



非齐次 Hamilton 系统的 Birkhoff 表示

刘畅^{①②}, 宋端^③, 刘世兴^①, 郭永新^{①*}

① 辽宁大学物理学院, 沈阳 110036;

② 北京理工大学宇航学院, 北京 100081;

③ 辽东学院影像物理教研室, 丹东 118001

*联系人, E-mail: yxguo@lnu.edu.cn

收稿日期: 2012-08-24; 接受日期: 2013-01-07

国家自然科学基金(批准号: 11202090, 11172120, 10932002 和 10972127)、辽宁省重点实验室建设项目(批准号: 2008403009)资助

摘要 本文首先讨论了 Hamilton 系统与 Birkhoff 系统的关系, 以及 Birkhoff 系统研究的理论意义和实际价值. 进一步研究了非齐次 Hamilton 系统的 Birkhoff 化理论、Birkhoff 方程的实现条件、构造方法, 指出了 Birkhoff 动力学研究的主要困难和未来应该重点关注的基本问题; 最后给出了广义 Birkhoff 系统动力学方程的形式以及研究广义 Birkhoff 方程的重要意义, 并探讨了广义 Birkhoff 方程的形式以及构造动力学系统广义 Birkhoff 方程的目的和意义.

关键词 非齐次 Hamilton 系统, Birkhoff 系统, Cauchy-Kovalevski 定理, 广义 Birkhoff 系统, 广义 Birkhoff 系统

PACS: 45.20Jj, 02.40Yy, 02.30.Zz

doi: 10.1360/132012-730

Hamilton 动力学系统具有简单辛结构, 可以描述忽略耗散的保守动力学系统, 也即是本质自伴随动力学系统的恰当的理论体系, 尤其是在动力学系统辛算法的研究中具有重要的理论意义和广泛的工程应用价值^[1]. 但是, 对于本质非自伴随动力学系统, Hamilton 动力学就失去了其优越性, 因为在保持动力学函数和实验室可测量物理意义不变的前提下, 本质非自伴随动力学系统没有齐次的 Hamilton 表示, 即动力学系统的 Hamilton 逆问题没有直接的普适性, 只有经过 Darboux 变换才具有间接的普适性. 但是, 在 Darboux 变换下, 系统的动力学函数和局部变量都

失去了物理意义^[2]. 然而, 具有一般辛几何结构的 Birkhoff 系统动力学逆问题具有直接的普适性, 能够在保持系统动力学函数和局部变量物理意义不变的前提下, 实现非自伴随动力学系统的自伴随化——Birkhoff 表示和一般辛几何结构.

Birkhoff 动力学理论是 Hamilton 动力学的自然推广, 它是包括齐次 Hamilton 系统和非齐次 Hamilton 系统的更一般动力学理论, 是最一般辛结构的局部实现^[2–6], 只有 Birkhoff 系统与一般辛几何结构之间才有一一对应关系, 这对于相空间的 Liouville 定理和 Poincaré-Cartan 积分不变量的研究具有重要意义^[7].

引用格式: 刘畅, 宋端, 刘世兴, 等. 非齐次 Hamilton 系统的 Birkhoff 表示. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 541–548

Liu C, Song D, Liu S X, et al. Birkhoffian representation of non-homogenous hamiltonian systems (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2013, 43: 541–548, doi: 10.1360/132012-730

因此 Birkhoff 系统动力学的研究对于完善和深化分析力学的理论体系具有重要意义, 尤其是对于非齐次 Hamilton 动力学系统的几何结构分析具有重要应用价值^[8-16]. 例如, 在非保守动力学系统和非完整动力学系统的几何结构分析和几何数值数值积分研究中更能体现 Birkhoff 动力学的优越性. 由于非完整约束的存在破坏了相空间的辛结构, 系统的动量映射一般不守恒, 这就使得非完整系统几何数值积分问题的研究非常困难, 对于某些特殊非完整系统, 就可以把非完整系统约化为完整非保守系统, 进而构造非完整系统的 Birkhoff 方程, 实现其相空间的一般辛几何结构或者广义辛几何结构^[9], 进而就可以推广 Hamilton 系统的辛算法思想到 Birkhoff 系统或者广义 Birkhoff 系统^[17], 构造出保持动力系统的一般辛结构或者广义辛几何结构的离散数值计算方法, 从而实现非完整系统保结构算法的研究. 因此, Birkhoff 动力学的研究不但具有重要的理论意义——推广和深化 Hamilton 动力学理论, 更具有重要的工程应用价值——解决工程科学中大量非齐次 Hamilton 系统的几何数值积分问题.

随着动力学系统研究领域的扩展, Birkhoff 动力学系统理论也显示出局限性, 某些动力学系统实现 Birkhoff 化的条件被破坏, 就需要发展 Birkhoff 动力学理论为广义 Birkhoff 动力学, 来解决非局域的动力学系统、非正规的动力学系统、非解析的动力学系统以及非完整动力学系统的问题.

为了方便, 文中采用了爱因斯坦求和约定: 上下指标相同代表求和.

1 Birkhoff 动力学

在研究动力学系统相对平衡稳定性问题时, 根据广义 Pfaffian 变分原理, Birkhoff 推导出了一类新的动力学方程^[3], 美国理论物理学家 Santilli 建议把下述方程命名为 Birkhoff 方程^[2,4]:

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}} \right) \dot{a}^{\nu} - \left(\frac{\partial B(t, a)}{\partial a^{\mu}} + \frac{\partial R_{\mu}(t, a)}{\partial t} \right) = 0, \quad \mu, \nu = 1, \dots, 2n, \quad (1)$$

其中函数 $B(t, a)$ 为 Birkhoff 函数, $R_{\mu}(t, a)$ 称为 Birkhoff 函数组.

Birkhoff 系统是最一般辛结构的局部实现, 只有 Birkhoff 系统与一般辛结构才有一一对应关系. 非自治 Birkhoff 系统的全局形式为

$$i_{\hat{X}} \hat{\Omega} = 0, \quad dt(\hat{X}) = 1, \quad (2)$$

其中 $\hat{X}$ 为非自治 Birkhoff 向量场, 局部表示为 $\hat{X} = \partial/\partial t + \Omega^{\mu\nu} (\partial B/\partial a^{\nu} + \partial R_{\nu}/\partial t) \partial/\partial a^{\mu}$, 一般辛结构的二阶协变张量局部表示为

$$\hat{\Omega} = d\hat{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}} \right) da^{\mu} \wedge da^{\nu} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} + \frac{\partial R_{\mu}}{\partial t} \right) da^{\mu} \wedge dt, \quad (3)$$

当 $B(a) = H(r, p)$, $\Omega_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ 时, 自治

Birkhoff 系统退化为 Hamilton 系统, 因此, Hamilton 系统只是 Birkhoff 系统的特殊形式.

对于 Hamilton 系统, 物理变量 r 和 p 是正则的共轭变量, 其状态空间是相空间, 具有简单辛几何结构, 并且 $\dot{r} = \partial H/\partial p$, 具有 Lie 代数结构. 而 Birkhoff 系统的局部变量 $\{a\} = \{(r, p)\}$ 不是共轭变量, Birkhoff 系统的状态空间也不再是相空间, 而是一种更广泛意义的动力学空间, 具有一般辛几何结构和广义的 Lie 代数结构, 只有退化为自治和半自治的 Birkhoff 系统时, 才具有 Lie 代数结构. 由于 Birkhoff 动力学系统的二阶协变张量蕴含了系统的部分力学信息, 是随时间演化的, 这就使得当 Birkhoff 函数取为动力学系统的总能量时, 一般 $\dot{r} \neq \partial B/\partial p$. 而且, Birkhoff 动力学系统具有变分原理、辛几何和 Lie 代数共生的性质.

2 动力学系统的 Birkhoff 化理论

对于非保守系统一般没有简单辛结构和正则 Hamilton 方程, 除非进行 Darboux 变换. 但是, Poincaré 逆引理和 Cauchy-Kovalevski 定理保证了任意局域的、解析的、正规的一阶微分方程都可以自伴随化, 以及一般辛几何结构与 Birkhoff 方程的一一对应关系.

2.1 非齐次 Hamilton 系统方程

在保持动力学函数和实验室可测变量的物理意义不变的前提下, 非完整系统的 Hamilton 方程是非

齐次的, 其相空间的几何结构为近 Poisson 结构^[5-8].

设力学系统的位形空间由 n 个广义坐标 $q^1, q^2, \dots, q^n$ 来确定, 受 k 个理想非完整约束:

$$\begin{aligned} f^\beta(q^i, \dot{q}^i, t) &= \dot{q}^\beta - \varphi^\beta(q^i, \dot{q}^\mu, t) = 0, \\ (\beta &= 1, \dots, k; \mu = k+1, \dots, n; i = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (4)$$

此系统的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases} \dot{q}^\sigma = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\sigma}, \\ \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial \dot{q}^\sigma} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} T_\sigma^\beta, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $T_\sigma^\beta = -[\varphi^\beta]_\sigma - \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \dot{q}^\sigma}$. 显然, 方程(5)是非齐

次的 Hamilton 方程, 表达为统一形式为

$$\dot{a}^\mu - \Xi^\mu(t, a) = 0, \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{a}^\mu &= \begin{cases} \dot{q}^\mu, \mu = 1, \dots, n-k, \\ \dot{p}_\mu, \mu = n-k+1, \dots, 2(n-k), \end{cases} \\ \Xi^\mu &= \begin{cases} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\mu}, \\ -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial \dot{q}^\mu} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^\beta} - p_\beta T_\mu^\beta. \end{cases} \end{aligned}$$

若把非齐次的 Hamilton 方程(5)表达成协变形式为

$$C_{\mu\nu} \dot{a}^\nu + D_\mu = 0, \quad (7)$$

其中, $D_\mu = -C_{\mu\nu} \Xi^\nu$. 一般情况下, 方程(6)和(7)是非自伴随的一阶微分方程.

特别地, 当非完整约束是一阶线性、齐次、定常的 Chaplygin's 非完整约束时, 即非完整约束方程的形式为

$$f^\beta(q^\sigma, \dot{q}^\sigma) = \dot{q}^\beta - B_\sigma^\beta(q^\sigma) \dot{q}^\sigma = 0, \quad (8)$$

Chaplygin's 系统 Hamilton 方程为

$$\begin{cases} \dot{q}^\sigma = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\sigma}, \\ \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^\sigma} + T_{\rho\sigma}^\beta p_\beta \dot{q}^\rho, \end{cases} \quad (9)$$

其中, $T_{\rho\sigma}^\beta = \partial B_\rho^\beta / \partial q^\sigma - \partial B_\sigma^\beta / \partial q^\rho$, $\beta = 1, \dots, k$; $\rho, \sigma = k+1, \dots, n$.

若令 $C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{\rho\sigma}^\beta p_\beta & -\delta_{\rho\sigma} \\ \delta_{\rho\sigma} & 0_{m \times m} \end{pmatrix}_{2m \times 2m}$, 则非齐次

Hamilton 方程(9)可以表达为一阶协变形式

$$C_{\mu\nu} \dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial a^\mu} = 0, \quad (10)$$

显然, 方程(10)也是非自伴随的一阶微分方程.

2.2 非齐次 Hamilton 系统的 Birkhoff 化理论

对于本质非自伴随动力学系统, 其二阶微分方程不存在自伴随通痕变换, 因此在保持实验室坐标变量不变的情况下, 动力学系统的 Lagrange 逆问题和 Hamilton 逆问题没有直接的普适性. 然而通过降阶为偶数个一阶微分方程后, 对于任意局域的、解析的、正规的、偶维一阶微分动力学系统在其正规点的邻域内总存在自伴随通痕变换, 即非自伴随的非齐次 Hamilton 方程(7)和(10), 通过自伴随通痕变换总可以实现其等价的自伴随表示^[2]:

$$[C_{\rho\nu} \dot{a}^\nu + D_\rho]_{NSA} = 0 \rightarrow [\Omega_{\mu\nu}(a) \dot{a}^\nu + \Gamma_\mu(a)]_{SA} = 0, \quad (11)$$

其中, $\Omega_{\mu\nu} = h_\mu^\rho C_{\rho\nu}$, $\Gamma_\mu = h_\mu^\rho D_\rho$.

自伴随动力学系统的 Helmholtz 条件等价于^[7]

$$d\hat{\Omega} = 0, \quad (12)$$

其中 $\hat{\Omega} = \frac{1}{2} \hat{\Omega}_{\mu\nu}(\hat{a}) d\hat{a}^\mu \wedge d\hat{a}^\nu$; $\mu, \nu = 0, 1, \dots, 2m$. 由 Poincaré 逆定理知, 闭的 2-形式局部是恰当的, 即存在 1-形式 $\hat{R} = R_\mu(t, a) da^\mu - B(t, a) dt$ 满足

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} = d\hat{R} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) da^\mu \wedge da^\nu \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right) da^\mu \wedge dt, \end{aligned} \quad (13)$$

于是得到

$$\Omega_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right), \quad \Gamma_\mu = -\frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t}, \quad (14)$$

把(14)式代入(11)得到 Birkhoff 方程(1). 所以一阶微分动力学系统总存在 Birkhoff 表示, 即

定理 2.1 任何局域、解析、正规的动力学系统, 不论是完整的或者非约束的、保守的或者非保守的、自伴随或者非自伴随的偶数维一阶微分动力学系统, 在其星形区域的正规点邻域上总能实现保持实验室可测变量的 Birkhoff 表示^[2].

对于自伴随一阶微分方程:

$$\left[\Omega_{\mu\nu}(t, a) \dot{a}^\nu + \Gamma_\mu(t, a) \right]_{SA} = 0, \quad (15)$$

我们就可以直接计算求出 Birkhoff 函数组:

$$R_\mu(t, a) = \left[\int_0^1 d\tau \tau \Omega_{\mu\nu}(t, \tau a) \right] a^\nu, \quad (16)$$

和 Birkhoff 函数:

$$B(t, a) = - \left[\int_0^1 d\tau \left(\Gamma_\mu + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right) (t, \tau a) \right] a^\mu, \quad (17)$$

得到其 Birkhoff 方程, 这就是构造 Birkhoff 方程的第一种方法^[2,4]. 这样得到的 Birkhoff 函数可能没有物理意义, 但是总可以通过规范变换得到具有动力学系统物理能量意义的 Birkhoff 函数:

$$B'(t, a) = B(t, a) - \frac{\partial G(t, a)}{\partial t}, \quad (18)$$

$$R'_\mu(t, a) = R_\mu(t, a) + \frac{\partial G(t, a)}{\partial a^\mu}. \quad (19)$$

Birkhoff 函数组 $(R'_\mu(t, a), B'(t, a))$ 和 $(R_\mu(t, a), B(t, a))$ 是同一个动力学系统的两种等价表示. 由此可知, 满足定理 2.1 的动力学系统, 有无限多个自伴随合痕变换和规范变换, 动力学系统就具有无限多个等价的 Birkhoff 描述. 我们总可以选取适当的规范函数 $G(t, a)$, 使得得到 Birkhoff 函数 $B(t, a)$ 是具有物理意义的能量函数.

第二种构造 Birkhoff 方程的方法就是把动力学系统的运动微分方程变换化为一阶微分方程形式

$$\dot{a}^\mu - \Xi^\mu(t, a) = 0, \quad (20)$$

并把 Birkhoff 函数 $B(t, a)$ 取为动力学系统的总能量, 然后再利用 Cauchy-Kovaleski 定理求解 Birkhoff 函数组 $R_\mu(t, a)$ 的 Cauchy-Kovalevski 方程^[2,4]

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{2n} \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \Xi^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}, \mu = 1, \dots, 2n. \quad (21)$$

如果能够求出动力学系统 $2n$ 个独立的第一积分 $I^\nu(t, a)$, 也可以利用 Hojman 方法^[2,4]分别求出 Birkhoff 函数组 $R_\mu(t, a)$ 和 Birkhoff 函数 $B(t, a)$:

$$R_\mu(t, a) = G_\nu \frac{\partial I^\nu}{\partial a^\mu}, \quad B(t, a) = -G_\nu \frac{\partial I^\nu}{\partial t}, \quad (22)$$

通过选取适当的规范函数 $G_\nu(t, a)$, 使得到的 Birkhoff 函数具有物理的能量意义.

算例 2.1, 具有单位质量和单位转动惯量的简化

雪橇板, 在位形空间 $R^2 \times T^1$ 上的局部坐标表示为 (x, y, φ) , 受到非完整约束为 $\dot{y} = \dot{x} \tan \varphi$, Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\varphi}^2). \quad \text{显然可得 Hamilton 方程为}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & p_x \tan \varphi & -1 & 0 \\ -p_x \tan \varphi & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} p_x^2 \sin 2\varphi \\ p_x \cos^2 \varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix}, \quad (23)$$

其中

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & p_x \tan \varphi & -1 & 0 \\ -p_x \tan \varphi & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是近泊松逆变二阶张量.

此非完整系统系统具有四个独立的第一积分, 分别为

$$I^1 = p_\varphi, \quad I^2 = \varphi - p_\varphi t, \quad I^3 = p_x \cos \varphi,$$

$$I^4 = \frac{1}{2} [\omega^2 x^2 + p_x^2 \cos^4 \varphi],$$

其中 $\omega = \dot{\varphi}$ 是常量.

令 $a^\mu = \{x, \varphi, p_x, p_\varphi\} (\mu = 1, 2, 3, 4)$, 利用 Hojman 方法可以计算 Birkhoff 函数和函数组得

$$R_1 = \sum_{K=1}^4 G_K \frac{\partial I^K}{\partial a^1} = G_4 a^1 (a^4)^2,$$

$$R_2 = \sum_{K=1}^4 G_K \frac{\partial I^K}{\partial a^2} = G_2 - G_3 a^3 \sin a^2 - G_4 (a^3)^2 \cos^2 a^2 \sin 2a^2,$$

$$R_3 = \sum_{K=1}^4 G_K \frac{\partial I^K}{\partial a^3} = G_3 \cos a^2 + G_4 a^3 \cos^4 a^2,$$

$$R_4 = \sum_{K=1}^4 G_K \frac{\partial I^K}{\partial a^4} = G_1 - G_2 t + G_4 (a^1)^2 a^4,$$

$$B = - \sum_{K=1}^4 G_K \frac{\partial I^K}{\partial t} = G_2 a^4.$$

令规范函数 $G_1 = -I^2, G_2 = \frac{1}{2}\left(I^1 + \frac{I^3}{I^1}\right), G_3 = 0, G_4 = I^3$,

可得

$$\begin{aligned} R_1 &= a^1 a^3 (a^4)^2 \cos a^2, \\ R_2 &= \frac{1}{2} a^4 + \frac{a^3 \cos a^2}{2a^4} - (a^3)^2 \cos^3 a^2 \sin 2a^2, \\ R_3 &= (a^3)^2 \cos^5 a^2, \\ R_4 &= -a^2 + \frac{1}{2} ta^4 - \frac{ta^3 \cos a^2}{2a^4} + (a^1)^2 a^3 a^4 \cos a^2, \\ B &= \frac{1}{2} \left[(a^4)^2 + a^3 \cos a^2 \right]. \end{aligned}$$

经过简单计算可得辛张量矩阵为

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ \Omega_{21} & 0 & \Omega_{23} & \Omega_{24} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & 0 & \Omega_{34} \\ \Omega_{41} & \Omega_{42} & \Omega_{43} & 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_{12} &= -\Omega_{21} = a^1 a^3 (a^4)^2 \sin a^2, \\ \Omega_{13} &= -\Omega_{31} = -a^1 (a^4)^2 \cos a^2, \\ \Omega_{14} &= -\Omega_{41} = 0, \\ \Omega_{23} &= -\Omega_{32} = (a^3)^2 \cos^4 a^2 \sin a^2 - \frac{\cos a^2}{2a^4}, \\ \Omega_{34} &= -\Omega_{43} = (a^1)^2 a^4 \cos a^2 - \frac{t \cos a^2}{2a^4}, \\ \Omega_{24} &= -\Omega_{42} \\ &= \frac{a^3 \cos a^2 + ta^3 a^4 \sin a^2 - 3p_\phi^2 - 2(a^1)^2 a^3 (a^4)^3 \sin a^2}{2(a^4)^2}. \end{aligned}$$

所以, 此非完整系统的 Birkhoff 方程表示为

$$\Omega_{\mu\nu} \dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right) = 0, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4. \quad (24)$$

显然, 对于简化雪橇板这一实际工程问题中最常见的例子, 如果利用传统的分析力学理论得到简化雪橇板的 Hamilton 动力学表示是非齐次的 Hamilton 方程(23)式, 显然此方程是非自伴随的, 并且只有近泊松几何结构; 如果利用 Birkhoff 动力学理论可以实现简化雪橇板这一非完整系统约束子流形上自伴随的 Birkhoff 表示(24)式, 并且可以构造其约束子流形上的一般辛几何结构, 甚至可以实现其 Lie

代数结构, 这对于非完整系统的辛算法研究具有重要的理论意义.

2.3 Birkhoff 动力学研究的基本问题

对于一般动力学系统即使满足了实现 Birkhoff 化的所有条件, 在利用以上的三种方法构造 Birkhoff 方程时都比较困难, 尤其是对于高维动力学系统, 构造 Birkhoff 函数 $B(t, a)$ 和 Birkhoff 函数组 $R_\mu(t, a)$ 时的计算量很大, 不借助于计算机是很难完成的. 因此我们应该在未来的研究工作中, 把更多的精力放在寻求构造 Birkhoff 方程简单有效的新方法和如何求解 Birkhoff 方程等阻碍 Birkhoff 动力学发展的两大基本问题上.

2.3.1 Birkhoff 方程的构造方法

Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组已有三种构造方法^[2], 这三种构造 Birkhoff 方程的方法只对于某些动力学系统应用起来比较方便. 根据 Cauchy-Kovalevski 定理, 我们可以得到构造 Birkhoff 函数(组)的第四种构造方法——参数调节法^[18]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_I(t, a)}{\partial t} &= \left[\frac{\partial R_J(t, a)}{\partial a^I} - \frac{\partial R_I(t, a)}{\partial a^J} \right] \Xi^J(t, a) \\ &\quad - \frac{\partial B(t, a)}{\partial a^I}, \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\frac{\partial B(t, a)}{\partial t} = \Xi_0^{I0} \frac{\partial B(t, a)}{\partial a^I} - \Xi_0^J \frac{\partial R_J(t, a)}{\partial a^I}. \quad (25b)$$

由已知函数 Ξ^J 和选取不同的参数 Ξ_0^{I0}, Ξ_0^J , 就可以确定 Birkhoff 函数(组), 再根据规范变换(18)式和(19)式, 就可以得到动力学系统的 Birkhoff 方程.

如何找到一种更简单的直接构造 Birkhoff 函数(组)的方法, 像求 Hamilton 函数一样直接写出 Birkhoff 函数 $B(t, a)$ (例如把动力学系统具有物理意义的能量, 或者能量、动量的一个组合作为 Birkhoff 函数 $B(t, a)$), 再通过简单的计算就可以很容易的求出 Birkhoff 函数组 $R_\mu(t, a)$ 和 Birkhoff 协变张量 $\Omega_{\mu\nu}(t, a)$, 仍旧是未来研究 Birkhoff 函数(组)构造问题的主要研究方向.

2.3.2 Birkhoff 方程的积分理论

Hamilton 系统和 Lagrange 系统都具有各种成熟的积分方法, 因此, Hamilton 动力学和 Lagrange 动力学能够被广泛应用. Birkhoff 系统求解方法的匮乏也是影响到 Birkhoff 动力学发展和应用的一个焦点问

题. 在已有的几种适用于特殊 Birkhoff 系统积分理论^[4]的基础上, 还要开创求解一般 Birkhoff 方程解析解的 Birkhoff-Jacobi 方法、Poisson 理论以及构造求解 Birkhoff 方程数值解的离散方法, 尤其是构造 Birkhoff 系统保结构的数值算法. 只有解决了 Birkhoff 系统的积分理论, 才能使 Birkhoff 动力学广泛应用到工程实际中, 充分体现其实用性.

3 广义 Birkhoff 动力学理论

随着研究领域的扩展, 有些动力学系统不能满足实现 Birkhoff 化的四个条件条件, 因此就需要进一步推广 Birkhoff 动力学理论为广义 Birkhoff 动力学理论.

3.1 广义 Birkhoff 动力学方程

如果动力学系统不能满足实现 Birkhoff 化的所有条件, 如局域性、正规性、解析性以及完整性, 这四个条件中的任意一个条件被破坏的动力学系统就称之为广义 Birkhoff 系统, 描述这类动力学系统的运动方程可能会出现积分微分方程、动力学系统的状态空间可能会出现奇异性、不连续性等奇特的物理现象. 因此, 这类动力学系统的逆问题只能在广义 Birkhoff 系统理论框架内研究.

(1) 当动力学系统不满足完整性条件时, 例如受到一般非完整约束的动力学系统, 其运动微分方程为

$$\ddot{q}^\mu = f^\mu(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, q^\alpha), \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, k = n - l, \quad (26a)$$

$$\dot{q}^\alpha = \varphi^\alpha(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, q^\beta), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, l, \quad (26b)$$

此非完整系统是受到一阶和二阶耦合微分方程共同描述的动力学系统, 把非完整动力学系统的运动微分方程统一降阶为 m 个一阶微分方程:

$$\dot{q}^\mu = \zeta^\mu(t, q^\nu, x^\nu, q^\alpha), \quad (27a)$$

$$\dot{x}^\mu = \psi^\mu(t, q^\nu, x^\nu, q^\alpha), \quad (27b)$$

$$\dot{q}^\alpha = \varphi^\alpha(t, q^\nu, x^\nu, q^\alpha), \quad (27c)$$

在约束流形 M 上, 令 $\{q^\nu, x^\nu, q^\alpha\} = \{a^I\} (I = 1, 2, \dots, m = 2k + l)$, 则方程(26)表示为

$$\dot{a}^I = \Xi^I(t, a^J), \quad I, J = 1, 2, \dots, m = 2k + l, \quad (28)$$

再根据 Cauchy-Kovalevski 定理和 Poincaré 引理

的逆定理, 就可以实现一般非完整系统运动微分方程的自伴随表示——广义 Birkhoff 方程为

$$\left(\frac{\partial R_J}{\partial a^I} - \frac{\partial R_I}{\partial a^J} \right) \dot{a}^J - \left(\frac{\partial B}{\partial a^I} + \frac{\partial R_I}{\partial t} \right) = 0, \quad (29)$$

$$I, J = 1, 2, \dots, m = 2k + l,$$

显然, 当非完整约束的个数是偶数个时, 广义 Birkhoff 方程(28)退化为 Birkhoff 方程, 此时广义 Birkhoff 方程的预辛几何结构退化为一般辛结构.

(2) 当动力学系统不能满足局域性条件时, 例如当动力学系统是非局域非势力存在时, 其动力学方程为积分微分方程:

$$m\ddot{r} - F(t, r, \dot{r}) - \int_U \mathrm{d}r' \Theta(t, r, r', \dot{r}, \dot{r}', \dots) = 0, \quad (30)$$

我们可以取广义 Birkhoff 函数和广义 Birkhoff 函数组有如下形式

$$\mathcal{R}_\mu(t, a, a') = R_\mu(t, a) + \int_U \mathrm{d}a' \mathbb{R}_\mu(t, a, a'), \quad (31)$$

$$\mathcal{B}_\mu(t, a, a') = B(t, a) + \int_U \mathrm{d}a' \mathbb{B}_\mu(t, a, a'), \quad (32)$$

所以非局域动力学系统的广义 Birkhoff 方程为

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \left(\frac{\partial \mathcal{R}_\nu(a, t)}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \mathcal{R}_\mu(a, t)}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial \mathcal{B}(a, t)}{\partial a^\mu} + \frac{\partial \mathcal{R}_\mu(a, t)}{\partial t} \right) = 0. \quad (33)$$

(3) 当动力学系统不满足解析性条件时, 把系统的运动微分方程分解为解析部分和非解析部分, 则此动力学系统的广义 Birkhoff 方程为

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \left(\frac{\partial R_\nu(t, a)}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B(t, a)}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial t} \right) = \Pi(t, a, a', \dot{a}, \dot{a}') \quad (34)$$

此时, 广义 Birkhoff 方程(34)右边的非齐次项 $\Pi(t, a, a', \dot{a}, \dot{a}')$ 表示系统的非解析性质.

(4) 当动力学系统不满足正规性条件时, 动力学系统会出现奇异性的现象, 可以把动力学系统的状态空间分解为正规和非正规的两部分, 可以用广义 Birkhoff 方程(34)来描述这类动力学系统, 方程右边的非齐次项 $\Pi(t, a, a', \dot{a}, \dot{a}')$ 表示系统的奇异性.

3.2 赝广义 Birkhoff 动力学方程

某些动力学系统虽然满足实现 Birkhoff 化的所有条件,但是由于利用目前已有的方法,构造 Birkhoff 函数 $B(t,a)$ 和 Birkhoff 函数组 $R_\mu(t,a)$ 时十分困难. 我们就可以采用动力学系统的分解理论,对动力学方程部分实现 Birkhoff 化. 即把容易构造 Birkhoff 函数 $B(t,a)$ 和 Birkhoff 函数组 $R_\mu(t,a)$ 的部分构造成 Birkhoff 方程的形式,如首先可以把有势力、陀螺力的部分纳入 Birkhoff 方程,而把其它难以纳入 Birkhoff 方程的非势力部分,如耗散力、伺服约束力等,取为独立的一项 $\Lambda_\mu(t,a)$. 因此原本属于 Birkhoff 动力学系统的运动微分方程就可以构造成如下近 Birkhoff 方程的形式:

$$\sum_{v=1}^{2n} \left(\frac{\partial R_v(t,a)}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu(t,a)}{\partial a^v} \right) \dot{a}^v - \left(\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu(t,a)}{\partial t} \right) = \Lambda_\mu(t,a), \quad (35)$$

其实,形式上的广义 Birkhoff 方程(35)式并非真正的广义 Birkhoff 系统,我们称此类形式上的广义 Birkhoff 方程(35)式为赝广义 Birkhoff 方程^[19-22]. 构造赝广义 Birkhoff 方程只是为了研究问题的需要,此类赝广义 Birkhoff 方程对于研究 Birkhoff 系统的几何控制、

构造 Birkhoff 系统的数值算法以及 Birkhoff 系统的分岔混沌理论等具有重要理论意义^[11-16].

4 结论

首先,由于动力学系统的 Lagrange 逆问题和 Hamilton 逆问题没有直接的普适性,然而 Birkhoff 逆问题具有直接的普适性意义. 例如,非保守系统和非完整系统的 Lagrange 方程和 Hamilton 方程都是非齐次的,也是非自伴随的,但是对于任意局域、正规、解析、完整的动力学系统,不论是保守的还是非保守的,都可以实现其运动微分方程的自伴随化——Birkhoff 表示. 因此研究 Birkhoff 动力学更具有实际的普适性意义.

其次,由于 Birkhoff 动力系统的运动微分方程具有自伴随性质;从全局几何意义上讲, Birkhoff 动力学系统具有一般辛几何结构;从代数结构上讲,某些 Birkhoff 系统(自治 Birkhoff 系统)还具有 Lie 代数结构. 因此在 Birkhoff 动力学框架内研究非保守系统和非完整系统的辛算法问题具有重要的理论和实际意义.

最后,需要特别指出的是:在动力学系统的 Birkhoff 逆问题和广义 Birkhoff 逆问题的研究中,一定要分析清楚动力学系统能够实现 Birkhoff 化和广义 Birkhoff 化的前提条件.

致谢 感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 冯康, 秦孟兆. 哈密顿系统的辛几何算法. 北京: 科学出版社, 2003
- 2 Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics II. New York: Springer-Verlag, 1983
- 3 Birkhoff G D. Dynamical Systems. AMS Colloquium Publications Volume 9, Providence, RI, New York 1966 89-96
- 4 梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 等. Birkhoff 系统动力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1996
- 5 Mei F X. On the Birkhoff mechanics. Int J Non-Lin Mech, 2001, 36(5): 817-834
- 6 Kobayashi M H, Oliva W M. On the Birkhoff approach to classical mechanics. Resenhas IME-USP, 2003, 6(1): 1-71
- 7 Guo Y X, Shang M, Luo S K. Poincare-Cartan Integral Invariant of Birkhoffian Systems. Appl Math Mech, 2003, 24(1): 68-72
- 8 Guo Y X, Liu C, Liu S X. Inverse problems for Chaplygin's nonholonomic systems. Sci China-Tech Sci, 2011, 54(7): 2100-2106
- 9 Guo Y X, Luo S K, Shang M, et al. Birkhoffian formulaions of nonholonomic constrained systems. Rep Math Phys, 2001, 47(3): 313-322
- 10 van der Schaft A J, Maschke B. On the Hamiltonian formulation of nonholonomic mechanics systems. Rep Math Phys, 1994, 34(2): 225-233
- 11 van der Schaft A J. Implicit Hamiltonian systems with symmetry. Rep Math Phys, 1998, 41(2): 203-221
- 12 Ionescu D, Scheurle J. Birkhoffian formulation of the dynamics of LC circuits. Z Angew Math Phys, 2007, 58(2): 175-208
- 13 Oliva W M, Terra G. Birkhoffian systems in infinite dimensional manifolds. J Dyn Diff Equat, 2009, 22(2): 193-201

- 14 Perez-Marco R. Convergence or generic divergence of the Birkhoff normal form. *Ann Math*, 2003, 157(2): 557–574
- 15 Ionescu D. A geometric Birkhoffian formalism for nonlinear RLC networks. *J Geom Phys*, 2006, 56(12): 2545–2572
- 16 Ionescu D. Liapunov's direct method for Birkhoffian systems: Applications to electrical networks. *J Geom Phys*, 2007, 57(11): 2213–2228
- 17 Sun Y J, Shang Z J. Structure-preserving algorithms for Birkhoffian systems. *Phys Lett A*, 2005, 336(5): 258–269
- 18 Guo Y X, Liu C, Liu S X. Generalized Birkhoffian Formulation of Nonholonomic Systems. *Commun Math*, 2010, 18: 21–35
- 19 Mei F X, Cai J L. Integral invariants of a generalized Birkhoff system (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2008, 57(8): 4657–4659 [梅凤翔, 蔡建乐. 广义 Birkhoff 系统的积分不变量. *物理学报*, 2008, 57(8): 4657–4659]
- 20 Shang M, Mei F X. Poisson theory of generalized Birkhoff equations. 2009, 18(8): 3155–3157
- 21 Li Y M, Mei F X. Generalized canonical transformations of a kind of generalized Birkhoff systems (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2010, 59(8): 5219–5222 [李彦敏, 梅凤翔. 一类广义 Birkhoff 系统的广义正则变换. *物理学报*, 2010, 59(8): 5219–5222]
- 22 Ge W K, Zhang Y. An integral of a generalized Birkhoff system (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2011, 60(5): 050202 [葛伟宽, 张毅. 广义 Birkhoff 系统的一类积分. *物理学报*, 2011, 60(5): 050202]

Birkhoffian representation of non-homogenous hamiltonian systems

LIU Chang^{1,2}, SONG Duan³, LIU Shixing¹ & GUO Yongxin^{1*}

¹ College of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China;

² School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

³ Physics of medical imaging department, Eastern Liaoning University, Dandong 118001, China

The relation between Hamiltonian system and Birkhoffian system is discussed in this article. Simultaneously, the theory significance and the practical value of Birkhoffian dynamical systems are also investigated. Furthermore, the Birkhoffian realization theory and methods for constructing Birkhoff's equation are also studied. Then the primary difficulty and the important investigative directions of Birkhoffian dynamics are pointed out in this article. Finally, the formulations and the significance of generalized Birkhoffian dynamics are given. At the same time the almost-generalized Birkhoff's equations and its applications are also discussed in briefly.

Non-homogenous Hamiltonian system, Birkhoffian system, Cauchy-Kovalevski theorem, generalized Birkhoffian system, almost-generalized Birkhoffian system

PACS: 45.20Jj, 02.40Yy, 02.30.Zz

doi: 10.1360/132012-730