5 Roca X, Sarrate J, Huerta A. Surface mesh projection for hexahedral mesh generation by sweeping. In: Proceedings of the 13th International Meshing Roundtable, 2004. 169–180
- 6 Sokolov D, Ray N, Untereiner L, et al. Hexahedral-dominant meshing. ACM Trans Graph, 2017, 36: 1–23
- 7 Huang J, Tong Y Y, Wei H Y, et al. Boundary aligned smooth 3D cross-frame field. ACM Trans Graph, 2011, 30: 1–8
- 8 Ray N, Sokolov D, Lévy B. Practical 3D frame field generation. ACM Trans Graph, 2016, 35: 1–9
- 9 Gao X F, Jakob W, Tarini M, et al. Robust hex-dominant mesh generation using field-guided polyhedral agglomeration. ACM Trans Graph, 2017, 36: 1–13
- 10 Ray N, Li W C, Lévy B, et al. Periodic global parameterization. ACM Trans Graph, 2006, 25: 1460–1485
- 11 Zhang M Y, Huang J, Liu X G, et al. A wave-based anisotropic quadrangulation method. ACM Trans Graph, 2010, 29: 1–8

- 12 Diamanti O, Vaxman A, Panozzo D, et al. Integrable polyvector fields. *ACM Trans Graph*, 2015, 34: 1–12
- 13 Huang J, Jiang T F, Bao H J. Research progress on automatic quadrilateral and hexahedral remeshing. *J Comput-Aided Design Comput Graph*, 2015, 27: 1354–1362 [黄劲, 江腾飞, 鲍虎军. 四边形与六面体自动重网格化技术研究综述. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2015, 27: 1354–1362]
- 14 Solomon J, Vaxman A, Bommes D. Boundary element octahedral fields in volumes. *ACM Trans Graph*, 2017, 36: 1–16
- 15 Shen Z W, Fang X Z, Liu X G, et al. Harmonic functions for rotational symmetry vector fields. *Comput Graph Forum*, 2016, 35: 507–516
- 16 Boyd S, Vandenberghe L. *Convex Optimization*. New York: Cambridge University Press, 2004

Controllable curl-correction of 3D frame fields

Xianzhong FANG¹, Yao JIN², Jin HUANG¹ & Hujun BAO^{1*}

1. *State Key Lab of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;*

2. *Institute of Graphics and Data Intelligence, School of Information Science and Technology, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China*

* Corresponding author. E-mail: bao@cad.zju.edu.cn

Abstract Hexahedral meshes represent an attractive discretization strategy in finite element analyses owing to their good numerical performance. Frame field-based remeshing is an important technique for controllable hexahedral meshing. Existing frame-field generation methods cannot be directly used for purely hexahedral meshing due to possible topological conflicts. These problems are less severe in the case of hexahedral-dominant meshing. However, the quality of these hexahedral-dominant meshes is largely affected by the curl of the input frame fields. With the aim of overcoming this issue, we propose a direction-preserving and length-controllable curl-correction method of 3D frame fields. We analyze and construct the discretized curl energy of the 3D vector field on tetrahedral meshes and extend it to frame fields, i.e., the composition of three vector fields. In order to preserve the input directions as much as possible, three scalar fields were introduced to denote the stretch length of the three vectors of the frame fields and represent the new fields as a combination of the original frame fields and scalar fields. Through global-optimization of the curl energy combined with a smooth term, the final curl-corrected frame fields are obtained, which are further used for hexahedral-dominant remeshing. The results indicate that the proposed method can reduce the curl of the frame fields efficiently while keeping their directions as well as controlling the extent of their length. By applying such frame fields to existing hexahedral-dominant remeshing methods, direction- and size-controllable hexahedral-dominant meshes can be obtained. Besides, the proposed method deduces to a convex quadratic programming problem with simple box constraints, which is easy-to-solve.

Keywords 3D frame field, curl correction, length-controllable, hexahedral dominant mesh

Xianzhong FANG received his doctoral degree in Computer Science from Zhejiang University in 2019. He is currently a post-doc at the State Key Lab of CAD&CG, Zhejiang University. His research interests include parametrization, field generation, and remeshing.

Yao JIN received his doctoral degree in Computer Science from Zhejiang University in 2015. He is currently a lecturer in the School of Information Science and Technology at Zhejiang Sci-Tech University. His research interests include computer graphics, geometric modeling, and processing.

Jin HUANG received his doctoral degree in Computer Science from Zhejiang University in 2007. He is a full professor at the State Key Lab of CAD&CG, Zhejiang University. His research interests are mainly focused on the areas of geometry processing and physical simulation.

Hujun BAO obtained his doctoral degree in Applied Mathematics from Zhejiang University in 1993. He is a full professor at State Key Lab of CAD&CG, Zhejiang University. His research interests are mainly focused on the areas of geometry computing, 3D visual computing, rendering, and their applications.