算术级数中的陈景润定理 *

陆鸣皋　蔡迎春
（上海大学数学系，上海 201800）

摘要　设 N 为一充分大的偶数且 $q \geqslant 1$，$(l_i, q)=1\ (i=1,2)$，$l_1+l_2 \equiv N \pmod q$．证明了方程 $N=p+P_2$，$p \equiv l_1 \pmod q$，$P_2 \equiv l_2 \pmod q$ 对区间 $\left[1, N^{\frac{1}{37}}\right]$ 中除了 $O\left(N^{\frac{1}{37}}\log^{-5}N\right)$ 个例外的整数 q，都有无穷多解，其中 p 是素数，P_2 为一至多有 2 个素因子的殆素数．

关键词　陈景润定理　筛法　均值定理

Vinogradov 证明了熟知的 Goldbach-Vinogradov 三素数定理[1]，即每个充分大的奇数能表成 3 个奇素数之和．随后，一些数学家将这个定理进行了推广[2~5]，研究了如下类型的问题：对 $s \geqslant 3$，方程

$$N = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_sp_s, \quad p_v \equiv l_v \pmod q, \quad 1 \leqslant v \leqslant s$$

是否可解？这里 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 是给定的正整数，$p_v\ (1 \leqslant v \leqslant s)$ 是素数．当 $q \leqslant C\log^A N$（A，C 是任意正数）时，这个问题无太本质的困难．文献[6]证明了对充分大的满足条件

$$q \geqslant 1, \quad (l_i, q) = 1 \quad (i = 1, 2, 3),$$
$$l_1 + l_2 + l_3 \equiv N \pmod q$$

的奇数 N，方程

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \quad p_i \equiv l_i \pmod q \quad (i = 1, 2, 3) \tag{0.1}$$

当 $q \leqslant N^{\delta}$ 时是可解的，这里 p_i 为素数，而 δ 为一可计算的正常数．文献[7]证明了对于区间 $\left[1, N^{\frac{1}{8}-\varepsilon}\right]$（$\varepsilon > 0$）中除了 $O\left(N^{\frac{1}{8}-\varepsilon}\log^{-A}N\right)$（$A$ 是任意正数）个例外的整数 q，方程(0.1)是可解的．

以上这些推广无疑是很有意义的．

陈景润在偶数的 Goldbach 猜想的研究中取得了重大进展[8,9]，建立了著名的俗称“1+2”的陈景润定理．自然会想到对于陈景润定理应得到类似于文献[6]的结果，但目前还得不到这样的结果，本文得到的是关于文献[7]的结果对于陈景润定理的一个类似．与文献[6,7]中所应用的圆法不同，本文的结果依赖于筛法．

定理 1　设 N 为一充分大的偶数且

1998-10-28 收稿
*国家自然科学基金资助项目（批准号：19531010，19801021）

$$q \geqslant 1, \quad (l_i, q) = 1 \quad (i = 1, 2),$$
$$l_1 + l_2 \equiv N \pmod{q},$$

则方程

$$N = p + P_2, \quad p \equiv l_1 \pmod{q}, \quad P_2 \equiv l_2 \pmod{q} \tag{0.2}$$

对区间$\left[1, N^{\frac{1}{37}}\right]$中除了$O\left(N^{\frac{1}{37}}\log^{-5} N\right)$个例外的整数$q$,都有无穷多解.

定理 1 是下面结果的简单推论.

定理 2 在定理 1 的条件下, 令$S(N, q)$为方程(0.2)的解数, 则对区间$\left[1, N^{1/37}\right]$中除了$O\left(N^{\frac{1}{37}}\log^{-5} N\right)$个例外的整数$q$, 都有

$$S(N, q) \geqslant \frac{0.001\, C(N, q) N}{\varphi(q) \log^2 N}, \tag{0.3}$$

其中$\varphi(q)$为 Euler 函数,

$$C(N, q) = \prod_{p > 2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \mid Nq,\, p > 2} \frac{p-1}{p-2}. \tag{0.4}$$

类似地, 有

定理 3 设x为一充分大的实数且

$$q \geqslant 1, \quad (l_i, q) = 1 \quad (i = 1, 2),$$
$$l_1 + 2 \equiv l_2 \pmod{q},$$

则方程

$$p + 2 = P_2, \quad p \equiv l_1 \pmod{q}, \quad P_2 \equiv l_2 \pmod{q}, \quad p \leqslant x$$

对区间$\left[1, x^{\frac{1}{37}}\right]$中除了$O\left(x^{\frac{1}{37}}\log^{-5} x\right)$个例外的整数$q$, 都有无穷多解.

注 利用改进后的加权筛法[10], 1/37 可改进为 0.028.

1 预备引理

令$\mathscr{A}$为一有限整数集合, $\mathscr{P}$为一无限素数集合, $\bar{\mathscr{P}}$为不属于$\mathscr{P}$的素数集合. 令$z \geqslant 2$,

$$P(z) = \prod_{p < z,\ p \in \mathscr{P}} p, \quad S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = \sum_{a \in \mathscr{A},\ (a, P(z)) = 1} 1,$$
$$\mathscr{A}_d = \{a \mid a \in \mathscr{A}, a \equiv 0 \pmod{d}\}.$$

引理 1[11] 如果

(A_1) $|\mathscr{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} X + r_d$, $\mu(d) \neq 0$, $(d, \bar{\mathscr{P}}) = 1$;

(A_2) $\displaystyle\sum_{z_1 \leqslant p < z_2} \frac{\omega(p)}{p} = \log \frac{\log z_2}{\log z_1} + O\left(\frac{1}{\log z_1}\right)$, $z_2 > z_1 \geqslant 2$,

其中$\omega(d)$为一积性函数, $0 \leqslant \omega(p) < p$, $X > 1$与d无关, 则

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) \geqslant XV(z)\left\{f(s) + O\left(1/\log^{\frac{1}{3}} D\right)\right\} - R_D,$$
$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) \leqslant XV(z)\left\{F(s) + O\left(1/\log^{\frac{1}{3}} D\right)\right\} + R_D,$$

这里

$$s=\frac{\log D}{\log z},\quad R_D=\sum_{d<D,\ d\mid P(z)}|r_d|,$$

$$V(z)=C(\omega)\frac{e^{-\gamma}}{\log z}\left(1+O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right),\quad C(\omega)=\prod_p\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1},$$

其中 γ 为 Euler 常数, $f(s)$与 $F(s)$是下面的微分-差分方程的解:

$$\begin{cases}F(s)=\dfrac{2e^{\gamma}}{s},\quad f(s)=0,\quad 0<s\leqslant 2,\\ (sF(s))'=f(s-1),\quad (sf(s))'=F(s-1),\quad s\geqslant 2.\end{cases}$$

引理 2[12]

$$F(s)=\frac{2e^{\gamma}}{s},\quad 0<s\leqslant 3;$$

$$F(s)=\frac{2e^{\gamma}}{s}\left(1+\int_2^{s-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right),\quad 3\leqslant s\leqslant 5;$$

$$f(s)=\frac{2e^{\gamma}\log(s-1)}{s},\quad 2\leqslant s\leqslant 4;$$

$$f(s)=\frac{2e^{\gamma}}{s}\left(\log(s-1)+\int_3^{s-1}\frac{dt}{t}\int_2^{t-1}\frac{\log(u-1)}{u}du\right),\quad 4\leqslant s\leqslant 6.$$

引理 3[12]　设 $0\leqslant g(x)\ll 1$, $0\leqslant\beta<1$,

$$\pi(y;a,d,l)=\sum_{ap\leqslant y,\ ap\equiv l(\mathrm{mod}\,d)}1,\quad (l,d)=1,$$

则对任意 $A>0$, 存在 $B=B(A)>0$, 使得

$$\sum_{d\leqslant D}\max_{(l,d)=1}\max_{y\leqslant x}\tau(d)\left|\sum_{a\leqslant x^{\beta},\ (a,d)=1}g(a)\left(\pi(y;a,d,l)-\frac{\mathrm{Li}(y/a)}{\varphi(d)}\right)\right|\ll\frac{x}{\log^A x},$$

其中

$$\mathrm{Li}\,y=\int_2^y\frac{dt}{\log t},\quad D=\frac{x^{\frac12}}{\log^B x},\quad \tau(n)=\sum_{d\mid n}1.$$

引理 4　在引理 3 的记号下, 令

$$R(D,q)=\sum_{d\leqslant D/q}\max_{(l,dq)=1}\max_{y\leqslant N}\left|\sum_{a\leqslant N^{\beta},\ (a,d)=1}g(a)\left(\pi(y;a,dq,l)-\frac{\mathrm{Li}(y/a)}{\varphi(dq)}\right)\right|,$$

则对任意 $A>0$, 存在 $B=B(A)>0$, 使得对于区间$[1,N^{\frac{1}{37}}]$中除了 $O\left(N^{\frac{1}{37}}\log^{-A}N\right)$ 个例外的整数 q, 都有

$$R(D,q)\ll N^{\frac{36}{37}}/\log^A N,$$

这里 $D=N^{\frac12}/\log^B N$.

证　由引理 3 得

$$\sum_{q\leqslant N^{\frac{1}{37}}}R(D,q)=\sum_{q\leqslant N^{\frac{1}{37}}}\sum_{d\leqslant\frac{D}{q}}\max_{y\leqslant N}\max_{(l,dq)=1}\left|\sum_{a\leqslant N^{\beta},\ (a,d)=1}g(a)\left(\pi(y;a,dq,l)-\frac{\mathrm{Li}(y/a)}{\varphi(dq)}\right)\right|\ll$$

$$\sum_{d\leqslant D}\tau(d)\max_{y\leqslant N}\max_{(l,dq)=1}\left|\sum_{a\leqslant N^{\beta},(a,d)=1}g(a)\left(\pi(y;a,d,l)-\frac{\mathrm{Li}\left(y/a\right)}{\varphi(d)}\right)\right|\ll N/\log^{2A}N,$$

$$\sum_{\substack{q\leqslant N^{1/37}\\ R(D,q)>N^{36/37}/\log^{A}N}}1\leqslant\frac{\log^{A}N}{N^{\frac{36}{37}}}\sum_{q\leqslant N^{\frac{1}{37}}}R(D,q)\ll\frac{N^{\frac{1}{37}}}{\log^{A}N}.$$

2 加权筛法

设 N 为一充分大的偶数,

$$1\leqslant q\leqslant N^{\frac{1}{37}},\quad (l_i,q)=1\quad(i=1,2),\quad l_1+l_2\equiv N(\mathrm{mod}\,q),$$

$$\mathscr{A}=\left\{N-p\mid p<N,\ p\equiv l_1(\mathrm{mod}\,q)\right\},\tag{2.1}$$

$$\mathscr{P}=\left\{p\mid (p,Nq)=1\right\}.\tag{2.2}$$

如果 $a\in\mathscr{A}$, 则

$$a=N-p\equiv l_1+l_2-p\equiv l_2(\mathrm{mod}\,q).$$

引理 5

$$S(N,q)\geqslant\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\ (a,P(N^{1/10.93}))=1}}\left(1-\frac{1}{2}\rho_1(a)-\frac{1}{2}\rho_2(a)-\rho_3(a)\right)+O(N^{9.93/10.93}),$$

其中

$$\rho_1(a)=\sum_{\substack{p\mid a,\ (p,Nq)=1\\ N^{1/10.93}\leqslant p<N^{1/3.3}}}1,$$

$$\rho_2(a)=\begin{cases}1, & a=p_1p_2p_3,\ N^{1/10.93}\leqslant p_1<N^{1/3.3}\leqslant p_2<p_3,\ (a,Nq)=1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$\rho_3(a)=\begin{cases}1, & a=p_1p_2p_3,\ N^{1/3.3}\leqslant p_1<p_2<p_3,\ (a,Nq)=1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证 令

$$v_1(a)=\sum_{p\mid a}1,\qquad v_2(a)=\sum_{p^m\mid a}1,$$

$$\lambda(a)=\begin{cases}1, & v_2(a)\leqslant 2,\\ 0, & v_2(a)>2,\end{cases}$$

则

$$S(N,q)\geqslant\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\ (a,P(N^{1/10.93}))=1}}\lambda(a)=\sum_{\substack{a\in\mathscr{A},\ (a,Nq)=1\\ (a,P(N^{1/10.93}))=1}}\lambda(a)+O(v_1^{10}(Nq))=$$

$$\sum_{\substack{a\in\mathscr{A},\ (a,Nq)=1\\ (a,P(N^{1/10.93}))=1}}\mu^2(a)\lambda(a)+O\left(N^{9.93/10.93}\right).$$

另一方面,

$$\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,\,P(N^{1/10.93}))=1}}\left(1-\frac{1}{2}\rho_1(a)-\frac{1}{2}\rho_2(a)-\rho_3(a)\right)=$$

$$\sum_{\substack{a\in\mathscr{A},\ (a,\,Nq)=1\\(a,\,P(N^{1/10.93}))=1}}\mu^2(a)\left(1-\frac{1}{2}\rho_1(a)-\frac{1}{2}\rho_2(a)-\rho_3(a)\right)+O\left(N^{9.93/10.93}\right).$$

对于

$$\mu^2(a)=1,\quad (a,\ P(N^{1/10.93}))=1,\quad (a,Nq)=1,$$

有

（ⅰ）$v_2(a)\leqslant 2$,

$$\lambda(a)=1\geqslant 1-\frac{1}{2}\rho_1(a)-\frac{1}{2}\rho_2(a)-\rho_3(a);$$

（ⅱ）$v_2(a)\geqslant 3$, 如果 $\rho_1(a)\geqslant 2$, 则

$$\lambda(a)=0\geqslant 1-\frac{1}{2}\rho_1(a)-\frac{1}{2}\rho_2(a)-\rho_3(a);$$

如果 $\rho_1(a)=1$，则 $v_1(a)=v_2(a)=3$，$\rho_2(a)=1$, 故

$$\lambda(a)=0=1-\frac{1}{2}\rho_1(a)-\frac{1}{2}\rho_2(a)-\rho_3(a);$$

如果 $\rho_1(a)=0$，则 $\rho_3(a)=1$,

$$\lambda(a)=0=1-\frac{1}{2}\rho_1(a)-\frac{1}{2}\rho_2(a)-\rho_3(a).$$

综合以上论证即得引理 5.

3 定理 2 的证明

本节中, 集合 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{P}$ 分别由(2.1)和(2.2)式确定，$\delta=1/37$ 且

$$X=\frac{\mathrm{Li}N}{\varphi(q)}\sim\frac{N}{\varphi(q)\log N}.$$

对于$(d,Nq)=1$，由孙子定理得

$$\mathscr{A}_d=\{N-p\mid p<N,\ p\equiv l_1(\mathrm{mod}\,q),\ p\equiv N(\mathrm{mod}\ d)\}=$$
$$\{N-p\mid p<N,\ p\equiv l(\mathrm{mod}\,qd)\},$$

其中$(l,dq)=1$, 故

$$r_d=\pi(N;\ dq,l)-\frac{\mathrm{Li}N}{\varphi(dq)},$$

$$\omega(d)=\frac{d}{\varphi(d)},\quad \mu(d)\neq 0,\quad (d,Nq)=1.$$

由引理 5 得

$$S(N,q)\geqslant S-\frac{1}{2}S_1-\frac{1}{2}S_2-S_3+O(N^{9.93/10.93}),\tag{3.1}$$

$$S=\sum_{\substack{a\in\mathscr{A},\ (a,\,Nq)=1\\\left(a,\ P(N^{1/10.93})\right)=1}}1,$$

$$S_1=\sum_{\substack{N^{1/10.93}\leqslant p<N^{1/3.3}\\(p,\ Nq)=1}} S(\mathscr{A}_p,\ \mathscr{P},\ N^{1/10.93}),$$

$$S_2=\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\ (a,\ Nq)=1\\(a,\ P(N^{1/10.93}))=1}} \rho_2(a),$$

$$S_3=\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\ (a,\ Nq)=1\\(a,\ P(N^{1/10.93}))=1}} \rho_3(a).$$

以下论证对区间$[1, N^{\frac{1}{37}}]$中除了$O\left(N^{\frac{1}{37}}\log^{-5}N\right)$个例外的整数$q$进行.

（ⅰ）S 的下界：

令$D=N^{\frac{1}{2}}/\log^B N$，$B=B(5)>0$（见引理4)，由引理4得

$$R(D, q)=\sum_{d\leqslant D/q}\left|\pi(N;\ dq,\ l)-\frac{\mathrm{Li}N}{\varphi(dq)}\right|\leqslant$$

$$\sum_{d\leqslant D/q}\max_{y\leqslant N}\max_{(l,\ dq)=1}\left|\pi(y;\ dq,\ l)-\frac{\mathrm{Li}y}{\varphi(dq)}\right|\ll\frac{N^{\frac{36}{37}}}{\log^5 N},\tag{3.2}$$

及

$$C(\omega)=\prod_p\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=$$

$$\prod_{p\mid Nq}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{(p,\ Nq)=1}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=$$

$$\prod_{p\mid Nq}\frac{p}{p-1}\prod_{(p,\ Nq)=1}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}=$$

$$2\prod_{p\mid Nq,\ p>2}\left(\frac{p}{p-1}\circ\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\right)\prod_{p>2}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}=$$

$$2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\mid Nq,\ p>2}\frac{p-1}{p-2}=2C(N, q).\tag{3.3}$$

由引理1、(3.2)和(3.3)式有

$$S\geqslant(1+o(1))\frac{8C(N, q)}{1-2\delta}\frac{N}{\varphi(q)\log^2 N}\left(\log(4.465-10.93\,\delta)+\right.$$

$$\left.\int_2^{3.465-10.93\,\delta}\frac{\log(s-1)}{s}\log\frac{4.465-10.93\,\delta}{s+1}\mathrm{d}s\right)\geqslant$$

$$12.259\,8\,C(N, q)\frac{N}{\varphi(q)\log^2 N}.\tag{3.4}$$

（ⅱ）S_1 的上界：

令$D=N^{\frac{1}{2}}/\log^B N$，$B=B(5)>0$（见引理4）. 对于$N^{1/10.93}\leqslant p<N^{1/3.3}$，由引理1得

$$S(\mathscr{A}_p,\ \mathscr{P},\ N^{1/10.93})\leqslant 21.86(1+o(1))C(N, q)\mathrm{e}^{-\gamma}。$$

$$\frac{N}{p\varphi(q)\log^2 N}F\left(5.465-10.93\delta-10.93\frac{\log p}{\log N}\right)+R_D(p), \tag{3.5}$$

其中

$$R_D(p)=\sum_{d<\frac{D}{pq},\ d\mid P(N^{1/10.93})}|r_{dp}|.$$

由引理4 有

$$\sum_{\substack{N^{1/10.93}\leqslant p<N^{1/3.3}\\(p,Nq)=1}}R_D(p)=\sum_{\substack{N^{1/10.93}\leqslant p<N^{1/3.3}\\(p,Nq)=1}}\sum_{d<\frac{D}{pq},\ d\mid P(N^{1/10.93})}\left|\pi(N;dpq,l)-\frac{\mathrm{Li}N}{\varphi(dpq)}\right|\leqslant$$

$$\sum_{d\leqslant D/q}\max_{(l,dq)=1}\max_{y\leqslant N}\tau(d)\left|\pi(y;dq,l)-\frac{\mathrm{Li}y}{\varphi(dq)}\right|\ll\frac{N^{\frac{36}{37}}}{\log^5 N}. \tag{3.6}$$

由(3.5)和(3.6)式、素数定理及分部积分得

$$S_1\leqslant 21.86(1+o(1))C(N,q)\mathrm{e}^{-\gamma}\frac{N}{\varphi(q)\log^2 N}\cdot$$

$$\sum_{\substack{N^{1/10.93}\leqslant p<N^{1/3.3}\\(p,Nq)=1}}\frac{1}{p}F\left(5.465-10.93\delta-10.93\frac{\log p}{\log N}\right)=$$

$$21.86(1+o(1))C(N,q)\mathrm{e}^{-\gamma}\frac{N}{\varphi(q)\log^2 N}\cdot$$

$$\int_{N^{1/10.93}}^{N^{1/3.3}}\frac{1}{u\log u}F\left(5.465-10.93\delta-10.93\frac{\log u}{\log N}\right)\mathrm{d}u=$$

$$(1+o(1))\frac{8C(N,q)}{1-2\delta}\frac{N}{\varphi(q)\log^2 N}\left(\log\frac{8.93-21.86\delta}{1.3-6.6\delta}+\right.$$

$$\left.\int_2^{3.465-10.93\delta}\frac{\log(s-1)}{s}\log\frac{(4.465-10.93\delta)(4.465-10.93\delta-s)}{s+1}\mathrm{d}s\right)\leqslant$$

$$17.70495\frac{C(N,q)N}{\varphi(q)\log^2 N}. \tag{3.7}$$

(ⅲ) S_2 和 S_3 的上界：

由 $\rho_2(a)$的定义, 有

$$S_2=\sum_{\substack{N^{1/10.93}\leqslant p_1<N^{1/3.3}\leqslant p_2<\left(\frac{N}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\(p_1p_2,Nq)=1}}\ \sum_{\substack{a\in\mathscr{A},\ a=p_1p_2p_3\\p_2<p_3,\ (p_3,Nq)=1}}1=$$

$$\sum_{\substack{N^{1/10.93}\leqslant p_1<N^{1/3.3}\leqslant p_2<\left(\frac{N}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\(p_1p_2,Nq)=1}}\ \sum_{\substack{p=N-p_1p_2p_3,\ p\equiv l_1(\mathrm{mod}\,q)\\p_2<p_3<\frac{N}{p_1p_2},\ (p_3,Nq)=1}}1.$$

考虑集合

$$\mathscr{E}=\left\{e\,\middle|\,e=p_1p_2,\ N^{1/10.93}\leqslant p_1<N^{1/3.3}\leqslant p_2<(N/p_1)^{\frac{1}{2}},\ (p_1p_2,Nq)=1\right\},$$

$$\mathscr{L}=\{l\mid l=N-ep,\ e\in\mathscr{E},\ ep<N,\ (p,Nq)=1,\ l\equiv l_1(\mathrm{mod}\ q)\},$$

有

$$|\mathscr{E}| \leqslant \sum_{N^{1/10.93} \leqslant p_1 < N^{1/3.3}} \left(N/p_1\right)^{1/2} < N^{43/66}, \quad e \geqslant N^{13/33}, \quad e \in \mathscr{E}.$$

集合 $\mathscr{L}$ 中小于 $N^{\frac{13}{33}}$ 的元素的个数不超过 $N^{\frac{43}{66}}$，S_2 不超过集合 $\mathscr{L}$ 中的素数的个数，因此

$$S_2 \leqslant S(\mathscr{L}, \mathscr{P}, z) + O\left(N^{\frac{43}{66}}\right), \quad z \leqslant N^{\frac{13}{33}}. \tag{3.8}$$

现在应用引理 1 来估计 $S(\mathscr{L}, \mathscr{P}, z)$ 的上界．对于集合 $\mathscr{L}$，

$$X = \sum_{e \in \mathscr{E}} \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \mathrm{Li}\left(\frac{N}{e}\right),$$

$$\omega(d) = d/\varphi(d), \quad \mu(d) \neq 0, \quad (d, Nq) = 1,$$

$$D = N^{\frac{1}{2}}/\log^B N, \quad z = \left(D/q\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $B = B(5) > 0$（见引理 4）．由引理 1 得

$$S(\mathscr{L}, \mathscr{P}, z) \leqslant \frac{8}{1-2\delta}(1+o(1))C(N, q)\frac{X}{\log N} + R_1 + R_2, \tag{3.9}$$

这里

$$R_1 = \sum_{d \leqslant D/q, (d, Nq)=1} \left| \sum_{e \in \mathscr{E}, (e, d)=1} \left(\pi(N; e, dq, l) - \frac{\mathrm{Li}\left(N/e\right)}{\varphi(dq)} \right) \right|,$$

$$R_2 = \sum_{d \leqslant D/q, (d, Nq)=1} \frac{1}{\varphi(dq)} \sum_{e \in \mathscr{E}, (e, d)>1} \mathrm{Li}\left(\frac{N}{e}\right).$$

由于 $N^{13/33} \leqslant e < N^{2/3.3}$，$e \in \mathscr{E}$，

$$R_1 \leqslant \sum_{d \leqslant D/q} \max_{y \leqslant N} \max_{(l, dq)=1} \left| \sum_{N^{13/33} \leqslant a < N^{2/3.3}, (a, d)=1} g(a) \left(\pi(y; a, dq, l) - \frac{\mathrm{Li}\left(y/a\right)}{\varphi(dq)} \right) \right|,$$

其中

$$g(a) = \sum_{a=e, e \in \mathscr{E}} 1 \ll 1,$$

由引理 4 得

$$R_1 \ll N^{\frac{36}{37}}/\log^5 N. \tag{3.10}$$

又

$$\begin{aligned} R_2 &\ll \frac{N}{\varphi(q)\log N} \sum_{d \leqslant D/q} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{a < N^{2/3.3}, (a, d) \geqslant N^{1/10.93}} \frac{1}{a} \ll \\ &\frac{N}{\varphi(q)\log N} \sum_{d \leqslant D} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{m | d, m \geqslant N^{1/10.93}} \sum_{a < N^{2/3.3}, (a, d)=m} \frac{1}{a} \ll \\ &\frac{N}{\varphi(q)} \sum_{d \leqslant D} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{m | d, m \geqslant N^{1/10.93}} \frac{1}{m} \ll \\ &\frac{N}{\varphi(q)} \sum_{N^{1/10.93} \leqslant m \leqslant D} \frac{1}{m} \sum_{d \leqslant D, m | d} \frac{1}{\varphi(d)} \ll \frac{N^{\frac{21}{22}}}{\varphi(q)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

由素数定理及分部积分得

$$X = (1 + o(1)) \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{e \in \mathscr{E}} \frac{N}{e \log \frac{N}{e}} =$$

$$(1 + o(1)) \frac{N}{\varphi(q)} \int_{N^{1/10.93}}^{N^{1/3.3}} \frac{\mathrm{d}t}{t \log t} \int_{N^{1/3.3}}^{(N/t)^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{d}u}{u \log u \log \frac{N}{ut}} =$$

$$(1 + o(1)) \frac{N}{\varphi(q) \log N} \int_{2.3}^{9.93} \frac{\log \left(2.3 - \frac{3.3}{s+1} \right)}{s} \mathrm{d}s. \tag{3.12}$$

由(3.8)~(3.12)式得

$$S_2 \leqslant 6.487\,43 C(N, q) \frac{N}{\varphi(q) \log^2 N}. \tag{3.13}$$

类似地，有

$$S_3 \leqslant (1 + o(1)) \frac{8 C(N, q) N}{(1 - 2\delta) \varphi(q) \log^2 N} \int_2^{2.3} \frac{\log(s-1)}{s} \mathrm{d}s \leqslant$$

$$0.158\,23 C(N, q) \frac{N}{\varphi(q) \log^2 N}. \tag{3.14}$$

由(3.4)、(3.7)、(3.13)、(3.14)和(3.1)式得

$$S(N, q) \geqslant \left(12.259\,8 - \frac{17.704\,95}{2} - \frac{6.487\,43}{2} - 0.158\,23 \right) C(N, q) \frac{N}{\varphi(q) \log^2 N} \geqslant$$

$$0.001 \frac{C(N, q) N}{\varphi(q) \log^2 N}.$$

定理 2 证毕.

参 考 文 献

1 Vinogradov I M. Representation of odd numbers as the sum of three primes. Dokl SSSR, 1937, 15: 291~294
2 Tames R D, Weyl H. Elementary note on prime-number problems of Vinogradov's type. Amer J Math, 1942, 64: 539~552
3 Richert H E. Aus der additiven Primzahltheorie. J für Math, 1953, 191: 179~198
4 Van der Corput J G. Proprietes additives. Acta Arith, 1939, 3. 3: 181~234
5 Zulauf A. Beweis einer Erweiterung des Satzes von Goldbach-Vinogradov. J Reine Angew Math, 1952, 190: 169~198
6 Liu Ming-chit, Zhan Tao. The Goldbach problem with primes in arithmetical progressions. In: Motohashi Y, ed. Analytic Number Theory. Lecture Notes Math, Vol 247. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 227~252
7 Liu Jianya, Zhan Tao. The ternary Goldbach problem in arithmetical progressions. Acta Arith, 1997, 82: 197~227
8 陈景润. 大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和. 科学通报, 1966, 17: 385~386
9 陈景润. 大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和. 中国科学, 1973, (2): 111~128
10 陈景润. 1+2 系数估计的进一步改进——大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和(Ⅱ). 中国科学, A 辑, 1978, (5): 477~494
11 Iwaniec H. Rosser's sieve. In: Halberstam H, Hooley C, eds. Recent Progress in Analytic Number Theory Ⅱ. London: Academic Press, 1981. 203~230
12 潘承洞, 潘承彪. 哥德巴赫猜想. 北京: 科学出版社, 1984