非线性期望下的 Stein 方法

献给严加安院士 80 华诞

宋永生

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: yssong@amss.ac.cn

收稿日期: 2020-06-25; 接受日期: 2021-01-27; 网络出版日期: 2021-11-15

国家自然科学基金 (批准号: 11871458) 资助项目

摘要 Stein 方法是正态逼近的常用方法. 本文介绍非线性期望下 Stein 方法的基本框架, 以及如何利用 Stein 方法给出非线性期望下中心极限定理和大数定律的收敛速度.

关键词 非线性期望 Stein 方法 中心极限定理 大数定律

MSC (2020) 主题分类 60F05, 60G50

1 引言

中心极限定理是概率论最重要和最有用的结果之一. 粗略地说, 经典的中心极限定理告诉我们, 众多相互独立的随机因素的累积, 其分布可以用正态分布来逼近. 这也解释了在各种场合使用正态分布的合理性.

受统计中的模型不确定性及金融中的风险度量、上对冲等问题的启发, Peng^[1] 引入了非线性期望的理论框架. 在次线性期望空间 $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ 中, 称随机变量 X 满足 G -正态分布, 如果 $\hat{\mathbb{E}}[|X|^3] < \infty$, 且对于 X 的任意独立复制版本 X' 和实数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有

$$\alpha X + \beta X' \stackrel{d}{=} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} X.$$

我们知道, 如果 $\hat{\mathbb{E}}$ 是由概率测度生成的线性期望, 则满足以上性质的随机变量满足均值为 0 的正态分布. 因此, G -正态分布是经典正态分布的自然推广. 同经典正态分布一样, G -正态分布也可以通过偏微分方程来刻画 (参见定理 2.1). 不同的是相应的偏微分方程是全非线性的. 假设 X 满足 G -正态分布, 对任意的 $\varphi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ 上的有界 Lipschitz 函数全体), 定义 $\mathcal{N}_G[\varphi] = \hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$, 则 $\mathcal{N}_G$ 为 $C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 上的次线性期望, 称为 G -正态分布. 这里的函数 $G(a) = \frac{1}{2}\hat{\mathbb{E}}[aX^2]$ ($a \in \mathbb{R}$) 刻画了随机变量 X 的方差, 称为 X 的方差函数.

英文引用格式: Song Y. Stein's method under sublinear expectations (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1845–1860, doi: 10.1360/SSM-2020-0206

Peng^[2] 证明了次线性期望下的中心极限定理 (定理 2.1), 这是非线性期望理论发展的里程碑. 该定理告诉我们, 不确定环境下独立因素的累积, 可以通过 G - 正态分布来逼近. 因此, 非线性期望下的 G - 正态分布发挥着概率空间中正态分布同样重要的作用.

一个关键问题是, 如何给出非线性期望下中心极限定理的收敛速度, 或者说 G - 正态逼近的误差.

概率空间中证明极限定理的一些常用且有效的工具, 如特征函数方法, 在非线性期望空间中不再适用. 本文介绍非线性期望下的 Stein 方法, 由此给出非线性期望下中心极限定理和大数定律的收敛速度.

需要说明的是, 经典 (弱) 大数定律的证明非常简单, 不需要使用 Stein 方法. 但在次线性期望下, 情况完全不同. 首先, 非线性期望下大数定律的极限分布不再是确定的常数. 另外, 文献 [3] 证明了次线性期望下一列独立同分布随机变量的经验均值不是 L^p - 基本列.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节介绍非线性期望的一些基本概念. 第 3 节介绍 G - 正态分布的 Stein 刻画. 第 4 节介绍非线性期望下的 Stein 方法: 正态逼近的 Stein 方法和大数定律的 Stein 方法. 作为应用, 我们给出非线性期望下中心极限定理和大数定律的收敛速度.

2 基本概念

本节介绍非线性期望的一些基本概念和准备知识. 相关内容可以参见彭实戈的一系列奠基性文献 [4–9].

设 Ω 为给定的集合. 令 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的实值函数构成的一个线性空间, 使得对任意 $X \in \mathcal{H}$ 和 $\varphi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$, 有 $|X|, \varphi(X) \in \mathcal{H}$.

定义 2.1 称泛函 $\hat{\mathbb{E}}: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ 为次线性期望, 如果它满足以下性质:

- (E1) $\hat{\mathbb{E}}[X] \geq \hat{\mathbb{E}}[Y]$, 如果 $X \geq Y$;
- (E2) $\hat{\mathbb{E}}[\lambda X] = \lambda \hat{\mathbb{E}}[X]$, 对于 $\lambda \geq 0$;
- (E3) $\hat{\mathbb{E}}[c] = c$, 对于 $c \in \mathbb{R}$;
- (E4) $\hat{\mathbb{E}}[X + Y] \leq \hat{\mathbb{E}}[X] + \hat{\mathbb{E}}[Y]$, 对于 $X, Y \in \mathcal{H}$.

容易验证, 对于次线性期望 $\hat{\mathbb{E}}$, 以下性质成立:

- (E5) $\hat{\mathbb{E}}[\varphi_n(X)] \downarrow 0$, 对于 $X \in \mathcal{H}$ 及 $\varphi_n \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$, $\varphi_n \downarrow 0$.

事实上, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $R > 0$ 使得 $\frac{\hat{\mathbb{E}}[|X|] \|\varphi_1\|_\infty}{R} < \varepsilon$. 对于满足 $1_{\{|x| \leq R\}} \leq \phi_R(x) \leq 1_{\{|x| \leq R+1\}}$ 的 $\phi_R \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 有

$$\varphi_n(X) = \varphi_n(X)\phi_R(X) + \varphi_n(X)(1 - \phi_R(X)) \leq \varphi_n(X)\phi_R(X) + \frac{|X| \|\varphi_1\|_\infty}{R}.$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{E}}[\varphi_n(X)] \leq \frac{\hat{\mathbb{E}}[|X|] \|\varphi_1\|_\infty}{R} < \varepsilon.$$

称 $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ 为次线性期望空间. 对于 $X \in \mathcal{H}$, 令

$$\mathcal{N}^X[\varphi] = \hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)], \quad \varphi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R}).$$

这是 $C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 上的一个次线性期望. 称 X 遵从分布 $\mathcal{N}^X$, 记作 $X \sim \mathcal{N}^X$.

$C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 上的一个实值泛函 $\mathcal{N}$ 是次线性期望当且仅当它可以表示为 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上一族弱紧的概率测度 Θ 的期望的上端 (参见文献 [10]):

$$\mathcal{N}[\varphi] = \sup_{\mu \in \Theta} \mu[\varphi], \quad \text{对任意 } \varphi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R}). \quad (2.1)$$

本文总是假定

(H1) Θ 是弱紧的;

(H2) $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{N}[|x|1_{|x|>N}] = 0$.

定义 2.2 设 $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ 为一个次线性期望空间. 称一个随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m) \in \mathcal{H}^m$ 独立于 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{H}^n$, 如果对任意的 $\varphi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R}^{n+m})$, 有

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{X})] = \hat{\mathbb{E}}[\hat{\mathbb{E}}[\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{X})] |_{\mathbf{y}=\mathbf{Y}}].$$

在一个次线性期望空间中, $\mathbf{X}$ 独立于 $\mathbf{Y}$ 并不蕴涵 $\mathbf{Y}$ 独立于 $\mathbf{X}$. 称 $(X_i)_{i \geq 1}$ 是一列独立的随机变量, 如果对任意的 $i \in \mathbb{N}$, X_{i+1} 独立于 $(X_1, \dots, X_i)$.

定义 2.3 设 $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ 和 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathbb{E}})$ 为两个次线性期望空间. 称 $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ 中的随机向量 $\mathbf{X}$ 同分布于 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathbb{E}})$ 中的随机向量 $\mathbf{Y}$ (记作 $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{Y}$), 如果对任意的有界 Lipschitz 函数 φ , 有

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(\mathbf{X})] = \tilde{\mathbb{E}}[\varphi(\mathbf{Y})].$$

Peng^[2] 证明了非线性期望下如下形式的中心极限定理.

定理 2.1 令 $(X_i)_{i \geq 1}$ 为次线性期望 $\hat{\mathbb{E}}$ 下一列独立同分布的随机变量. 设 $\hat{\mathbb{E}}[X_1] = \hat{\mathbb{E}}[-X_1] = 0$, 且对于某个 $\delta > 0$, 有 $\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^{2+\delta}] < \infty$, 则对于任意的有界 Lipschitz 函数 $\varphi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{N}_G[\varphi] := \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{E}} \left[\varphi \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \right) \right] \quad (2.2)$$

存在且有限, 并且有 $\mathcal{N}_G[\varphi] = u^\varphi(1, 0)$. u^φ 是以下 G -热方程的黏性解:

$$\begin{aligned} \partial_t u - G(D_x^2 u) &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $G(a) = \frac{1}{2} \hat{\mathbb{E}}[aX_1^2]$, $a \in \mathbb{R}$.

容易验证, $\mathcal{N}_G$ 为 $C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 上的次线性期望, 称为 G -正态分布. 本文只考虑非退化的 G -正态分布 ($-\mathcal{N}_G[-x^2] > 0$). 此时 G -热方程有唯一的经典解 u (参见文献 [11]), 并且存在 $\alpha \in (0, 1)$ 使得对任意的 $0 < a < b < \infty$, 有 $\|u\|_{C^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}([a, b] \times \mathbb{R})} < \infty$.

3 G -正态分布的 Stein 刻画

Stein 方法是正态逼近的常用工具. 与特征函数方法相比, Stein 方法具有更好的概率直观. 首先回顾经典的 Stein 方法, 这方面的系统介绍可参见文献 [12].

3.1 概率空间中的 Stein 方法

Stein^[13] 给出了正态分布的如下刻画: 一个概率测度 μ 是均值为 0、方差为 σ^2 的正态分布 (记为 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$) 当且仅当

$$\int_{\mathbb{R}} [x\varphi'(x) - \sigma^2\varphi''(x)]\mu(dx) = 0, \quad \text{对任意的 } \varphi \in C_b^2(\mathbb{R}). \quad (3.1)$$

(3.1) 称为正态分布的 Stein 刻画, 它定性地刻画了一个概率分布是否为正态分布. 由此性质启发引入的如下形式的 Stein 方程, 可以用于定量地刻画某个概率分布 ν 与正态分布 μ 之间的距离:

$$\frac{\sigma^2}{2}f''(x) - \frac{1}{2}xf'(x) = \varphi(x) - \mu[\varphi]. \quad (3.2)$$

在 Stein 方程的两边同时关于概率测度 ν 取期望, 可得

$$\nu[\varphi] - \mu[\varphi] = \nu\left[\frac{\sigma^2}{2}f''(x) - \frac{1}{2}xf'(x)\right].$$

因此可以通过计算期望 $\nu[\frac{\sigma^2}{2}f''(x) - \frac{1}{2}xf'(x)]$ 来估算 $\nu[\varphi] - \mu[\varphi]$, 这是 Stein 方法的主要思想和关键步骤.

3.2 G - 正态分布的 Stein 刻画

对于正态分布 μ , 有两种方式来理解 (3.1):

(1) 正态分布的分布密度可以显式地写出, 容易看到 (3.1) 其实就是分部积分公式;

(2) 令 $P_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\mu(dy)$ 为 Ornstein-Uhlenbeck 半群, 则其不变概率测度和无穷小生成子分别为 μ 和 $L\varphi(x) = -x\varphi'(x) + \sigma^2\varphi''(x)$. 因此,

$$\int_{\mathbb{R}} L\varphi(x)\mu(dx) = \lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{P_t\varphi(x) - \varphi(x)}{t} \mu(dx) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} P_t\varphi(x)\mu(dx) - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mu(dx)}{t} = 0.$$

可惜的是这两种推导都用到了期望的可加性, 无法推广到非线性期望的情形. 事实上, 有反例说明 (3.1) 在非线性期望下的直接类比是不对的 (参见文献 [14]), 例如, 存在 $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$, 使得 $\mathcal{N}_G[\mathcal{L}_G\varphi] \neq 0$, 其中 $\mathcal{L}_G\varphi(x) = -\frac{x}{2}\varphi'(x) + G(\varphi''(x))$.

因此, 首要的任务是找到 G - 正态分布 Stein 刻画的正确形式. Hu 等^[15] 给出了 G - 正态分布的 Stein 刻画.

定理 3.1 设 $\mathcal{N}[\varphi] = \sup_{\mu \in \Theta} \mu[\varphi]$ ($\varphi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$) 为一个次线性期望, 则 $\mathcal{N}$ 为 G - 正态分布当且仅当对任意的 $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$, 以及使得 $\mu[\varphi] = \mathcal{N}[\varphi]$ 的 $\mu \in \Theta$, 有

$$\int_{\mathbb{R}} \left[G(\varphi''(x)) - \frac{x}{2}\varphi'(x) \right] \mu(dx) = 0. \quad (\text{SH})$$

也就是说, (SH) 不再关于 $\mathcal{N}$ 成立, 而是在 $\mathcal{N}$ 的切向量处成立. 由于 $\mathcal{N}$ 为非线性期望, 因此, 它在不同的函数 φ 处的切向量不同.

本文将不给出定理 3.1 的完整证明, 而只是对表达式 (SH) 给出启发式的说明.

设 u 为初值为 φ 的 G - 热方程 (2.3) 的解. 对任意的 $t \in [0, 1]$, 令 $w_2(t) = \mathcal{N}[u(t, \sqrt{1-t} \cdot)]$.

必要性 若 $\mathcal{N}$ 为 G - 正态分布, 则 w_2 为常值函数: $\dot{w}_2(t) = 0$.

需要给出 $\dot{w}_2(t)$ 的表达式, 即次线性期望求导的表达式 (参见文献 [15, 引理 2.2]). 我们知道求导和线性期望是可以交换顺序的. 虽然该性质对次线性期望不再成立, 但可以证明如下类似的结论:

简单地说, 如果函数 w_2 在 t 点可导, 可以把求导放在期望里面, 而把期望换成关于任意的概率测度 $\mu \in \Theta$, 使得 $\mu[u(t, \sqrt{1-t} \cdot)] = \mathcal{N}[u(t, \sqrt{1-t} \cdot)]$. 注意到

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(t, \sqrt{1-t}x)) = \left(G(\partial_x^2 u) - \frac{x}{2\sqrt{1-t}} \partial_x u \right)(t, \sqrt{1-t}x) = \mathcal{L}_G \varphi_t(x),$$

其中 $\varphi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}u(t, \sqrt{1-t}x)$. 因此, $\dot{w}_2(t) = 0$ 等价于

$$\int_{\mathbb{R}} \left[G(\varphi_t''(x)) - \frac{x}{2} \varphi_t'(x) \right] \mu(dx) = 0.$$

这也解释了为什么会出现 (SH).

充分性 如果 (SH) 成立, 由必要性证明中的讨论可知, $\dot{w}_2(t) = 0$. 于是有

$$\mathcal{N}[\varphi] = w_2(0) = w_2(1) = \mathcal{N}_G[\varphi].$$

G -正态分布的 Stein 刻画定性地刻画了 G -正态分布. 下一个目标是找到非线性期望下 Stein 方程的替代工具, 定量地度量某个非线性分布与 G -正态分布之间的距离.

4 非线性期望下的 Stein 方法

本节介绍非线性期望下的 Stein 方法, 以及如何利用 Stein 方法证明非线性期望下中心极限定理和大数定律的误差估计.

- 设 $\mathcal{N}[\varphi] = \sup_{\mu \in \Theta} \mu[\varphi]$ ($\varphi \in C_{b, \text{Lip}}(\mathbb{R})$) 为一个次线性期望.
- 设 $u: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为 (足够) 光滑的函数, 使得 $u(0, x) = \phi(x)$.

我们的目标是估计 $\mathcal{N}[\phi] - u(1, 0)$. 注意到, 若 u 为 G -热方程的解, 则 $u(1, 0) = \mathcal{N}_G[\phi]$.

本节内容分为两部分: 正态逼近的 Stein 方法和大数定律的 Stein 方法.

4.1 正态逼近的 Stein 方法

对任意的 $t \in [0, 1]$, 令 $w_2(t) = \mathcal{N}[u(t, \sqrt{1-t} \cdot)]$, 则

$$u(1, 0) - \mathcal{N}[\phi] = w_2(1) - w_2(0) = \int_0^1 \dot{w}_2(t) dt. \quad (4.1)$$

由文献 [15, 引理 2.2] 知, 对几乎所有的 $t \in [0, 1]$, 有

$$\dot{w}_2(t) = \int_{\mathbb{R}} \left[\partial_t u(t, \sqrt{1-t}x) - \frac{x}{2\sqrt{1-t}} \partial_x u(t, \sqrt{1-t}x) \right] \mu_t(dx),$$

其中 $\mu_t \in \Theta$ 满足 $\mu_t[u(t, \sqrt{1-t} \cdot)] = \mathcal{N}[u(t, \sqrt{1-t} \cdot)]$.

令 $G_{\mathcal{N}}(a) := \frac{1}{2} \mathcal{N}[ax^2]$, $a \in \mathbb{R}$, 以及 $f(t, x) := \partial_t u(t, x) - G_{\mathcal{N}}(\partial_x^2 u(t, x))$. 于是,

$$\dot{w}_2(t) = \int_{\mathbb{R}} \left[\left(G_{\mathcal{N}}(\partial_x^2 u) - \frac{x}{2\sqrt{1-t}} \partial_x u + f \right)(t, \sqrt{1-t}x) \right] \mu_t(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\left(G_{\mathcal{N}}(\partial_x^2 \phi_t(x)) - \frac{x}{2} \partial_x \phi_t(x) \right) + f(t, \sqrt{1-t}x) \right] \mu_t(dx), \quad (4.2)$$

其中 $\phi_t(x) = \frac{1}{1-t} u(t, \sqrt{1-t}x)$.

因此, 有以下结论:

定理 4.1 对于 $C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 上的任意次线性期望 $\mathcal{N}$ 以及满足 $u \in C^{1,2}((0,1] \times \mathbb{R})$ 且 $u(0, \cdot) = \phi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 的任意的函数 $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 有

$$u(1, 0) - \mathcal{N}[\phi] = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left[\left(G_{\mathcal{N}}(\partial_x^2 \phi_t(x)) - \frac{x}{2} \partial_x \phi_t(x) \right) + f(t, \sqrt{1-t}x) \right] \mu_t(dx) dt, \quad (4.3)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= \frac{1}{1-t} u(t, \sqrt{1-t}x), \\ f(t, x) &= \partial_t u(t, x) - G_{\mathcal{N}}(\partial_x^2 u(t, x)), \\ \mu_t &\in \Theta, \quad \mu_t[\phi_t] = \mathcal{N}[\phi_t]. \end{aligned}$$

当 u 为初值为 ϕ 的 $G_{\mathcal{N}}$ - 热方程 (2.3) 的解时, 得到以下推论.

推论 4.1 ^[16] 对于 $C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 上的任意次线性期望 $\mathcal{N}$ 和任意的 $\phi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$, 有

$$\mathcal{N}_{G_{\mathcal{N}}}[\phi] - \mathcal{N}[\phi] = \int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}} G_{\mathcal{N}}(\partial_x^2 \phi_t(x)) - \frac{x}{2} \partial_x \phi_t(x) \mu_t(dx) \right] dt, \quad (4.4)$$

其中 $\phi_t(x) = \frac{1}{1-t} u(t, \sqrt{1-t}x)$, $\mu_t \in \Theta$ 满足 $\mu_t[\phi_t] = \mathcal{N}[\phi_t]$, u 为初值为 ϕ 的 $G_{\mathcal{N}}$ - 热方程 (2.3) 的解.

因此, 为了估计 $\mathcal{N}_{G_{\mathcal{N}}}[\phi] - \mathcal{N}[\phi]$, 只需计算形如 $\int_{\mathbb{R}} G_{\mathcal{N}}(\partial_x^2 \varphi(x)) - \frac{x}{2} \partial_x \varphi(x) \mu_{\varphi}(dx)$ ($\mu_{\varphi} \in \Theta$, $\mu_{\varphi}[\varphi] = \mathcal{N}[\varphi]$) 的期望. 这与经典的 Stein 方法类似. 另外, 回到线性情形 $\mathcal{N}[\phi] = \nu[\phi]$, ν 为任一概率测度, u 为初值为 ϕ 的热方程 $\partial_t u - \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 u = 0$ 的解, 则等式 (4.4) 转化为

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(0, \sigma^2)[\phi] - \nu[\phi] &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 \phi_t(x) - \frac{x}{2} \partial_x \phi_t(x) \right] \nu(dx) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 \left(\int_0^1 \phi_t(x) dt \right) - \frac{x}{2} \partial_x \left(\int_0^1 \phi_t(x) dt \right) \right] \nu(dx) \\ &=: \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 f(x) - \frac{x}{2} \partial_x f(x) \right] \nu(dx). \end{aligned}$$

因此,

$$\mathcal{N}(0, \sigma^2)[\phi] - \phi = \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 f(x) - \frac{x}{2} \partial_x f(x).$$

这就是经典的 Stein 方程.

以下引理给出了形如 $\int_{\mathbb{R}} [G_{\mathcal{N}}(\partial_x^2 \varphi(x)) - \frac{x}{2} \partial_x \varphi(x)] \mu_{\varphi}(dx)$ ($\mu_{\varphi} \in \Theta$, $\mu_{\varphi}[\varphi] = \mathcal{N}[\varphi]$) 的期望的估计.

引理 4.1 ^[16] 令 $\alpha \in (0, 1]$. 假设 $\mathcal{N}[x] = \mathcal{N}[-x] = 0$ 且 $\mathcal{N}[|x|^{2+\alpha}] < \infty$. 对于 $\phi \in C_b^{2,\alpha}(\mathbb{R})$ 以及使得 $\mu[\phi] = \mathcal{N}[\phi]$ 的 $\mu \in \Theta$, 有

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{x}{2} \phi'(x) - G_{\mathcal{N}}(\phi''(x)) \right] \mu(dx) \right| \leq 2[\phi'']_{\alpha} \mathcal{N}[|x|^{2+\alpha}].$$

注意到, 对于 $\phi_t(x) = \frac{1}{1-t}u(t, \sqrt{1-t}x)$, $[\phi_t'']_\alpha = [\partial_x^2 u(t, \cdot)]_\alpha |1-t|^{\alpha/2}$. 由定理 4.1 和引理 4.1, 得到以下估计.

定理 4.2 对于使得 $\mathcal{N}[x] = \mathcal{N}[-x] = 0$ 且 $\mathcal{N}[|x|^{2+\alpha}] < \infty$ 的 $C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 上的任意次线性期望 $\mathcal{N}$, 以及任意的 $\phi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$, 有

$$|\mathcal{N}_{G_N}[\phi] - \mathcal{N}[\phi]| \leq \int_0^1 2[\partial_x^2 u(t, \cdot)]_\alpha dt \times \mathcal{N}[|x|^{2+\alpha}], \quad (4.5)$$

其中 u 为初值为 ϕ 的 G_N -热方程 (2.3) 的解.

4.1.1 中心极限定理的误差估计—独立同分布情形

利用非线性期望下的 Stein 方法, 对非线性期望下的中心极限定理给出误差估计.

定理 4.3 ^[16] 设 $(X_i)_{i \geq 1}$ 为次线性期望 $\hat{\mathbb{E}}$ 下使得 $\hat{\mathbb{E}}[X_1] = \hat{\mathbb{E}}[-X_1] = 0$ 且 $\hat{\mathbb{E}}[X_1^2] = \bar{\sigma}^2 \geq -\hat{\mathbb{E}}[-X_1^2] = \underline{\sigma}^2 > 0$ 的一列独立同分布的随机变量. 对于函数 $\varphi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$, 令 u 为初值为 φ 的 G -热方程的解. 令 $W_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$, 对于 $\alpha \in (0, 1]$, 有

$$|\hat{\mathbb{E}}[\varphi(W_n)] - \mathcal{N}_G(\varphi)| \leq 2 \int_0^1 [D_x^2 u(s, \cdot)]_\alpha ds \frac{\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^{2+\alpha}]}{n^{\frac{\alpha}{2}}},$$

其中 $\mathcal{N}_G$ 是方差函数为 $G(a) = \frac{1}{2}\hat{\mathbb{E}}[aX_1^2]$ 的 G -正态分布.

证明 假设 $\int_0^1 [D_x^2 u(\cdot, s)]_\alpha ds < \infty$ 且 $\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^{2+\alpha}] < \infty$. 对于其他情形, 结论是平凡的.

固定 $n \in \mathbb{N}$. 对于 $0 \leq i \leq n$, 令

$$A_{i,n} = \hat{\mathbb{E}}\left[u\left(1 - \frac{i}{n}, \frac{X_1 + \cdots + X_i}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

于是, $A_{n,n} = \hat{\mathbb{E}}[\varphi(W_n)]$, $A_{0,n} = \mathcal{N}_G[\varphi]$, 且

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbb{E}}[\varphi(W_n)] - \mathcal{N}_G[\varphi]| &\leq \sum_{i=1}^n |A_{i,n} - A_{i-1,n}| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \hat{\mathbb{E}}\left[b_{i,n}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{i-1}}{\sqrt{n}}\right)\right] - \hat{\mathbb{E}}\left[c_{i,n}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{i-1}}{\sqrt{n}}\right)\right] \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sup_{x \in \mathbb{R}} |b_{i,n}(x) - c_{i,n}(x)|, \end{aligned}$$

其中

$$b_{i,n}(x) = \hat{\mathbb{E}}\left[u\left(1 - \frac{i}{n}, x + \frac{X_i}{\sqrt{n}}\right)\right], \quad c_{i,n}(x) = \mathbb{E}_G\left[u\left(1 - \frac{i}{n}, x + \frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

在本证明中把 $\mathcal{N}_G[\phi]$ 记作 $\mathbb{E}_G[\phi(\xi)]$.

现在利用次线性期望下的 Stein 方法 (定理 4.2) 来计算 $b_{i,n}(x) - c_{i,n}(x)$. 令 $\phi(y) := \phi_{x,i,n}(y) = u(1 - \frac{i}{n}, x + \frac{y}{\sqrt{n}})$. 于是, $c_{i,n}(x) = \mathcal{N}_G[\phi]$ 且 $b_{i,n}(x) = \hat{\mathbb{E}}[\phi(X_1)]$. 由定理 4.2, 有

$$|b_{i,n}(x) - c_{i,n}(x)| \leq \int_0^1 2[\partial_x^2 u^\phi(t, \cdot)]_\alpha dt \times \hat{\mathbb{E}}[|X_1|^{2+\alpha}],$$

其中 u^ϕ 是初值为 $\phi(y) = u(1 - \frac{i}{n}, x + \frac{y}{\sqrt{n}})$ 的 G -热方程 (2.3) 的解. 因此,

$$u^\phi(t, y) = u\left(1 - \frac{i-t}{n}, x + \frac{y}{\sqrt{n}}\right), \quad [\partial_x^2 u^\phi(t, \cdot)]_\alpha = \frac{1}{n^{1+\alpha/2}} \left[\partial_x^2 u\left(1 - \frac{i-t}{n}, \cdot\right) \right]_\alpha.$$

于是,

$$\begin{aligned} |b_{i,n}(x) - c_{i,n}(x)| &\leq \int_0^1 \frac{2}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}} \left[D_x^2 u\left(1 - \frac{i}{n} + \frac{s}{n}, \cdot\right) \right]_\alpha ds \times \hat{\mathbb{E}}[|X_1|^{2+\alpha}] \\ &= \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \int_{1-\frac{i}{n}}^{1-\frac{i-1}{n}} [D_x^2 u(s, \cdot)]_\alpha ds \times \hat{\mathbb{E}}[|X_1|^{2+\alpha}]. \end{aligned}$$

从而,

$$|\hat{\mathbb{E}}[\varphi(W_n)] - \mathcal{N}_G[\varphi]| \leq \sum_{i=1}^n \sup_{x \in \mathbb{R}} |b_{i,n}(x) - c_{i,n}(x)| \leq \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^1 [D_x^2 u(s, \cdot)]_\alpha ds \times \hat{\mathbb{E}}[|X_1|^{2+\alpha}].$$

证毕. $\square$

注 4.1 我们知道, 对于以 $\varphi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 为初值的 G -热方程 (2.3) 的解 u , 当 $t \downarrow 0$ 时, $[D_x^2 u(t, \cdot)]_\alpha$ 可能会趋于无穷大, 但 $\int_0^1 [D_x^2 u(s, \cdot)]_\alpha ds$ 却会是有限的. 因此, 这一项是该误差估计的关键.

由全非线性偏微分方程的内正则估计 (参见文献 [11, 17–21]), 可以推出 u 的以下估计.

定理 4.4 设 $\varphi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 且 $|\varphi|_{\text{Lip}} \leq 1$. 若 u 是初值为 φ 的 G -热方程 (2.3) 的解, 则存在仅依赖于 $\underline{\sigma}$ 和 $\bar{\sigma}$ 的 $\alpha \in (0, 1)$, 以及仅依赖于 $\alpha, \underline{\sigma}$ 和 $\bar{\sigma}$ 的正常数 $c_{\alpha,G}$, 使得

$$[D_x^2 u(t, \cdot)]_\alpha \leq c_{\alpha,G} \frac{1}{t^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}}}. \quad (4.6)$$

结合定理 4.3 和 4.4, 文献 [16] 给出了非线性期望下中心极限定理的如下收敛速度.

推论 4.2^[16] 设 $(X_i)_{i \geq 1}$ 为次线性期望 $\hat{\mathbb{E}}$ 下使得 $\hat{\mathbb{E}}[X_1] = \hat{\mathbb{E}}[-X_1] = 0$ 且 $\hat{\mathbb{E}}[X_1^2] = \bar{\sigma}^2 \geq -\hat{\mathbb{E}}[-X_1^2] = \underline{\sigma}^2 > 0$ 的一系列独立同分布的随机变量. 令 $W_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$, 则存在仅依赖于 $\underline{\sigma}$ 和 $\bar{\sigma}$ 的 $\alpha \in (0, 1)$, 以及仅依赖于 $\alpha, \underline{\sigma}$ 和 $\bar{\sigma}$ 的正常数 $C_{\alpha,G}$, 使得

$$\sup_{|\varphi|_{\text{Lip}} \leq 1} |\hat{\mathbb{E}}[\varphi(W_n)] - \mathcal{N}_G(\varphi)| \leq C_{\alpha,G} \frac{\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^{2+\alpha}]}{n^{\frac{\alpha}{2}}},$$

其中 $\mathcal{N}_G$ 是方差函数为 $G(a) = \frac{1}{2} \hat{\mathbb{E}}[aX_1^2]$ 的 G -正态分布.

这里 α 为定理 4.4 中的 Hölder 指数, 而 $C_{\alpha,G}$ 可以取为 $\frac{4}{1-\alpha} c_{\alpha,G}$, 其中 $c_{\alpha,G}$ 为定理 4.4 中的 Hölder 常数.

最近, Krylov^[22] 用不同的方法对非线性期望下的中心极限定理给出了类似的误差估计. 他仅利用了 G -热方程的解 u 的一致 Lipschitz 连续性, 得到的相应的误差估计的阶为 $n^{-\frac{1}{6}}$. 自然地, 我们期望利用 u 的高阶正则性对收敛速度给出更好的估计. 为此, 首先需要面对的困难是当 t 趋于 0 时, $[\partial_x^2 u(t, \cdot)]_\alpha$ 是爆炸的. 而文献 [16] 引入的非线性期望下的 Stein 方法很好地解决了这一难题. 事实上, 结合两种方法, 可以对中心极限定理误差的上界给出更好的估计 ($n^{-\frac{1}{2(2-\alpha)}}$).

定理 4.5¹⁾ 设 $(X_i)_{i \geq 1}$ 为次线性期望 $\hat{\mathbb{E}}$ 下一系列独立同分布的随机变量, 满足 $\hat{\mathbb{E}}[X_1] = \hat{\mathbb{E}}[-X_1] = 0$, $\hat{\mathbb{E}}[X_1^2] = \bar{\sigma}^2 \geq -\hat{\mathbb{E}}[-X_1^2] = \underline{\sigma}^2 > 0$, 且 $\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^3] < \infty$. 令 $W_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$, 则存在仅依赖于 $\underline{\sigma}$ 和 $\bar{\sigma}$

1) Jiao L, Song Y. The error estimates of central limit theorem under sublinear expectations. Preprint

的 $\alpha \in (0, 1)$, 以及仅依赖于 α , $\underline{\sigma}$ 和 $\bar{\sigma}$ 的正常数 $C_{\alpha, G}$, 使得对任意的函数 φ , $|\varphi|_{\text{Lip}} \leq 1$, 有

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(W_n)] - \mathcal{N}_G(\varphi) \leq C_{\alpha, G}(1 + \hat{\mathbb{E}}[|X_1|^3])n^{-\frac{1}{2(2-\alpha)}},$$

其中 $\mathcal{N}_G$ 是方差函数为 $G(a) = \frac{1}{2}\hat{\mathbb{E}}[aX_1^2]$ 的 G -正态分布.

证明 本定理的证明结合了文献 [16, 22] 中的方法. 下面给出证明梗概.

令 u 为初值为 φ 的 G -热方程的解. 设 $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 具有单位积分且支撑包含在 $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ 中. 对于 $\varepsilon \in (0, 1)$, 令 $\zeta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\zeta(x/\varepsilon)$, $u_\varepsilon(t, \cdot) = u(t, \cdot) * \zeta_\varepsilon$, 则

$$f^{(\varepsilon)} := \partial_t u_\varepsilon - G(\partial_x^2 u_\varepsilon) \geq 0.$$

由定理 4.1, 可得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{E}}[\varphi_\varepsilon(X_1)] - u_\varepsilon(1, 0) &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left[\left(\frac{x}{2} \partial_x \phi_t^{(\varepsilon)}(x) - G(\partial_x^2 \phi_t^{(\varepsilon)}(x)) \right) - f^{(\varepsilon)}(t, \sqrt{1-t}x) \right] \mu_t(dx) dt \\ &\leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left[\left(\frac{x}{2} \partial_x \phi_t^{(\varepsilon)}(x) - G(\partial_x^2 \phi_t^{(\varepsilon)}(x)) \right) \right] \mu_t(dx) dt, \end{aligned}$$

其中 $\phi_t^{(\varepsilon)}(x) = \frac{1}{1-t} u_\varepsilon(t, \sqrt{1-t}x)$, $\mu_t \in \Theta$ 满足 $\mu_t[\phi_t^{(\varepsilon)}] = \mathcal{N}[\phi_t^{(\varepsilon)}]$. 由引理 4.1, 有

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi_\varepsilon(X_1)] - u_\varepsilon(1, 0) \leq \int_0^1 2\|\partial_x^3 u_\varepsilon(t, \cdot)\|_\infty \hat{\mathbb{E}}[|X_1|^3] dt.$$

类似于定理 4.3 的推导, 可以得到

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi_\varepsilon(W_n)] - u_\varepsilon(1, 0) \leq \int_0^1 2\|\partial_x^3 u_\varepsilon(t, \cdot)\|_\infty dt \times \frac{\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^3]}{n^{1/2}}.$$

注意到 $|\hat{\mathbb{E}}[\varphi_\varepsilon(W_n)] - \hat{\mathbb{E}}[\varphi(W_n)]| \leq \varepsilon$, $|u_\varepsilon(1, 0) - u(1, 0)| \leq \varepsilon$, $\|\partial_x^3 u_\varepsilon(t, \cdot)\|_\infty \leq C\varepsilon^{\alpha-1}[\partial_x^2 u(t, \cdot)]_\alpha$, 因此,

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(W_n)] - \mathcal{N}_G[\varphi] \leq 2\varepsilon + C\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^3] \int_0^1 [\partial_x^2 u(t, \cdot)]_\alpha dt \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{n^{1/2}}.$$

取 ε 使得 $\varepsilon = \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{n^{1/2}}$, 即 $\varepsilon = n^{-\frac{1}{2(2-\alpha)}}$, 可得

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(W_n)] - \mathcal{N}_G(\varphi) \leq C(1 + \hat{\mathbb{E}}[|X_1|^3])n^{-\frac{1}{2(2-\alpha)}}.$$

证毕. □

4.1.2 中心极限定理的误差估计—非同分布的情形

设次线性期望 $\hat{\mathbb{E}}$ 下均值为零的随机变量 ($\hat{\mathbb{E}}[X] = \hat{\mathbb{E}}[-X] = 0$) 具有方差 $\bar{\sigma}^2 := \hat{\mathbb{E}}[X^2] \geq -\hat{\mathbb{E}}[-X^2] =: \underline{\sigma}^2 > 0$. 令 $\beta := \frac{\bar{\sigma}}{\underline{\sigma}}$ 且 $\sigma := \frac{\bar{\sigma} + \underline{\sigma}}{2}$. 利用 β 和 σ 刻画随机变量 X 的方差. 例如, 用 $\mathcal{N}_\beta(0, \sigma^2)$ 表示 G -正态分布 $\mathcal{N}_G$, $G(a) = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^2 a^+ - \underline{\sigma}^2 a^-)$. 显然, $\mathcal{N}_1(0, \sigma^2) = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 是经典的均值为 0、方差为 σ^2 的随机变量.

定理 4.6¹⁾ 设 $(X_i)_{i \geq 1}$ 为次线性期望 $\hat{\mathbb{E}}$ 下的一系列独立的随机变量, 满足 $\hat{\mathbb{E}}[X_i] = \hat{\mathbb{E}}[-X_i] = 0$, $\hat{\mathbb{E}}[X_i^2] = \bar{\sigma}_i^2 \geq -\hat{\mathbb{E}}[-X_i^2] = \underline{\sigma}_i^2 > 0$. 记 $\beta_i = \frac{\bar{\sigma}_i}{\underline{\sigma}_i}$ 且 $\sigma_i = \frac{\bar{\sigma}_i + \underline{\sigma}_i}{2}$.

令 $W_n := \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\sigma(n)}$, 其中 $\sigma(n) = (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)^{1/2}$, 则对任意的 $\beta \geq 1$, 存在 $\alpha \in (0, 1)$ 及依赖于 α 和 β 的正常数 $C_{\alpha, \beta}$, 使得

$$\sup_{|\phi|_{\text{Lip}} \leq 1} |\hat{\mathbb{E}}[\phi(W_n)] - \mathcal{N}_\beta(0, 1)(\phi)| \leq C_{\alpha, \beta}((M_{2+\alpha} + \Lambda(1))\Delta_n^{\frac{\alpha}{2}} + \Lambda(\Delta_n^{\frac{\alpha}{2}-1})), \quad (4.7)$$

其中 $M_{2+\alpha} = \sup_{i \geq 1} \hat{\mathbb{E}}[|\frac{X_i}{\sigma_i}|^{2+\alpha}]$, $\Delta_n := \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}$, $\Lambda(r) = \sup_{i \geq r} |\beta - \beta_i|$.

特别地, 若存在某个 $\alpha > 0$, 使得 $\sup_{i \geq 1} \hat{\mathbb{E}}[|\frac{X_i}{\sigma_i}|^{2+\alpha}] < \infty$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2} = 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{i \geq r} |\beta - \beta_i| = 0$, 则 W_n 以分布收敛到 $\mathcal{N}_\beta(0, 1)$.

证明 记 $G_\beta(a) = 2(\frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}a^+ - \frac{1}{(1+\beta)^2}a^-)$. 令 $v(t, x)$ 是初值为 ϕ 的 G_β -热方程 (2.3) 的解, 则 $v(1, 0) = \mathcal{N}_\beta(0, 1)[\phi]$. 由定理 4.4 知, 存在仅依赖于 β 的 $\alpha \in (0, 1)$ 及仅依赖于 α 和 β 的正常数 $c_{\alpha, \beta}$, 使得

$$[D_x^2 v(t, \cdot)]_\alpha \leq c_{\alpha, \beta} \frac{1}{t^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}}}. \quad (4.8)$$

固定 $n \in \mathbb{N}$. 对于 $1 \leq i \leq n$, 令

$$\xi_{i,n} = \frac{X_i}{\sigma(n)} =: \frac{\sigma_i}{\sigma(n)} \bar{X}_i, \quad W_{0,n} = 0, \quad W_{i,n} = \sum_{k=1}^i \xi_{k,n},$$

其中 $\sigma(n)^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. 对于 $0 \leq i \leq n$, 令

$$A_{i,n} = \hat{\mathbb{E}}[v(1 - t_i^n, W_{i,n})],$$

其中 $t_0^n = 0$, $t_{i+1}^n - t_i^n = \frac{\sigma_{i+1}^2}{\sigma^2(n)} =: \delta_{n,i+1}$.

显然有 $A_{n,n} = \hat{\mathbb{E}}[\phi(W_n)]$, 且 $A_{0,n} = v(1, 0)$. 注意到

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbb{E}}[\phi(W_n)] - v(1, 0)| &\leq \sum_{i=1}^n |A_{i,n} - A_{i-1,n}| \\ &= \sum_{i=1}^n |\hat{\mathbb{E}}[b_{i,n}(W_{i-1,n})] - \hat{\mathbb{E}}[c_{i,n}(W_{i-1,n})]| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sup_{x \in \mathbb{R}} |b_{i,n}(x) - c_{i,n}(x)|, \end{aligned}$$

其中 $b_{i,n}(x) = \hat{\mathbb{E}}[v(1 - t_i^n, x + \sqrt{\delta_{n,i}} \bar{X}_i)]$, 且 $c_{i,n}(x) = v(1 - t_{i-1}^n, x)$.

作为次线性期望, 有表示 $\hat{\mathbb{E}}[\varphi(\bar{X}_i)] = \sup_{\mu \in \Theta_i} \mu[\varphi]$, $\varphi \in C_{b, \text{Lip}}(\mathbb{R})$.

令 $\phi_i(y) = \phi_{i,n}(y) = v(1 - t_i^n, x + \sqrt{\delta_{n,i}} y)$, v_i 为初值为 ϕ_i 的 G_β -热方程 (2.3) 的解, 则 $v_i(1, 0) = v(1 - t_{i-1}^n, x)$. 由定理 4.1, 有

$$\begin{aligned} c_{i,n}(x) - b_{i,n}(x) &= v_i(1, 0) - \hat{\mathbb{E}}[\phi_i(\bar{X}_i)] \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left[\left(G_{\beta_i}(\partial_y^2 \phi_{i,t}(y)) - \frac{y}{2} \partial_y \phi_{i,t}(y) \right) + f_i(t, \sqrt{1-t}y) \right] \mu_t(dy) dt, \end{aligned}$$

1) Jiao L, Song Y. The error estimates of central limit theorem under sublinear expectations. Preprint

其中

$$\begin{aligned} f_i(t, y) &= G_\beta(\partial_y^2 v_i(t, y)) - G_{\beta_i}(\partial_y^2 v_i(t, y)), \\ \phi_{i,t}(x) &= \frac{1}{1-t} v_i(t, \sqrt{1-t}x), \\ \mu_t &\in \Theta_i, \quad \mu_t[\phi_{i,t}] = \hat{\mathbb{E}}[\phi_{i,t}(\bar{X}_i)]. \end{aligned}$$

注意到 $|f_i(t, y)| \leq \frac{1}{2}|\beta_i - \beta| |\partial_y^2 v_i(t, y)|$. 由引理 4.1, 有

$$\begin{aligned} |A_{i,n} - A_{i-1,n}| &\leq 2\delta_{n,i}^{\alpha/2} \int_{1-t_i^n}^{1-t_{i-1}^n} [\partial_x^2 v(s, \cdot)]_\alpha ds \times \hat{\mathbb{E}}[|\bar{X}_i|^{2+\alpha}] \\ &\quad + \frac{1}{2}|\beta_i - \beta| \int_{1-t_i^n}^{1-t_{i-1}^n} \|\partial_x^2 v(s, \cdot)\|_\infty ds. \end{aligned}$$

令 $\Delta_n := \sup_{1 \leq i \leq n} \delta_{n,i}$, $\Lambda(r) = \sup_{i \geq r} |\beta - \beta_i|$. 利用 G -热方程 (2.3) 的正则性质估计上式. 首先, 由定理 4.4 易得

$$\sum_{i=1}^n \delta_{n,i}^{\alpha/2} \int_{1-t_i^n}^{1-t_{i-1}^n} [\partial_x^2 v(s, \cdot)]_\alpha ds \leq \Delta_n^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 [\partial_x^2 v(s, \cdot)]_\alpha ds \leq \frac{2c_{\alpha,\beta}}{1-\alpha} \Delta_n^{\frac{\alpha}{2}}.$$

另外, 有

$$\sum_{i \leq \Delta_n^{\frac{\alpha}{2}-1}} |\beta_i - \beta| \int_{1-t_i^n}^{1-t_{i-1}^n} \|\partial_x^2 v(s, \cdot)\|_\infty ds \leq \Lambda(1) \int_{1-\Delta_n^{\alpha/2}}^1 \|\partial_x^2 v(s, \cdot)\|_\infty ds \leq 2c_{\alpha,\beta} \Lambda(1) \Delta_n^{\frac{\alpha}{2}},$$

且

$$\sum_{i > \Delta_n^{\frac{\alpha}{2}-1}} |\beta_i - \beta| \int_{1-t_i^n}^{1-t_{i-1}^n} \|\partial_x^2 v(s, \cdot)\|_\infty ds \leq \Lambda(\Delta_n^{\frac{\alpha}{2}-1}) \int_0^1 \|\partial_x^2 v(s, \cdot)\|_\infty ds \leq 2c_{\alpha,\beta} \Lambda(\Delta_n^{\frac{\alpha}{2}-1}).$$

令 $M_{2+\alpha} = \sup_{i \geq 1} \hat{\mathbb{E}}[|\bar{X}_i|^{2+\alpha}]$, 则

$$|\hat{\mathbb{E}}[\phi(W_n)] - v(0, 1)| \leq C_{\alpha,\beta}((M_{2+\alpha} + \Lambda(1))\Delta_n^{\frac{\alpha}{2}} + \Lambda(\Delta_n^{\frac{\alpha}{2}-1})).$$

证毕. □

4.2 大数定律的 Stein 方法

我们知道, 在概率空间中, 一系列独立同分布的随机变量 $(X_k)_{k \geq 1}$, 其经验均值

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{P-\text{a.s.}} \mathbb{E}[X_1].$$

特别地, 对任意的 $\varphi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$, 设其 Lipschitz 常数为 L_φ , 容易证明

$$\left| \mathbb{E} \left[\varphi \left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \right) \right] - \varphi(\mathbb{E}[X_1]) \right| \leq L_\varphi \frac{(\mathbb{E}[|X_1 - \mathbb{E}[X_1]|^2])^{1/2}}{\sqrt{n}}.$$

但在非线性期望下, 问题有很大不同. 例如, 次线性期望 $\hat{\mathbb{E}}$ 下的随机变量 X 一般来说具有均值不确定性: $\hat{\mathbb{E}}[X] > -\hat{\mathbb{E}}[-X]$. 特别地, 对于独立同分布的随机变量 X_1 和 X_2 , 不存在常数 μ 使得 $\hat{\mathbb{E}}[(X_1 - \mu)(X_2 - \mu)] = 0$.

以下是次线性期望下的大数定律.

定理 4.7 ^[2] 设 $(X_k)_{k \geq 1}$ 为次线性期望 $\hat{\mathbb{E}}$ 下的一系列独立同分布的随机变量, 满足对某个 $\alpha \in (0, 1]$, 有 $\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^{1+\alpha}] < \infty$. 令 $S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, $\underline{\mu} = -\hat{\mathbb{E}}[-X_1]$, 且 $\bar{\mu} = \hat{\mathbb{E}}[X_1]$, 则对任意 $\phi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)] = \sup_{y \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}]} \phi(y). \quad (4.9)$$

称 $C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 上的次线性期望 $\mathcal{M}_p[\phi] := \sup_{y \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}]} \phi(y)$ 为极大分布, 其中下标 p 表示均值函数 $p(a) = \bar{\mu}a^+ - \underline{\mu}a^-$, $a \in \mathbb{R}$. 用 $p_X(a) = \hat{\mathbb{E}}[aX]$ 记随机变量 X 的均值函数.

次线性期望下的大数定律与线性情形相比有很大的不同: 首先极限分布不再是平凡的; 另外, 文献 [3] 指出, 不存在随机变量 X , 使得

$$\hat{\mathbb{E}}[|S_n - X|] \rightarrow 0.$$

因此, 从某种意义上说, 次线性期望下的大数定律更像线性情形的中心极限定理.

以下介绍如何通过 Stein 方法给出次线性期望下大数定律的收敛速度.

给定次线性期望 $\mathcal{N}[\varphi] = \sup_{\mu \in \Theta} \mu[\varphi]$ ($\varphi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$) 和一个 (足够) 光滑的函数 u , 使得 $u(0, x) = \phi(x)$. 对任意的 $t \in [0, 1]$, 令 $w_1(t) = \mathcal{N}[u(t, (1-t)\cdot)]$ (注意与 w_2 定义的不同), 则

$$u(1, 0) - \mathcal{N}[\phi] = w_1(1) - w_1(0) = \int_0^1 \dot{w}_1(t) dt. \quad (4.10)$$

由文献 [15, 引理 2.2] 知, 对几乎所有的 $t \in [0, 1]$, 有

$$\dot{w}_1(t) = \int_{\mathbb{R}} [\partial_t u(t, (1-t)x) - x \partial_x u(t, (1-t)x)] \mu_t(dx),$$

其中 $\mu_t \in \Theta$ 满足 $\mu_t[u(t, (1-t)\cdot)] = \mathcal{N}[u(t, (1-t)\cdot)]$.

令 $p_{\mathcal{N}}(a) := \frac{1}{2} \mathcal{N}[ax]$, $a \in \mathbb{R}$, 以及 $f(t, x) := \partial_t u(t, x) - p_{\mathcal{N}}(\partial_x u(t, x))$. 于是,

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= \int_{\mathbb{R}} [(p_{\mathcal{N}}(\partial_x u) - x \partial_x u + f)(t, (1-t)x)] \mu_t(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} [(p_{\mathcal{N}}(\partial_x \phi_t(x)) - x \partial_x \phi_t(x)) + f(t, (1-t)x)] \mu_t(dx), \end{aligned} \quad (4.11)$$

其中 $\phi_t(x) = \frac{1}{1-t} u(t, (1-t)x)$.

定理 4.8 对于 $C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 上的任意次线性期望 $\mathcal{N}$ 以及满足 $u \in C^{1,1}([0, 1] \times \mathbb{R})$ 且 $u(0, \cdot) = \phi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 的任意的函数 $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 有

$$u(1, 0) - \mathcal{N}[\phi] = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} [(p_{\mathcal{N}}(\partial_x \phi_t(x)) - x \partial_x \phi_t(x)) + f(t, (1-t)x)] \mu_t(dx) dt, \quad (4.12)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= \frac{1}{1-t} u(t, (1-t)x), \\ f(t, x) &= \partial_t u(t, x) - p_{\mathcal{N}}(\partial_x u(t, x)), \\ \mu_t &\in \Theta, \quad \mu_t[\phi_t] = \mathcal{N}[\phi_t]. \end{aligned}$$

以上论述与非线性期望下正态逼近的 Stein 方法类似, 只是将 w_2 替换为 w_1 .

下面引理给出了期望 $\int_{\mathbb{R}} [p_{\mathcal{N}}(\partial_x \varphi(x)) - x \partial_x \varphi(x)] \mu_{\varphi}(dx)$ ($\mu_{\varphi} \in \Theta$, $\mu_{\varphi}[\varphi] = \mathcal{N}[\varphi]$) 的估计.

引理 4.2^[23] 令 $\alpha \in (0, 1]$. 假设 $\mathcal{N}[|x|^{1+\alpha}] < \infty$. 对于 $\phi \in C_b^{1,\alpha}(\mathbb{R})$ 以及使得 $\mu[\phi] = \mathcal{N}[\phi]$ 的 $\mu \in \Theta$, 有

$$\left| \int_{\mathbb{R}} [x\phi'(x) - p_{\mathcal{N}}(\phi'(x))] \mu(dx) \right| \leq 4[\phi']_{\alpha} \mathcal{N}[|x|^{1+\alpha}].$$

注意到, 对于 $\phi_t(x) = \frac{1}{1-t}u(t, (1-t)x)$, 有 $[\phi'_t]_{\alpha} = [\partial_x u(t, \cdot)]_{\alpha} |1-t|^{\alpha}$. 由定理 4.8 和引理 4.2, 可得到以下估计.

定理 4.9 给定 $C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$ 上的任意的次线性期望 $\mathcal{N}$. 假设函数 $u: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足, 对某个 $\alpha \in (0, 1]$, $u \in C^{1+\alpha, 1+\alpha}((0, 1] \times \mathbb{R})$, 且 $u(0, \cdot) = \phi \in C_{b,\text{Lip}}(\mathbb{R})$, 则有

$$\left| u(1, 0) - \mathcal{N}[\phi] - \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f(t, (1-t)x) \mu_t(dx) dt \right| \leq 4 \int_0^1 [\partial_x u(t, \cdot)]_{\alpha} dt \times \mathcal{N}[|x|^{1+\alpha}], \quad (4.13)$$

其中

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \partial_t u(t, x) - p_{\mathcal{N}}(\partial_x u(t, x)), \\ \mu_t &\in \Theta, \quad \mu_t[u(t, (1-t)\cdot)] = \mathcal{N}[u(t, (1-t)\cdot)]. \end{aligned}$$

注 4.2 期望 $\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f(t, (1-t)x) \mu_t(dx) dt$ 看似复杂, 但在应用中, 一般很容易给出其估计, 无需关心具体的期望.

若 u 是以下 $p_{\mathcal{N}}$ -方程的解:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - p_{\mathcal{N}}(\partial_x u(t, x)) &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(0, x) &= \phi(x), \end{aligned} \quad (4.14)$$

且 $u \in C^{1+\alpha, 1+\alpha}((0, 1] \times \mathbb{R})$, 则 (注意到 $u(1, 0) = \mathcal{M}_{p_{\mathcal{N}}}[\phi]$) 由定理 4.9 可知,

$$|\mathcal{M}_{p_{\mathcal{N}}}[\phi] - \mathcal{N}[\phi]| \leq 4 \int_0^1 [\partial_x u(t, \cdot)]_{\alpha} dt \times \mathcal{N}[|x|^{1+\alpha}]. \quad (4.15)$$

但是, 一般来说, $u \notin C^{1+\alpha, 1+\alpha}((0, 1] \times \mathbb{R})$, 需要对 u 作光滑逼近. 这是大数定律的 Stein 方法与正态逼近的 Stein 方法的最大不同.

4.2.1 大数定律的误差估计

利用非线性期望下的 Stein 方法给出非线性期望下大数定律的收敛速度.

定理 4.10^[23] 设 $(X_k)_{k \geq 1}$ 为次线性期望 $\hat{\mathbb{E}}$ 下的一系列独立同分布的随机变量, 满足 $\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^2] < \infty$. 令 $S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, 则有

$$\sup_{|\phi|_{\text{Lip}} \leq 1} |\mathcal{M}_{p_{X_1}}[\phi] - \hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)]| \leq C_2 n^{-1/2},$$

其中 C_2 为仅依赖于 $\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^2]$ 的常数.

以下给出该误差估计证明的梗概. 首先, 利用定理 4.8 和引理 4.2, 可以得到以下结论.

定理 4.11^[23] 设 $(X_k)_{k \geq 1}$ 为次线性期望 $\hat{\mathbb{E}}$ 下的一系列独立同分布的随机变量, 满足 $\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^{1+\alpha}] < \infty, \alpha \in (0, 1]$. 令 $S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. 对任意的 $v \in C_b^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, 令 $f(t, x) := \partial_t v(t, x) - p_{X_1}(\partial_x v(t, x))$, 则有

$$v(1, 0) - \hat{\mathbb{E}}[v(0, S_n)] \geq -4n^{-\alpha} \int_0^1 [\partial_x v(s, \cdot)]_{\alpha} ds \times \hat{\mathbb{E}}[|X_1|^{1+\alpha}] - \sup_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} f_-(t, x). \quad (4.16)$$

注 4.3 若 v 是 p_{X_1} - 方程 (4.14) 的解, 由定理 4.11 可得到非线性期望下大数定律的误差估计

$$\mathcal{M}_{p_{X_1}}[\phi] - \hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)] \geq -4n^{-\alpha} \int_0^1 [\partial_x v(s, \cdot)]_\alpha ds \times \hat{\mathbb{E}}[|X_1|^{1+\alpha}].$$

类似地, 也可以得到另一侧的估计.

但一般来说, p - 方程的解 v 并不属于 $C_b^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. 因此考虑对 v 作光滑逼近.

取定函数 $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, 使得其具有单位积分, 且支撑包含在 $\{(x, t) : |x| < 1, 0 < t < 1\}$ 中. 对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 令 $\zeta_\varepsilon(x, t) = \varepsilon^{-2} \zeta(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$. 对局部可积的函数 $u(t, x)$, 令

$$u_\varepsilon = u * \zeta_\varepsilon.$$

引理 4.3 ^[23] 对于满足 $|\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|$ 的有界函数 ϕ , 令 $v(t, x)$ 为 P_{X_1} - 方程 (4.14) 的黏性解, 则 v_ε 满足

$$\partial_t v_\varepsilon(t, x) - p_{X_1}(\partial_x v_\varepsilon(t, x)) =: f_\varepsilon(t, x) \geq 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (\varepsilon, \infty). \quad (4.17)$$

利用定理 4.11 和引理 4.3, 可以给出 $\mathcal{M}_{p_{X_1}}[\phi] - \hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)]$ 的下界估计:

$$\mathcal{M}_{p_{X_1}}[\phi] - \hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)] \geq -C_2 n^{-1/2},$$

其中 C_2 为仅依赖于 $\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^2]$ 的常数.

引理 4.3 的证明梗概 由 (4.16), 有

$$v_\varepsilon(1 + \varepsilon, 0) - \hat{\mathbb{E}}[v_\varepsilon(\varepsilon, S_n)] \geq -4n^{-1} \int_0^1 \|\partial_x^2 v(\varepsilon + s, \cdot)\|_\infty ds \times \hat{\mathbb{E}}[|X_1|^2]. \quad (4.18)$$

容易验证 $\|\partial_x^2 v(\varepsilon + s, \cdot)\|_\infty \leq C_\zeta \frac{1}{\varepsilon}$, $|\hat{\mathbb{E}}[v_\varepsilon(\varepsilon, S_n)] - \hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)]| + |v_\varepsilon(1 + \varepsilon, 0) - v(1, 0)| \leq C_2 \varepsilon$, 其中 C_ζ 为依赖于函数 ζ 的常数, 而 C_2 仅依赖于 $\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^2]$. 于是,

$$v(1, 0) - \hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)] \geq -4C_\zeta \hat{\mathbb{E}}[|X_1|^2] \varepsilon^{-1} n^{-1} - C_2 \varepsilon.$$

令 $\varepsilon = n^{-1/2}$, 则得到

$$v(1, 0) - \hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)] \geq -C_2 n^{-1/2},$$

其中 C_2 为仅依赖于 $\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^2]$ 的常数. □

为了给出 $\mathcal{M}_{p_{X_1}}[\phi] - \hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)]$ 的上界估计, 需要引入以下函数.

对于 $n, k \in \mathbb{N}$, 定义 $v_n(0, x) = \phi(x)$,

$$v_n\left(\frac{k}{n}, x\right) = \hat{\mathbb{E}}\left[v_n\left(\frac{k-1}{n}, x + \frac{X_k}{n}\right)\right].$$

令 $T_n = \{k/n : k \in \mathbb{N}\}$. 将函数 $v_n(t, x)$ 的定义扩展到 $\mathbb{R}_+$, 使其在 T_n 的值保持不变, 而在区间 $(k/n, (k+1)/n]$ 上等于 $v_n((k+1)/n, x)$. 仍然用 v_n 表示扩展后的函数.

引理 4.4 ^[23] 对于满足 $|\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|$ 的函数 ϕ , 令 v_n 为上面定义的函数, 则

$$\partial_t v_{n,\varepsilon}(t, x) - p_{X_1}(\partial_x v_{n,\varepsilon}(t, x)) =: f_{n,\varepsilon}(t, x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \left(\varepsilon + \frac{1}{n}, \infty\right), \quad (4.19)$$

其中 $f_{n,\varepsilon}(t, x) \geq -\frac{C_2}{n\varepsilon}$, C_2 为仅依赖于 $\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^2]$ 的常数.

利用定理 4.11 和引理 4.4, 可以给出 $\mathcal{M}_{p_{X_1}}[\phi] - \hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)]$ 的上界估计:

$$\mathcal{M}_{p_{X_1}}[\phi] - \hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)] \leq C_2 n^{-1/2},$$

其中 C_2 为仅依赖于 $\hat{\mathbb{E}}[|X_1|^2]$ 的常数.

引理 4.4 的证明梗概 令 $\xi_1, \xi_2, \dots$ 为次线性期望 $\mathbb{E}$ 下的一系列独立的满足 p_{X_1} -极大分布的随机变量, 即

$$\mathbb{E}[\varphi(\xi_1)] = \sup_{y \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}]} \varphi(y),$$

其中 $\underline{\mu} = -\mathbb{E}[-X_1]$, $\bar{\mu} = \mathbb{E}[X_1]$. 令 $S_n^\xi = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$.

由定理 4.11 和引理 4.4, 有

$$v_{n,\varepsilon}\left(1 + \varepsilon + \frac{1}{n}, 0\right) - \mathbb{E}\left[v_{n,\varepsilon}\left(\varepsilon + \frac{1}{n}, S_n^\xi\right)\right] \geq -\frac{4}{n}\mathbb{E}[|\xi_1|^2] \int_0^1 \left\| \partial_x^2 v_{n,\varepsilon}\left(s + \varepsilon + \frac{1}{n}, \cdot\right) \right\|_\infty ds - \frac{C_2}{n\varepsilon}.$$

可以证明

$$\left\| \partial_x^2 v_{n,\varepsilon}\left(s + \varepsilon + \frac{1}{n}, \cdot\right) \right\|_\infty \leq \frac{C_\xi}{\varepsilon},$$

以及

$$\left| \mathbb{E}\left[v_{n,\varepsilon}\left(\varepsilon + \frac{1}{n}, S_n^\xi\right)\right] - v(1, 0) \right| + \left| v_{n,\varepsilon}\left(1 + \varepsilon + \frac{1}{n}, 0\right) - \hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)] \right| \leq C_2\left(\varepsilon + \frac{1}{n}\right),$$

其中 C_2 为仅依赖于 $\mathbb{E}[|X_1|^2]$ 的常数.

因此, $\hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)] - v(1, 0) \geq -\frac{C_2}{n\varepsilon} - C_2(\varepsilon + \frac{1}{n})$. 取 $\varepsilon = n^{-1/2}$, 有

$$\hat{\mathbb{E}}[\phi(S_n)] - v(1, 0) \geq -C_2 n^{-1/2}.$$

证毕. □

参考文献

- 1 Peng S. G -expectation, G -Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type. In: Stochastic Analysis and Applications. Abel Symposia, vol. 2. Berlin: Springer, 2007, 541–567
- 2 Peng S. A new central limit theorem under sublinear expectations. arXiv:0803.2656, 2008
- 3 Fang X, Peng S, Shao Q M, et al. Limit theorems with rate of convergence under sublinear expectations. Bernoulli, 2019, 25: 2564–2596
- 4 Peng S. Nonlinear expectations and nonlinear Markov chains. Chin Ann Math Ser B, 2005, 26: 159–184
- 5 Peng S. Dynamically consistent nonlinear evaluations and expectations. arXiv:math.PR/0501415, 2005
- 6 Peng S. G -Brownian motion and dynamic risk measure under volatility uncertainty. arXiv:0711.2834, 2007
- 7 Peng S. Multi-dimensional G -Brownian motion and related stochastic calculus under G -expectation. Stochastic Process Appl, 2008, 118: 2223–2253
- 8 Peng S. Survey on normal distributions, central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations. Sci China Ser A, 2009, 52: 1391–1411
- 9 Peng S. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty. arXiv:1002.4546, 2010
- 10 Denis L, Hu M, Peng S. Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: Application to G -Brownian motion paths. Potential Anal, 2011, 34: 139–161
- 11 Krylov N V. Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of the Second Order. Dordrecht: D. Reidel Publishing, 1987 (Original Russian version by Nauka, Moscow, 1985)
- 12 Chen L H Y, Goldstein L, Shao Q M. Normal Approximation by Stein's Method. Probability and Its Applications New York: Springer, 2011

- 13 Stein C. A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (University California, Berkeley, California, 1970/1971), vol. II: Probability Theory. Berkeley: University California Press, 1972, 583–602
- 14 Hu M, Li H, Wang F, et al. Invariant and ergodic nonlinear expectations for G -diffusion processes. Electron Commun Probab, 2015, 20: 1–15
- 15 Hu M, Peng S, Song Y. Stein type characterization for G -normal distributions. Electron Commun Probab, 2017, 22: 1–12
- 16 Song Y. Normal approximation by Stein's method under sublinear expectations. Stochastic Process Appl, 2020, 130: 2838–2850
- 17 Kruzhkov S N. Nonlinear parabolic equations with two independent variable (in Russian). Tr Mosk Mat Obs, 1967, 16: 329–346. English translation in Trans Moscow Math Soc, 1967, 16: 355–373
- 18 Wang L. On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations: I. Comm Pure Appl Math, 1992, 45: 27–76
- 19 Wang L. On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations: II. Comm Pure Appl Math, 1992, 45: 141–178
- 20 Wang L. On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations: III. Comm Pure Appl Math, 1992, 45: 255–262
- 21 Lieberman G M. Second Order Parabolic Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1996
- 22 Krylov N V. On Shige Peng's central limit theorem. Stochastic Process Appl, 2020, 130: 1426–1434
- 23 Song Y. Stein's method for law of large numbers under sublinear expectations. arXiv:1904.04674, 2019

Stein's method under sublinear expectations

Yongsheng Song

Abstract Stein's method is widely used for the error estimates of normal approximation. This is a review article about Stein's method under sublinear expectations, introducing the basic ideas of Stein's method under nonlinear expectation, and how to use it to give error estimates for the central limit theorem and the law of large numbers under sublinear expectations.

Keywords nonlinear expectation, Stein's method, central limit theorem, law of large numbers

MSC(2020) 60F05, 60G50

doi: 10.1360/SSM-2020-0206