

# Navier-Stokes/Allen-Cahn 方程弱解的尖锐界面极限问题

献给肖玲教授 85 寿辰

梁之磊<sup>1</sup>, 王德华<sup>2\*</sup>

1. 西南财经大学数学学院, 成都 611130;

2. Department of Mathematics, University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA 15260, USA

E-mail: liangzl@swufe.edu.cn, dhwang@pitt.edu

收稿日期: 2023-12-04; 接受日期: 2024-01-23; 网络出版日期: 2024-04-10; \* 通信作者

美国国家自然科学基金 (批准号: DMS-2219384)、四川省科技计划 (批准号: 2023ZYD0003)、四川省社会科学哲学基金 (批准号: SCJJ23ND196) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: JBK2304082) 资助项目

**摘要** 宏观上不混溶的复合黏性流体的运动规律主要由尖锐界面模型和扩散界面模型来描述. Navier-Stokes/Allen-Cahn (NS/AC) 耦合方程是描述扩散交界过程最主要的微观连续介质模型之一, 本文研究 NS/AC 方程弱解的尖锐界面极限问题. 具体地, 考虑 3 维有界光滑域中 NS/AC 方程弱解, 假设连续介质模型的扩散层厚度  $\epsilon (> 0)$  趋向于 0, 本文证明弱解序列  $(u^\epsilon, c^\epsilon)$  在弱拓扑意义下收敛到极限函数  $(u^0, c^0)$ , 并讨论极限函数所满足的方程与平均曲率流方程之间的联系. 证明主要基于 NS/AC 方程弱解关于  $\epsilon$  的一致能量估计和测度意义下的紧性性质.

**关键词** 复合流体 弱解 Navier-Stokes/Allen-Cahn 方程 尖锐界面极限

**MSC (2020) 主题分类** 35K57, 76D05, 49Q20

## 1 引言

复合流体内部微观结构的发展演化影响物质材料宏观的动力学性质. 界面现象发生时, 存在某种机制促使混合体产生空间分离并强制过渡, 如聚合物的熔化过程、液晶流体和悬浮液的形成过程等. 不同于单一流体的运动状态, 由于多分子尺度的耦合性、混合交界面的移动和变形等现象, 这一问题在理论研究中变得更加复杂. 宏观上两种不相容的流体混合时, 会在微观层面产生局部的渗透交叉过程, 并在“小尺度的微薄层面”产生相互作用, 形成非稳定的扩散对流机制, 长时间后达到稳定的平衡态, 形成相对固定的“微薄交界层”. 特别情形下, 当一种物质的比例占绝对优势时, 还会导致液滴现象的形成. 到目前为止, 已经积累了大量关于两相流之间转换的研究结论. 我们推荐文献 [21, 23, 24, 33]

英文引用格式: Liang Z L, Wang D H. On a sharp interface limit for weak solutions of the Navier-Stokes/Allen-Cahn equations (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2025, 55: 685–702, doi: 10.1360/SSM-2023-0331

等关于这一方面的介绍. 材料的微观结构决定了其宏观物理和力学性能, 因此微观结构的演化被广泛研究. 复合材料在介观尺度上大多是不均匀的, 由界面隔开的晶粒带有过剩的自由能是热力学的不稳定表现, 晶界面的变化减小使得总自由能达到极小而变得相对稳定. 研究相变和微观结构演化通常有连续相场和尖锐界面两种常用的方法:

- (1) 连续相场模型是基于扩散理论 (即在一个很窄的区域内连续变化) 来反映晶界面的性质;
- (2) 尖锐界面允许在界面处的不连续变化, 这种传统的模拟方法使用于一维或者球形晶粒系统, 很难准确刻画真实复杂形态的晶粒变化, 参见图 1.

在连续相场模型中, 微观结构的演化用连续函数 (场变量) 进行分析, 根据保守场变量和非保守场变量, 被大家广泛采用和研究的数学模型分别是 Cahn-Hilliard 非线性扩散方程和 Allen-Cahn 弛豫方程. 这两类数学模型在理论研究上有相通性, 如两类方程都满足同一泛函 (在不同拓扑下) 的梯度流结构, 因此可以在能量框架下采用类似的方法对两类方程展开研究. 但它们也有明显不同的数学结构, 如 Allen-Cahn 方程的抛物型特点使得解本身满足极值原理, 而 Cahn-Hilliard 方程的高阶性质导致极值原理不再成立, 但是满足保体积变换 (相关内容的研究可以参见文献 [29, 37, 40]). Allen-Cahn 方程

$$c_t^\epsilon + \operatorname{div}(u^\epsilon c^\epsilon) = \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2} f(c^\epsilon) \quad (1.1)$$

首次被 Allen 和 Cahn<sup>[6]</sup> 提出用来描述抑制相域的形成机制,  $c^\epsilon$  表示相场变量函数,  $u^\epsilon$  表示流体的速度, 势能密度函数  $f$  促使各自相域的形成, 而扩散项  $\Delta c^\epsilon$  的抑制作用使得复合流体达到某种平衡, 常数  $\epsilon > 0$  表示混合层面的厚度. 复合流体的微观连续介质模型到尖锐界面模型的极限问题, 即  $\epsilon$  趋向于零, 是一个被广泛研究的重要课题. 方程 (1.1) 尖锐界面极限问题的形式分析可参见文献 [6, 19, 34] 及相关文献. 这一问题在数学上的严格证明, 参见文献 [10, 20] 对一维空间情形的研究以及文献 [12, 14] 在高维径向假设下的讨论. Allen-Cahn 方程 (1.1) 到曲率流方程的第一个整体收敛结果最早由 Evans 等<sup>[16]</sup> 证明得到. 此外, Ilmanen<sup>[25]</sup> 证明了连续介质模型弱解的尖锐界面极限满足 Brakke 平面曲率流方程. 随后, 文献 [35, 36] 对 Ilmanen 的研究结果进行了改进和推广.

本文考虑带有对流项的 Allen-Cahn 弛豫方程与描述流体基本运动规律的 Navier-Stokes 方程的耦

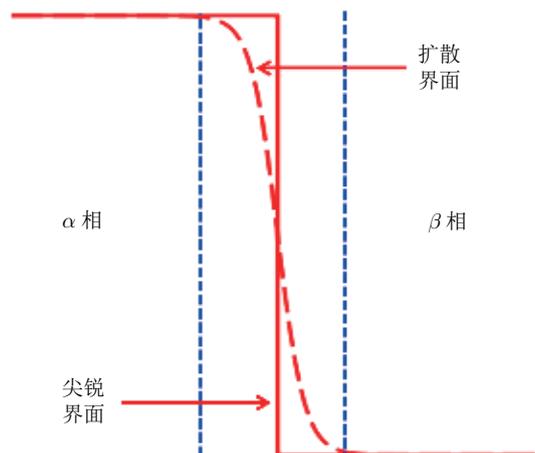


图 1 (网络版彩图) 扩散界面与尖锐界面 (图片来自文献 [39])

合系统

$$\begin{cases} \operatorname{div} u^\epsilon = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u_t^\epsilon + \operatorname{div}(u^\epsilon \otimes u^\epsilon) + \nabla P^\epsilon = \Delta u^\epsilon - \epsilon \operatorname{div}(\nabla c^\epsilon \otimes \nabla c^\epsilon), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ c_t^\epsilon + \operatorname{div}(u^\epsilon c^\epsilon) = \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2} f(c^\epsilon), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u^\epsilon = 0, \quad \frac{\partial c^\epsilon}{\partial \vec{n}} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (1.2)$$

其中,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  是 3 维空间中的光滑有界区域, 时间  $T > 0$  是给定的常数, 未知函数  $P^\epsilon$  表示流体的内部压力, 其余函数的物理意义与 (1.1) 中相同, 常数  $\epsilon > 0$  表示混合层面的厚度,  $\vec{n} = \vec{n}(x)$  表示在点  $x \in \partial\Omega$  处的法向量. 势能函数定义为

$$F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau,$$

其中势能密度函数  $f$  的正则性假设会在下述的假设 1.1 中给出. 为简单起见, 方程 (1.2) 中涉及的流体黏性系数、表面张力系数和迁移率等变量均取值为单位常量.

对非光滑晶体界面的研究在几何变分问题中也非常重要, 如对非光滑物理对象的建模分析、存在性理论和正则性理论等. 假设流体的自由界面移动完全由界面的平均曲率流决定, 可以得到如下描述混合流体动力学性质的平均曲率流方程 (参见文献 [17, 27]):

$$\begin{cases} \operatorname{div} u^0 = 0, & (x, t) \in \Omega \setminus \Gamma_t, \\ u_t^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 + \nabla P^0 = \Delta u^0, & (x, t) \in \Omega \setminus \Gamma_t, \\ [\nabla u^0 - P^0] \cdot \vec{n}_{\Gamma_t} = \sigma H \vec{n}_{\Gamma_t}, & (x, t) \in \Gamma_t, \\ [u^0] = 0, & (x, t) \in \Gamma_t, \\ V + u^0 \cdot \vec{n}_{\Gamma_t} = H, & (x, t) \in \Gamma_t, \\ u^0 = 0, & (x, t) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中, 时间变量  $t \in [0, T]$ , 自由界面  $\Gamma_t$  依赖于时间的变化,  $\vec{n}_{\Gamma_t}$  是自由界面  $\Gamma_t$  上的法向量, 常数  $H$  的取值由  $\Gamma_t$  本身和该曲面上的总势能决定,  $\Omega \setminus \Gamma_t$  表示被界面  $\Gamma_t$  分离开的两个随时间变化而变化的子区域, 区域  $\Omega$  内流体的速度不加区分地用  $u^0$  表示,  $[g]$  表示函数  $g$  沿曲面  $\Gamma_t$  的跳跃间断, 即

$$[g](x) = \lim_{h \downarrow 0} (g(x + h\vec{n}) - g(x - h\vec{n})), \quad x \in \Gamma_t.$$

耦合了流体动力学性质的扩散交界方程能更加真实有效地反映流体的运动规律. NS/AC 方程 (1.2) 到平均曲率流方程 (1.3) 的界面极限问题得到了越来越多的物理学家和数学家的关注. 当极限系统 (1.3) 的解充分光滑时, Abels 和 Fei<sup>[1]</sup> 针对二维光滑有界区域情形, 利用渐近匹配扩展的方法讨论了 NS/AC 方程到尖锐界面的极限问题, 并得到了收敛率估计. Abels 和 Liu<sup>[3]</sup> 研究了 Stokes/Allen-Cahn 方程的界面极限问题. 文献 [1, 3] 均需要对解的光滑性作较高的要求. 这一类问题的更多研究成果可参见文献 [13, 22, 26] 等及其相关引用.

本文主要研究方程 (1.2) 弱解的界面极限问题: 当混合层厚度  $\epsilon \downarrow 0$  时, 讨论方程 (1.2) 的解  $(u^\epsilon, c^\epsilon)$  在弱拓扑意义下的收敛极限, 并分析函数  $(u^0, c^0)$  满足的方程与平均曲率流方程 (1.3) 之间的联系. 为此首先给出方程 (1.2) 弱解的定义, 本文中的一些常用记号和运算会在本节末尾处给出解释.

**定义 1.1** 对于固定的  $\epsilon > 0$  和  $T > 0$ , 称满足如下性质的函数  $(u^\epsilon, c^\epsilon)$  是方程 (1.2) 在时间  $(0, T)$  内的一个弱解  $(u^\epsilon, c^\epsilon)$ :

(1)

$$\begin{aligned} u^\epsilon &\in L^\infty(0, T; L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)), \\ c^\epsilon &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)); \end{aligned}$$

(2) 对于给定的  $0 \leq t_1 < t_2 < T$ ,

• 积分等式

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left( c^\epsilon \phi_t + \nabla \phi \cdot u^\epsilon c^\epsilon - \nabla c^\epsilon \nabla \phi - \frac{1}{\epsilon^2} f(c^\epsilon) \phi \right) dx dt = \int_{\Omega} c^\epsilon \phi(x, t_2) dx - \int_{\Omega} c^\epsilon \phi(x, t_1) dx \quad (1.4)$$

对于任意  $\phi \in C^1(\overline{\Omega} \times [t_1, t_2])$  都成立,

• 积分等式

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (u^\epsilon \psi_t + u^\epsilon \otimes u^\epsilon : \nabla \psi - \nabla u^\epsilon \nabla \psi) dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla c^\epsilon \otimes \nabla c^\epsilon) \cdot \psi dx dt \\ &= - \int_{\Omega} u^\epsilon \psi(x, t_1) dx, \end{aligned} \quad (1.5)$$

对于任意  $\psi \in C_0^1(\Omega \times [t_1, t_2]; \mathbb{R}^3)$  且  $\operatorname{div} \psi = 0$  都成立,

• 初边值条件在迹的意义下成立;

(3) 定义能量密度函数

$$e^\epsilon := \frac{\epsilon}{2} |\nabla c^\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(c^\epsilon) \quad (1.6)$$

对几乎处处的  $s > 0$  或者  $s = 0$ , 有不等式

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |u^\epsilon|^2 + e^\epsilon \right) (x, t) dx + \int_s^t \int_{\Omega} \left( |\nabla u^\epsilon|^2 + \left| \epsilon \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} f(c^\epsilon) \right|^2 \right) dx d\tau \\ &\leq \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |u^\epsilon|^2 + e^\epsilon \right) (x, s) dx, \quad \forall t > s. \end{aligned} \quad (1.7)$$

**注 1.1** 当初值函数满足  $(u_0, c_0) \in L_0^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega)$  时, 方程 (1.2) 存在定义 1.1 意义下的一个弱解, 详见文献 [41].

接下来对势能函数作一些必要的技术性假设.

**假设 1.1** 假设势能函数  $F(s)$  满足

(1)

$$0 \leq F(s) \in C^2(\mathbb{R}), \quad F(\pm 1) = F'(\pm 1) = 0;$$

(2) 存在常数  $\alpha_1 \in (-1, 1)$ , 满足

$$\begin{aligned} F'(s) &\geq 0, \quad \text{若 } s \in (-1, \alpha_1), \\ F'(s) &\leq 0, \quad \text{若 } s \in [\alpha_1, 1); \end{aligned}$$

(3) 存在常数  $\alpha_2 \in (0, 1)$  和  $\alpha_3 > 0$ , 使得对所有的  $p \geq \frac{12}{5}$  有

$$F''(s) \geq \alpha_3 |s|^{p-2}, \quad \forall |s| \geq \alpha_2.$$

下面的定理是本文的主要结论.

**定理 1.1** 在假设 1.1 的条件下, 如果初始能量关于  $\epsilon$  一致有界, 即

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |u^\epsilon|^2 + e^\epsilon \right) (x, 0) dx \leq C_0 < \infty, \quad (1.8)$$

则方程 (1.2) 的弱解  $(u^\epsilon, c^\epsilon)$  满足如下性质:

(1) 存在极限函数  $(u, \mu)$  使得

$$\begin{cases} u^\epsilon \rightharpoonup u & \text{在 } L^\infty(0, T; L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)) \text{ 内,} \\ u^\epsilon \rightarrow u & \text{在 } L^2(0, T; L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^3)) \cap C([0, T]; L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^3)\text{-弱 } L^2 \text{ 拓扑下) 内,} \\ \left( \epsilon \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} f(c^\epsilon) \right) \rightharpoonup \mu & \text{在 } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ 内.} \end{cases} \quad (1.9)$$

(2) 对于任意时间  $t \in [0, T]$ , 存在可测集合  $\Omega_t \subset \Omega \times \{t\} \subset \Omega \times [0, T]$  使得

$$\chi(\Omega_t) \in L^\infty(0, T; \text{BV}(\Omega)) \cap C^{1/4}([0, T]; L^1(\Omega)), \quad (1.10)$$

此外,

$$\begin{aligned} c^\epsilon &\rightarrow -1 + 2\chi(\Omega_t) \quad \text{a.e. 在 } \Omega \times (0, T) \cap C^{1/16}([0, T]; L^2(\Omega)) \text{ 内,} \\ c^\epsilon &\rightarrow -1 + 2\chi(\Omega_t) \quad \text{在 } C^{1/8}([0, T]; L^2(\Omega)) \text{ 内.} \end{aligned} \quad (1.11)$$

(3) 存在一个 Radon 测度  $\lambda$  使得

$$\begin{aligned} e^\epsilon(c^\epsilon) dx dt &\rightharpoonup \lambda \text{ 弱意义下, 在 } \mathcal{M}(\Omega \times [0, T]) \text{ 内,} \\ C\lambda^t(\Omega) &\geq |\nabla \chi(\Omega_t)| \sigma \quad \text{在区间 } (0, T) \text{ 内几乎处处成立,} \end{aligned} \quad (1.12)$$

其中  $\sigma = \int_{-1}^1 \sqrt{F(s)} ds$ .

(4) 对于任意  $\phi \in C_0^1(\Omega \times [t_1, t_2])$  和满足  $\text{div} \psi = 0$  的函数  $\psi \in C_0^1(\Omega \times [t_1, t_2]; \mathbb{R}^3)$ , 积分等式

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (2\chi(\Omega_t) \phi_t + 2\chi(\Omega_t) u \cdot \nabla \phi + \mu \phi) dx dt = \int_{\Omega} 2\chi(\Omega_t) \phi(x, t) \Big|_{t_1}^{t_2} dx \quad (1.13)$$

和

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (u \psi_t + u \otimes u : \nabla \psi - \nabla u \nabla \psi) dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \psi \cdot \text{div} \left( \sum_{i=1}^3 \tilde{b}_i v_i \otimes v_i \right) d\lambda^t(x) dt + \int_{\Omega} u \psi(x, t) \Big|_{t_1}^{t_2} dx \end{aligned} \quad (1.14)$$

成立, 其中  $v = (v_1, v_2, v_3)$  为  $\mathbb{R}^3$  空间中模为单位长度的向量, 常数  $\tilde{b}_i \in [0, 1]$ , 且满足  $\sum_{i=1}^3 \tilde{b}_i \in [0, 1]$ .

(5) 能量型不等式

$$\lambda^t(\Omega) + \int_s^t \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\mu|^2) dx d\tau \leq \lambda^s(\Omega) \quad (1.15)$$

对几乎处处的  $t > s > 0$  成立.

定理的证明基于能量估计方法和测度意义下的紧性性质. 具体地, 首先从 NS/AC 方程 (1.2) 弱解序列  $(u^\epsilon, c^\epsilon)$  的基本能量估计出发, 借用文献 [11, 31, 41] 中的一些证明技巧以及处理流体方程的一些经典方法, 利用文献 [4, 18] 中的紧致性结论, 成功得到解序列的一致紧性估计和正则性估计, 并分析极限函数在弱意义下满足的方程, 对极限函数满足的方程与平均曲率方程 (1.3) 作了对比和联系. 证明过程中需要小心处理弱意义下的极限过程, 克服耦合流体动力学方程后计算过程的复杂性和证明的不确定性; 此外, 在假设 1.1 条件 (3) 中, 需要势能函数  $F$  更高的强制性假设来估计速度函数, 这与处理单一的 Allen-Cahn 方程 [11, 25, 28] 不一样.

本文的一些常用符号和计算规定如下:

**标注 1.1** 矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  和  $B = (b_{ij})_{n \times n}$  的运算  $A : B = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$ ; 单位矩阵  $\mathbb{I} = (\delta_{ij})_{n \times n}$ , 这里  $\delta_{ij}$  是 Kronecker delta 函数. 向量  $a, b \in \mathbb{R}^n$  的标量积和张量积分别表示为  $a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i$  和  $a \otimes b = (a_i b_j)_{n \times n}$ . 采用文献 [4, 9, 18, 38] 中的定义, 对给定的有界光滑域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  和正整数  $k \geq 1$ , 集合  $C_0^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$  包含了所有  $k$  次可微且具有紧支集的函数  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . 集合  $C_0^k(\Omega) = C_0^k(\Omega, \mathbb{R})$  可类似地定义.  $C^k(\Omega)$  和  $C^k(\bar{\Omega})$  分别表示  $\Omega$  上连续函数的集合和一致连续函数的集合. 对于  $\alpha \in (0, 1)$ , 集合  $C^\alpha(\Omega)$  表示指标为  $\alpha$  的 Hölder 空间; 非同质的 Sobolev 空间记为数学符号  $W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . 特别地, 令  $L_0^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$  表示集合  $\{f : f \in C_0^k(\Omega, \mathbb{R}^n), \operatorname{div} f = 0\}$  中的函数在  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$  的闭包. 类似地定义  $W^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $L^p = W^{0,p}$ ,  $H^k = W^{k,2}$ . 此外, Radon 测度  $\mathcal{M}(\Omega)$  是指所有连续函数在  $\Omega$  上的泛函生成的空间. 有界变差 (bounded variation, BV) 函数空间

$$\operatorname{BV}(\Omega) := \{f \in L^1(\Omega) : \nabla f \in \mathcal{M}(\Omega)\},$$

其中范数

$$\|f\|_{\operatorname{BV}(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} + |\nabla f|(\Omega),$$

半范数  $|\nabla f|(\Omega)$  的定义为

$$|\nabla f|(\Omega) := \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} \psi dx, \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega), |\psi| \leq 1 \right\}. \quad (1.16)$$

本文余下内容的安排如下. 第 2 节给出定理 1.1 的证明过程, 具体分为 3 个小节详细展开. 第 2.1 小节得到解序列  $(u^\epsilon, c^\epsilon)$  的一致紧性估计, 并分析它们在合适拓扑下的极限. 在此基础上, 第 2.2 小节论证了能量不等式 (1.15) 的正确性. 第 2.3 小节分析极限函数  $(c, \mu, \chi)$  的性质, 验证定理 1.1 中的积分等式. 第 3 节对极限函数满足的方程与尖锐界面方程 (1.3) 作比较, 并讨论相互之间的联系.

## 2 定理 1.1 的证明

本节证明定理 1.1. 详细证明过程分几个小节展开. 如无特殊说明, 字母  $C > 1$  表示一个不依赖于参数  $\epsilon$  的通用常数.

### 2.1 解序列 $(u^\epsilon, c^\epsilon)$ 的紧致性: (1.9)–(1.11) 的证明

由能量不等式 (1.7) 和初始函数的一致有界假设 (1.8) 推导出, 对所有的  $t > 0$ , 有

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |u^\epsilon|^2 + e^\epsilon \right) (x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \left( |\nabla u^\epsilon|^2 + \left| \epsilon \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} f(c^\epsilon) \right|^2 \right) dx d\tau$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |u^\epsilon|^2 + e^\epsilon \right) (x, 0) dx \\ &\leq C, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中能量密度函数  $e^\epsilon$  的定义参见 (1.6).

利用假设 1.1, 当  $|s|$  的取值较大时,

$$\begin{aligned} F(s) &= F(s) - F(1) \\ &= F'(1)(s-1) + F''(\xi)(s-1)^2 \\ &= F''(\xi)(s-1)^2 \\ &\geq \alpha_3 |\xi|^{p-2} (s-1)^2 \geq C^{-1} (s-1)^2 \\ &\geq C^{-1} (|s| - 1)^2. \end{aligned}$$

结合 (2.1) 以及势能密度函数  $e^\epsilon := \frac{\epsilon}{2} |\nabla c^\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(c^\epsilon) \geq 0$ , 得到

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (|c^\epsilon| - 1)^2 dx \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} F(c^\epsilon) dx \leq C. \quad (2.2)$$

再次利用假设 1.1 中的条件 (3), 并注意  $\Omega$  是有界的, 得到

$$\int_{\Omega} |c^\epsilon|^p dx \leq C. \quad (2.3)$$

接下来证明

$$c^\epsilon \in C^{1/8}([0, T]; L^2(\Omega)). \quad (2.4)$$

引入标准的磨光算子  $K(x)$  (参见文献 [15]), 并作伸缩变换  $K_\eta(x) = \frac{1}{\eta^n} K(\frac{x}{\eta})$  ( $\eta > 0$ ). 令表达式

$$\langle c^\epsilon \rangle_\eta = \int_{\Omega} K_\eta(x-y) c^\epsilon(y, t) dy$$

表示函数  $c^\epsilon$  在  $\Omega$  内的磨光逼近. 由于边界  $\partial\Omega$  是光滑的, 所以在有界域  $\Omega$  内部近边界附近的磨光可以采用镜像反射技巧来实现 (参见文献 [11]). 利用 (2.2) 和假设 1.1, 有

$$\|\langle c^\epsilon \rangle_\eta\|_{L^p(\Omega)} + \eta \|\nabla \langle c^\epsilon \rangle_\eta\|_{L^p(\Omega)} \leq C. \quad (2.5)$$

定义

$$W^\epsilon(x, t) := W(c^\epsilon(x, t)) = \int_{-1}^{c^\epsilon(x, t)} \sqrt{\tilde{F}(s)} ds, \quad \tilde{F}(s) = \min\{F(s), 1 + s^2\}.$$

根据假设 1.1 的条件 (1) 和 (2), 当  $|c^\epsilon(x, t)|$  取值较大时, 容易验证  $(W^\epsilon)'' \geq C > 0$ . 通过直接计算 (参见文献 [2, (3.27)]), 得到

$$C^{-1} |s_1 - s_2|^2 \leq |W(s_1) - W(s_2)| \leq C |s_1 - s_2| (1 + |s_1| + |s_2|), \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

由此,

$$|c^\epsilon(x, t) - c^\epsilon(y, t)|^2 \leq C |W^\epsilon(x, t) - W^\epsilon(y, t)|. \quad (2.7)$$

注意到  $\|K\|_{L^1} = 1$ . 由 Hölder 不等式和 (2.7), 直接计算得到

$$\begin{aligned}
 \|\langle c^\epsilon \rangle_\eta - c^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_\Omega \int_{B(0,1)} K(y) |c^\epsilon(x, t) - c^\epsilon(x - \eta y, t)|^2 dy dx \\
 &\leq C \int_\Omega \int_{B(0,1)} K(y) |W^\epsilon(x, t) - W^\epsilon(x - \eta y, t)| dy dx \\
 &\leq C \int_{B(0,1)} K(y) |W^\epsilon(x, t) - W^\epsilon(x - \eta y, t)| dy \\
 &\leq C \int_{B(0,1)} K(y) \int_0^1 \left| \frac{d}{d\tau} W^\epsilon(x - \tau \eta y, t) \right| d\tau dy \\
 &\leq C \eta \int_{B(0,1)} K(y) \int_0^1 |\nabla W^\epsilon(x - \tau \eta y, t)| d\tau dy \\
 &\leq C \eta \int_\Omega |\nabla W^\epsilon(x, t)| dx.
 \end{aligned}$$

由此, 得到

$$\begin{aligned}
 \|\langle c^\epsilon \rangle_\eta - c^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \eta \int_\Omega |\nabla W^\epsilon(x, t)| dx \\
 &\leq C \eta \left( \epsilon \int_\Omega |\nabla c^\epsilon(x, t)|^2 dx + \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega F(c^\epsilon(x, t)) dx \right) \\
 &\leq C \eta,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中最后一个不等号利用了能量不等式 (2.1).

固定  $0 \leq t_1 < t_2 < T$ , 构造截断函数

$$\phi_n(t) = \begin{cases} n(t - t_1), & t_1 \leq t \leq t_1 + \frac{1}{n}, \\ 1, & t_1 + \frac{1}{n} \leq t \leq t_2 - \frac{1}{n}, \\ n(t_2 - t), & t_2 - \frac{1}{n} \leq t \leq t_2, \end{cases}$$

并假定该函数在其余地方取值为 0. 在定义 1.1 的积分等式 (1.4) 中选取实验函数  $\phi_n(t)(\langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_1) - \langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_2))$ , 然后取极限  $n \rightarrow \infty$ , 得到

$$\begin{aligned}
 &\int_\Omega (c^\epsilon(x, t_1) - c^\epsilon(x, t_2)) (\langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_1) - \langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_2)) dx \\
 &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega u^\epsilon c^\epsilon \nabla (\langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_1) - \langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_2)) dx dt \\
 &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \left( \epsilon \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} f(c^\epsilon) \right) (\langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_1) - \langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_2)) dx dt.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

利用 (2.1) 和 (2.5), (2.9) 中最后两个积分满足如下估计:

$$\begin{aligned}
 &\left| - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega u^\epsilon c^\epsilon \nabla (\langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_1) - \langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_2)) dx dt \right| \\
 &\leq C \sqrt{t_2 - t_1} \|u^\epsilon\|_{L^2(t_1, t_2; L_0^6)} \|c^\epsilon\|_{L^\infty(t_1, t_2; L^{\frac{12}{5}})} \|\nabla \langle c^\epsilon \rangle_\eta\|_{L^\infty(t_1, t_2; L^{\frac{12}{5}})} \\
 &\leq C \sqrt{t_2 - t_1} \|u^\epsilon\|_{L^2(t_1, t_2; L_0^6)} \|c^\epsilon\|_{L^\infty(t_1, t_2; L^p)} \|\nabla \langle c^\epsilon \rangle_\eta\|_{L^\infty(t_1, t_2; L^p)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C\eta^{-1}\sqrt{t_2-t_1}, \\ &\left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left( \epsilon \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} f(c^\epsilon) \right) (\langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_1) - \langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_2)) dx dt \right| \\ &\leq C\sqrt{t_2-t_1} \left\| \left( \epsilon \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} f(c^\epsilon) \right) \right\|_{L^2(t_1, t_2; L^2)} \|\nabla \langle c^\epsilon \rangle_\eta\|_{L^\infty(t_1, t_2; L^2)} \\ &\leq C\eta^{-1}\sqrt{t_2-t_1}. \end{aligned}$$

将上述两个不等式代入 (2.9), 可得

$$\int_{\Omega} (c^\epsilon(x, t_1) - c^\epsilon(x, t_2)) (\langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_1) - \langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_2)) dx \leq C\eta^{-1}\sqrt{t_2-t_1}. \tag{2.10}$$

利用不等式

$$\|c^\epsilon - \langle c^\epsilon \rangle_\eta\|_{L^2}^2 \leq C\eta \|\nabla c^\epsilon\|_{L^2}^2 \leq C\eta,$$

并注意到 (2.10) 的左侧满足

$$\begin{aligned} &(c^\epsilon(x, t_1) - c^\epsilon(x, t_2)) (\langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_1) - \langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_2)) \\ &= |c^\epsilon(x, t_1) - c^\epsilon(x, t_2)|^2 + (c^\epsilon(x, t_1) - c^\epsilon(x, t_2)) (\langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_1) - c^\epsilon(x, t_1) + c^\epsilon(x, t_2) - \langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_2)) \\ &\geq \frac{1}{2} |c^\epsilon(x, t_1) - c^\epsilon(x, t_2)|^2 - |c^\epsilon(x, t_1) - \langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_1)|^2 - |c^\epsilon(x, t_2) - \langle c^\epsilon \rangle_\eta(x, t_2)|^2, \end{aligned}$$

由 (2.10) 推导出

$$\|c^\epsilon(\cdot, t_1) - c^\epsilon(\cdot, t_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\eta^{-1}\sqrt{t_2-t_1} + C\eta \leq C|t_2-t_1|^{1/4},$$

最后一个不等式的成立是因为  $\eta = C|t_2-t_1|^{1/4}$ . 至此, 证明了 (2.4) 的有效性.

再次利用 (2.2) 以及函数  $\tilde{F}$  和  $W(c^\epsilon)$  的定义, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |W(c^\epsilon(x, t_1)) - W(c^\epsilon(x, t_2))| dx &\leq \sqrt{\int_{\Omega} |W'|^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} |c^\epsilon(x, t_1) - c^\epsilon(x, t_2)|^2 dx} \\ &\leq \sqrt{\int_{\Omega} \tilde{F} dx} \sqrt{\int_{\Omega} |c^\epsilon(x, t_1) - c^\epsilon(x, t_2)|^2 dx} \\ &\leq C \|c^\epsilon(\cdot, t_1) - c^\epsilon(\cdot, t_2)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

上式 (2.11) 结合 (2.4) 意味着  $W^\epsilon \in C^{1/8}([0, T], L^1(\Omega))$ . 此外, 由 (2.8) 直接得到

$$\int_{\Omega} |\nabla W^\epsilon(x, t)| dx \leq C \left( \epsilon \int_{\Omega} |\nabla c^\epsilon(x, t)|^2 dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} F(c^\epsilon(x, t)) dx \right) \leq C. \tag{2.12}$$

因此,

$$W^\epsilon \in L^\infty(0, T; W^{1,1}(\Omega)) \cap C^{1/8}([0, T], L^1(\Omega)). \tag{2.13}$$

利用 (2.13) 和嵌入不等式, 对子列在相应拓扑下取极限后得到 (参见文献 [8, 定理 4.4])

$$W^\epsilon \rightarrow W \quad \text{a.e. 在 } (0, T) \times \Omega \text{ 内; } \quad W^\epsilon \rightarrow W \quad \text{在 } C^{1/16}([0, T], L^1(\Omega)) \text{ 内.} \tag{2.14}$$

结合不等式 (2.6) 和 (2.14), 可得

$$c^\epsilon \rightarrow c \quad \text{a.e. 在 } (0, T) \times \Omega \text{ 内}; \quad c^\epsilon \rightarrow c \quad \text{在 } C^{1/16}([0, T], L^2(\Omega)) \text{ 内.} \quad (2.15)$$

由 (2.15), 利用控制收敛定理得到

$$0 \leq \int_{\Omega} (|c| - 1)^2 dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} (|c^\epsilon| - 1)^2 dx \leq C \lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon = 0. \quad (2.16)$$

这意味着

$$c(x, t) = \pm 1 \quad \text{a.e. 在 } (0, T) \times \Omega \text{ 内.}$$

上式保证了, 对于任意固定的时刻  $t$ , 一定存在一个子区域  $\Omega_t \subseteq \Omega$  使得

$$c(x, t) = -1 + 2\chi(\Omega_t). \quad (2.17)$$

其中  $\chi$  表示区域  $\Omega_t$  内的示性函数, 即在区域  $\Omega_t \times \{t\}$  内, 有  $\chi(x, t) = 1$ ; 否则, 有  $\chi(x, t) = 0$ . 根据极限的唯一性, 从 (2.14) 和 (2.15) 中得到

$$W^\epsilon \rightarrow W = W(c(x, t)) \quad \text{a.e. 在 } (0, T) \times \Omega \text{ 内.} \quad (2.18)$$

令  $\sigma = \int_{-1}^1 \sqrt{F(s)} ds$ , 利用  $\tilde{F}$  和  $W^\epsilon$  的表达式, 得到

$$\begin{aligned} W(c) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} W^\epsilon = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-1}^{c^\epsilon} \sqrt{\tilde{F}(s)} ds = \int_{-1}^c \sqrt{\tilde{F}(s)} ds \\ &= \int_{-1}^c \sqrt{F(s)} ds = \chi(\Omega_t) \int_{-1}^1 \sqrt{F(s)} ds \\ &=: \chi(\Omega_t) \sigma. \end{aligned} \quad (2.19)$$

利用 (2.13) 和 (2.19), 得到

$$\chi(\Omega_t) \in L^\infty(0, T; W^{1,1}(\Omega)). \quad (2.20)$$

此外,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\chi(\Omega_{t_1}) - \chi(\Omega_{t_2})| dx &= \int_{\Omega} |\chi(\Omega_{t_1}) - \chi(\Omega_{t_2})|^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} |c(\cdot, t_1) - c(\cdot, t_2)|^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |c^\epsilon(\cdot, t_1) - c^\epsilon(\cdot, t_2)|^2 dx \\ &\leq C |t_1 - t_2|^{1/4}, \end{aligned}$$

即

$$\chi(\Omega_t) \in C^{1/4}([0, T]; L^1(\Omega)). \quad (2.21)$$

因此, (1.10) 可由嵌入不等式  $W^{1,1} \hookrightarrow \text{BV}$ 、(2.21) 和 (2.20) 得到. (1.11) 可由 (2.4)、(2.15) 和 (2.17) 得到.

注 2.1 实际上,  $\chi(\Omega_t) \in L^\infty(0, T; \text{BV}(\Omega))$  保证了, 对于几乎所有的时间, 自由界面

$$\Gamma_t = \partial^* \{\chi(\Omega_t) = 1\}$$

在 Hausdorff 测度  $\mathcal{H}^{n-1}$  意义下的“面积”有界.

下面证明 (1.9). 由基本的不等式 (2.1), 存在极限函数  $(u, \mu)$  使得下列收敛在各自拓扑下成立:

$$\begin{aligned} u^\epsilon \rightharpoonup u & \text{ 在 } L^\infty(0, T; L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^3)) \text{ 内, } \nabla u^\epsilon \rightharpoonup \nabla u & \text{ 在 } L^2(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)) \text{ 内,} \\ \left( \epsilon \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} f(c^\epsilon) \right) \rightharpoonup \mu & \text{ 在 } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ 内.} \end{aligned}$$

由 (2.1) 和 (2.3), 从方程 (1.2)<sub>2</sub> 容易推导出

$$\partial_t u^\epsilon \in L^2(0, T; H^{-m}(\Omega; \mathbb{R}^3)), \quad (2.22)$$

其中, 常数  $m > 0$ ,  $H^{-m}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  是拓扑空间  $H_0^m(\Omega; \mathbb{R}^3) \cap L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  的对偶. 最后, 利用 (2.22)、(2.1)、Aubin-Lions 引理和极限的唯一性, 可推导出收敛

$$u^\epsilon \rightarrow u \text{ 在 } C([0, T]; L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^3))\text{-在弱 } L^2 \text{ 拓扑意义下) 内}$$

和

$$u^\epsilon \rightarrow u \text{ 在 } L_0^2(0, T; L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)) \text{ 内}$$

对所有的  $p \in [1, 6)$  成立.

## 2.2 能量不等式 (1.15) 的证明

令

$$\mathcal{E}^\epsilon := \int_{\Omega} e^\epsilon dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} |u^\epsilon|^2 dx = E^\epsilon + \int_{\Omega} \frac{1}{2} |u^\epsilon|^2 dx. \quad (2.23)$$

由 (2.1), 序列  $\{\mathcal{E}^\epsilon(t)\}_{\epsilon>0}$  是一致单调有界的, 结合  $\|u^\epsilon(\cdot, t)\|_{L^2}$  的连续性, 完全类似于文献 [2, 引理 3.8] 的论证过程, 可得

$$\mathcal{E}^\epsilon \rightarrow \mathcal{E}(t), \quad E^\epsilon(t) \rightarrow E(t), \quad \text{a.e.} \quad (2.24)$$

再次利用 (2.1), 可知存在一个 Radon 测度  $\lambda$ , 使得对所有的  $0 \leq t_1 < t_2 < T$ , 成立

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} d\lambda(x, t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}^\epsilon dt = \int_{t_1}^{t_2} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathcal{E}^\epsilon dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E} dt \leq C_0 |t_2 - t_1|,$$

其中最后一个不等式利用了  $\mathcal{E}^\epsilon$  的一致有界性 (1.8). 注意到 (2.24) 以及时间  $t_1$  和  $t_2$  的任意性, 在 Radon 测度意义下, 有如下的分解公式 (参见文献 [31]):

$$\lambda(x, t) = d\lambda^t(x)dt, \quad \lambda^t(\Omega) = \mathcal{E}(t), \quad \text{对几乎处处时间成立.} \quad (2.25)$$

最后, 利用 (2.23)–(2.25)、(1.9)、范数的弱下半连续性, 对不等式 (1.7) 关于参数  $\epsilon$  取零极限即可得到不等式 (1.15).

### 2.3 极限函数 $(c, \mu, \chi)$ 的性质

根据 (2.12)、(2.19)、(2.23)–(2.24) 和广义导数定义 (1.16), 得到

$$\begin{aligned}
 \sigma|\nabla\chi(\Omega_t)| &= |\nabla W(c)|(\Omega) \\
 &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \|\nabla W(c^\epsilon)\|_{L^1(\Omega)} \\
 &\leq C \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left( \epsilon \int_{\Omega} |\nabla c^\epsilon(x, t)|^2 dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} F(c^\epsilon(x, t)) dx \right) \\
 &\leq C \lim_{\epsilon \downarrow 0} E^\epsilon \\
 &= E(t) \\
 &\leq \mathcal{E}(t).
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

我们指出, 不等式 (2.26) 表明了尖锐界面上的总能量  $\mathcal{E}(t)$  与界面面积  $|\nabla\chi(\Omega_t)|$  和势能  $\sigma$  的乘积之间的关系. 结合 (2.26) 和 (2.25), 得到

$$\sigma|\nabla\chi(\Omega_t)| \leq C\lambda^t(\Omega),$$

这证明了 (1.12).

接下来的性质 2.1 阐述了“差异”测度 (discrepancy measure) 的上界估计, 详细的证明过程可参见文献 [11, 定理 3.6].

**性质 2.1** (参见文献 [11, 定理 3.6]) 存在一个常数  $\eta_0 \in (0, 1]$  和两个定义在  $(0, \eta_0]$  上取值为正的、单调递减的连续函数  $M_1(\eta)$  和  $M_2(\eta)$ , 对任意取定的常数  $\eta \in (0, \eta_0]$  和任意取定的  $\epsilon \in (0, \frac{1}{M_1(\eta)}]$ , 如果函数  $(c^\epsilon, \mu^\epsilon) \in H^2 \times L^2$  满足如下椭圆问题:

$$\begin{cases} -\epsilon\Delta c^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}f(c^\epsilon) = \mu^\epsilon, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial c^\epsilon}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

则“差异”测度

$$\xi^\epsilon = \frac{\epsilon}{2}|\nabla c^\epsilon|^2 - \frac{1}{\epsilon}F(c^\epsilon)$$

满足如下不等式:

$$\int_{\Omega} (\xi^\epsilon)_+ dx \leq \eta \int_{\Omega} e^\epsilon dx + \epsilon M_2(\eta) \int_{\Omega} |\mu^\epsilon|^2 dx, \tag{2.27}$$

其中,  $(\xi^\epsilon)_+ = \max\{\xi^\epsilon, 0\}$ , 势能密度  $e^\epsilon$  的定义见 (1.6).

利用 (2.2) 和  $\eta > 0$  的任意性, 我们从 (2.27) 中推导出

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega} (\xi^\epsilon)_+ dx d\tau \leq 0, \quad \forall t \in (0, T). \tag{2.28}$$

注意到

$$\epsilon|\nabla c^\epsilon|^2 = \frac{\epsilon}{2}|\nabla c^\epsilon|^2 + \frac{1}{\epsilon}F(c^\epsilon) + \frac{\epsilon}{2}|\nabla c^\epsilon|^2 - \frac{1}{\epsilon}F(c^\epsilon) =: e^\epsilon + \xi^\epsilon,$$

则对所有的  $\psi_1, \psi_2 \in C^1(\overline{\Omega \times [0, t]; \mathbb{R}^3})$ , 有

$$\begin{aligned} \epsilon \int_0^t \int_{\Omega} \psi_1 \nabla c^\epsilon \otimes \nabla c^\epsilon \psi_2 dx d\tau &\leq \epsilon \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla c^\epsilon|^2 |\psi_1| |\psi_2| dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} e^\epsilon |\psi_1| |\psi_2| dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \xi^\epsilon |\psi_1| |\psi_2| dx d\tau \\ &\leq \int_0^t \int_{\Omega} e^\epsilon |\psi_1| |\psi_2| dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \xi_+^\epsilon |\psi_1| |\psi_2| dx d\tau. \end{aligned}$$

利用 (2.28) 和 (2.25), 在上式中取极限  $\epsilon \downarrow 0$ , 得到

$$\int_0^t \int_{\Omega} \psi_{1i} d(\lambda_{ij})_{n \times n} \psi_{2j} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega} \epsilon \psi_1 \nabla c^\epsilon \otimes \nabla c^\epsilon \psi_2 dx d\tau \leq \int_0^t \int_{\Omega} |\psi_1| |\psi_2| d\lambda(x, t). \quad (2.29)$$

上式意味着  $\lambda_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) 在测度意义下是绝对连续的, 由测度论中的 Radon-Nikodym 导数公式 (参见文献 [18]), 有

$$\frac{d\lambda_{ij}}{d\lambda} = v_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.30)$$

其中,

$$(v_{ij})_{3 \times 3} = \sum_{i=1}^3 \tilde{b}_i v_i \otimes v_i, \quad \tilde{b}_i \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^3 \tilde{b}_i \in [0, 1], \quad (2.31)$$

$v = (v_1, v_2, v_3)$  为  $\mathbb{R}^3$  中模为单位长度的向量. 上述详细的推导也可参见文献 [2, 11].

利用 (1.9)–(1.11), 在 (1.2)<sub>3</sub> 两端乘以  $\phi \in C^1(\overline{\Omega \times [0, T]})$ , 取极限  $\epsilon \downarrow 0$  后得到

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega} (2\chi(\Omega_t)\phi_t + 2\chi(\Omega_t)u \cdot \nabla\phi + \mu\phi) dx dt \\ &= \int_{\Omega} 2\chi(\Omega_T)\phi(x, T) dx - \int_{\Omega} 2\chi(\Omega_0)\phi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

上式即为 (1.13). 此外, 等式 (1.13) 意味着在分布意义下成立

$$\partial_t \chi(\Omega_t) + u \cdot \nabla \chi(\Omega_t) = \mu \quad \text{在 } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)) \text{ 内}. \quad (2.32)$$

注意到  $\chi(\Omega_t)$  是 BV 函数, 所以  $\nabla \chi$  关于  $|\nabla \chi|$  是绝对连续的. 利用 Radon-Nikodym 导数可以定义自由界面  $\Gamma_t = \partial^* \{\chi(\Omega_t) = 0\}$  上的向量  $\tilde{n}_{\Gamma_t} = \frac{\nabla \chi}{|\nabla \chi|}$  和移动速度  $V = \frac{\partial_t \chi(\Omega_t)}{|\nabla \chi|}$ . 若规定

$$\frac{\mu}{|\nabla \chi|} = H \quad \text{在测度意义下 a.e. 在 } \Gamma_t \text{ 上}, \quad (2.33)$$

则由等式 (2.32) 可推导出

$$V + u \cdot \tilde{n}_{\Gamma_t} = H \quad \text{在 } \Gamma_t \text{ 上}, \quad (2.34)$$

此等式吻合 (1.3)<sub>5</sub>.

接下来, 对等式 (1.2)<sub>2</sub> 两端乘以  $\psi$ , 其满足  $\psi \in C_0^1(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^3)$  且  $\operatorname{div} \psi = 0$ , 利用分部积分公式, 取极限  $\epsilon \downarrow 0$ , 得到

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u\psi_t + u \otimes u : \nabla \psi - \nabla u \nabla \psi) dx dt$$

$$= - \int_{\Omega} u_0 \psi(x, 0) dx - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \epsilon \nabla c^\epsilon \otimes \nabla c^\epsilon : \nabla \psi dx dt. \quad (2.35)$$

现在处理 (2.35) 中的最后一项. 利用 (2.29)–(2.31) 和分解公式 (2.25), 得到

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega} \psi_1 \nabla c^\epsilon \otimes \nabla c^\epsilon \psi_2 dx d\tau &= \int_0^t \int_{\Omega} \psi_{1i} d(\lambda_{ij})_{3 \times 3} \psi_{2j} \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} \psi_{1i} (v_{ij})_{3 \times 3} \psi_{2j} d\lambda(x, t) \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} \psi_{1i} \sum_{i=1}^3 \tilde{b}_i v_i \otimes v_i \psi_{2j} d\lambda(x, t) \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} \psi_{1i} \sum_{i=1}^3 \tilde{b}_i v_i \otimes v_i \psi_{2j} d\lambda^t(x) dt. \end{aligned}$$

由此计算得到

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla c^\epsilon \otimes \nabla c^\epsilon : \nabla \psi dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^3 \tilde{b}_i v_i \otimes v_i \right) : \nabla \psi d\lambda^t(x) dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \psi \cdot \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^3 \tilde{b}_i v_i \otimes v_i \right) d\lambda^t(x) dt. \end{aligned} \quad (2.36)$$

将 (2.36) 代入 (2.35), 得到

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (u \psi_t + u \otimes u : \nabla \psi - \nabla u \nabla \psi) dx dt \\ = - \int_{\Omega} u_0 \psi(x, 0) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \psi \cdot \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^3 \tilde{b}_i v_i \otimes v_i \right) d\lambda^t(x) dt. \end{aligned} \quad (2.37)$$

注意到速度函数在自由界面  $\Gamma_t$  上无跳跃间断, 即  $[u] = 0$ . 考虑应力张量在  $\Gamma_t$  上的作用, 逐项计算 (2.37) 的左侧如下:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u \psi_t dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} \chi u \psi_t dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (1 - \chi) u \psi_t dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\{\chi=0\} \cup \{\chi=1\}} u_t \psi dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega \setminus \Gamma_t} u_t \psi dx dt. \end{aligned}$$

类似地,

$$\int_0^T \int_{\Omega} u \otimes u : \nabla \psi dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega \setminus \Gamma_t} \psi \cdot \operatorname{div}(u \otimes u) dx dt.$$

利用  $\operatorname{div} \psi = 0$ , 应力项部分的积分可写为

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \nabla \psi dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \chi \nabla u \nabla \psi dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} (1 - \chi) \nabla u \nabla \psi dx dt$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^T \int_{\Omega \setminus \Gamma_t} \psi(\nabla p - \Delta u) dx dt \\
 &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_t} \psi[\nabla u^0 - P^0] \cdot \vec{n}_{\Gamma_t} d|\nabla \chi| dt.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

结合上述 3 个等式, 积分等式 (2.37) 在区域  $\Omega \setminus \Gamma_t$  内弱意义下满足

$$u_t + u \cdot \nabla u + \nabla P = \Delta u. \tag{2.39}$$

此外, 假设

$$\sigma|\nabla \chi(\Omega_t)| = \lambda^t(\Omega), \tag{2.40}$$

对比 (2.37) 和 (2.38) 的最后一个积分后, 在界面  $\Gamma_t$  上成立

$$[\nabla u - P] \cdot \vec{n}_{\Gamma_t} = \sigma \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i v_i \otimes v_i \right). \tag{2.41}$$

综上, 结合 (2.34)、(2.39) 和 (2.41), 极限函数满足

$$\begin{cases}
 \operatorname{div} u = 0, & (x, t) \in \Omega \setminus \Gamma_t, \\
 u_t + u \cdot \nabla u + \nabla P = \Delta u, & (x, t) \in \Omega \setminus \Gamma_t, \\
 [\nabla u - P] \cdot \vec{n} = \sigma \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i v_i \otimes v_i \right), & (x, t) \in \Gamma_t, \\
 [u] = 0, & (x, t) \in \Gamma_t, \\
 V + u \cdot \vec{n} = H, & (x, t) \in \Gamma_t.
 \end{cases} \tag{2.42}$$

至此完成了定理 1.1 的证明.

**注 2.2** 假设条件 (2.40) 很难成立. 在本文的证明中, 我们只能得到较弱的结论 (1.12).

### 3 方程组 (2.42) 与尖锐界面模型 (1.3) 的比较

本节结合测度论中 varifold 弱解的概念, 对界面  $\Gamma_t$  上等式 (2.42)<sub>3</sub> 中的

$$\operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i v_i \otimes v_i \right) \tag{3.1}$$

和 (1.3)<sub>3</sub> 中的

$$H \vec{n}_{\Gamma_t} \tag{3.2}$$

表达式的联系作简单的分析.

利用 (1.6) 和事实

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla c^\epsilon \otimes \nabla c^\epsilon - e^\epsilon \mathbb{I}) = \left( \epsilon \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} f(c^\epsilon) \right) \nabla c^\epsilon,$$

动量方程 (1.2)<sub>2</sub> 可改写为

$$u_t^\epsilon + u^\epsilon \cdot \nabla u^\epsilon + \nabla(P^\epsilon - e^\epsilon) = \Delta u^\epsilon - \left( \epsilon \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} f(c^\epsilon) \right) \nabla c^\epsilon. \tag{3.3}$$

对于  $C_0^1(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^3)$  中任意满足  $\operatorname{div} \psi = 0$  的函数  $\psi$ , 沿用文献 [30] 中的方法推导出

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \epsilon \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} f(c^\epsilon) \right) \psi \cdot \nabla c^\epsilon dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \psi : \sum_{i=1}^n b_i \left( \mathbb{I} - v_i \otimes v_i \right) d\lambda(x, t), \quad (3.4)$$

这里

$$b_i = \tilde{b}_i + \frac{1}{n-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i \right),$$

其中  $\tilde{b}_i$  满足 (2.31) 中的要求.

构造合适的 varifold 函数, 不妨记为  $V$ , 继续计算 (3.4) 得到

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \epsilon \Delta c^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} f'(c^\epsilon) \right) \psi \cdot \nabla c^\epsilon dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \psi : \sum_{i=1}^n b_i (\mathbb{I} - v_i \otimes v_i) d\lambda(x, t) \\ &=: -\langle \delta V, \psi \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

这意味着 (3.3) 中的最后一项可以表示为某个 varifold 函数  $V$  的第一变分形式. 实际上, 如果假设曲面充分光滑,  $V$  的第一变分则是平均曲率向量  $H\vec{n}_{\Gamma_t}$ , 即在测度意义下,

$$\delta V = H\vec{n}_{\Gamma_t} \quad (3.6)$$

(详细的论述可参见文献 [2, 5, 7, 11, 28, 31, 32]).

最后, 结合等式 (3.6), 针对改写后的动量等式 (3.3), 完全类似 (2.41) 的推导过程, 计算可得

$$[\nabla u^0 - P^0] \cdot \vec{n}_{\Gamma_t} = \sigma \operatorname{div} \sum_{i=1}^n b_i (\mathbb{I} - v_i \otimes v_i) =: \sigma H\vec{n}_{\Gamma_t} \quad \text{在 } \Gamma_t \text{ 上.} \quad (3.7)$$

至此, 等式 (3.7) 和 (2.42)<sub>3</sub> 说明了

$$\operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i v_i \otimes v_i \right) = H\vec{n}_{\Gamma_t} \quad \text{a.e. 在 } \Gamma_t \text{ 上.} \quad (3.8)$$

## 参考文献

- 1 Abels H, Fei M. Sharp interface limit for a Navier-Stokes/Allen-Cahn system with different viscosities. *SIAM J Math Anal*, 2023, 55: 4039–4088
- 2 Abels H, Lengeler D. On sharp interface limits for diffuse interface models for two-phase flows. *Interfaces Free Bound*, 2014, 16: 395–418
- 3 Abels H, Liu Y. Sharp interface limit for a Stokes/Allen-Cahn system. *Arch Ration Mech Anal*, 2018, 229: 417–502
- 4 Adams R. *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975
- 5 Allard W K. On the first variation of a varifold. *Ann of Math (2)*, 1972, 95: 417–491
- 6 Allen S, Cahn J. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metall*, 1979, 27: 1084–1095
- 7 Almgren F Jr. *The Theory of Varifolds*. Mimeographed Notes. Princeton: Princeton Univ Press, 1965
- 8 Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces. *Glas Mat Ser III*, 2000, 35: 161–177
- 9 Ambrosio L, Fusco N D, Pallara D. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. New York: Clarendon Press, 2000
- 10 Bronsard L, Kohn R V. On the slowness of phase boundary motion in one space dimension. *Comm Pure Appl Math*, 1990, 43: 983–997

- 11 Chen X. Global asymptotic limit of solutions of the Cahn-Hilliard equation. *J Differential Geom*, 1996, 44: 262–311
- 12 Chen X, Elliott C. Asymptotics for a parabolic double obstacle problem. *Proc Roy Soc London Ser A*, 1994, 444: 429–445
- 13 Chen Y, He Q, Huang B, et al. Navier-Stokes/Allen-Cahn system with generalized Navier boundary condition. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2022, 38: 98–115
- 14 de Mottoni P, Schatzman M. Evolution géométrique d'interfaces. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1989, 309: 453–458
- 15 Evans L C. *Partial Differential Equations*, 2nd ed. Graduate Studies in Mathematics 19. Providence: Amer Math Soc, 2010
- 16 Evans L C, Soner H M, Souganidis P E. Phase transitions and generalized motion by mean curvature. *Comm Pure Appl Math*, 1992, 45: 1097–1123
- 17 Evans L C, Spruck J. Motion of level sets by mean curvature. I. *J Differential Geom*, 1991, 33: 635–681
- 18 Evans L R, Gariepy R. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 1992
- 19 Fife P. *Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Philadelphia: SIAM, 1988
- 20 Fife P, Hsiao L. The generation and propagation of internal layers. *Nonlinear Anal*, 1988, 12: 19–41
- 21 Gurtin M. *Thermomechanics of Evolving Phase Boundaries in the Plane*. New York: Clarendon Press, 1993
- 22 Hensel S, Liu Y. The sharp interface limit of a Navier-Stokes/Allen-Cahn system with constant mobility: Convergence rates by a relative energy approach. *SIAM J Math Anal*, 2023, 55: 4751–4787
- 23 Herring C. The use of classical macroscopic concepts in surface-energy problems. In: *Structure and Properties of Solid Surfaces*. Chicago: Univ Chicago Press, 1953, 5–81
- 24 Hohenberg P C, Halperin B I. Theory of dynamic critical phenomena. *Rev Modern Phys*, 1977, 49: 435–479
- 25 Ilmanen T. Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature. *J Differential Geom*, 1993, 38: 417–461
- 26 Jiang S, Su X, Xie F. Remarks on sharp interface limit for an incompressible Navier-Stokes and Allen-Cahn coupled system. *Chin Ann Math Ser B*, 2023, 44: 663–686
- 27 Kenneth A. *The Motion of a Surface by Its Mean Curvature*. Mathematical Notes, vol. 20. Princeton: Princeton Univ Press, 1978
- 28 Laux T, Simon T M. Convergence of the Allen-Cahn equation to multiphase mean curvature flow. *Comm Pure Appl Math*, 2018, 71: 1597–1647
- 29 Li D. Effective maximum principles for spectral methods. *Ann Appl Math*, 2021, 37: 131–290
- 30 Luckhaus S, Modica L. The Gibbs-Thompson relation within the gradient theory of phase transitions. *Arch Ration Mech Anal*, 1989, 107: 71–83
- 31 Melchionna S, Rocca E. Varifold solutions of a sharp interface limit of a diffuse interface model for tumor growth. *Interfaces Free Bound*, 2018, 19: 571–590
- 32 Menne U. The concept of varifold. *Notices Amer Math Soc*, 2017, 64: 1148–1152
- 33 Mullins W. *Solid surface morphologies governed by capillarity*. In: *Metal Surface: Structure, Energetics and Kinetics*. Metals Park: Am Soc Met, 1963, 17–66
- 34 Rubinstein J, Sternberg P, Keller J B. Fast reaction, slow diffusion, and curve shortening. *SIAM J Appl Math*, 1989, 49: 116–133
- 35 Saner H M. Ginzburg-Landau equation and motion by mean curvature, I: Convergence. *J Geom Anal*, 1997, 7: 437–475
- 36 Sato N. A simple proof of convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature. *Indiana Univ Math J*, 2008, 57: 1743–1752
- 37 Wu H. A review on the Cahn-Hilliard equation: Classical results and recent advances in dynamic boundary conditions. *Electron Res Arch*, 2022, 30: 2788–2832
- 38 Wu Z, Yin J, Wang C. *Elliptic and Parabolic Equations*. Hackensack: World Sci Publ, 2006 [伍卓群, 尹景学, 王春朋. 椭圆与抛物型方程引论. 北京: 科学出版社, 2003]
- 39 Zhang G, Wang Q, Sha L-T, et al. Phase-field model and its application in electrochemical energy storage materials (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2020, 69: 226401 [张更, 王巧, 沙立婷, 等. 相场模型及其在电化学储能材料中的应用. *物理学报*, 2020, 69: 226401]
- 40 Zhang L, Lu Y, Chen Z, et al. Application of continuum phase-field in modeling of microstructure evolution process (in Chinese). *Materials Reports*, 2013, 27: 122–126 [张刘超, 卢艳丽, 陈铮, 等. 连续相场模型在微观结构演化过程模拟中的应用. *材料导报*, 2013, 27: 122–126]
- 41 Zhao L, Guo B, Huang H. Vanishing viscosity limit for a coupled Navier-Stokes/Allen-Cahn system. *J Math Anal Appl*, 2011, 384: 232–245

## On a sharp interface limit for weak solutions of the Navier-Stokes/Allen-Cahn equations

Zhilei Liang & Dehua Wang

**Abstract** The diffusion interface model describes the motion of two macroscopically immiscible, viscous fluids. This article concerns the sharp interface limit for the diffusion interface model. We focus on the Navier-Stokes/Allen-Cahn (NS/AC) equations, one of the most important diffusion interface models. In particular, we study the zero  $\epsilon$ -limit for the weak solutions  $(u^\epsilon, c^\epsilon)$  to NS/AC equations in a bounded domain in dimension three, where  $\epsilon$  ( $> 0$ ) is the width of the diffuse interface. We prove that the solution sequence  $(u^\epsilon, c^\epsilon)$  converges to a limit  $(u^0, c^0)$  in the weak sense; in addition, we discuss the relationship between  $(u^0, c^0)$  and the solutions to the sharp interface model. Our approach is based on the uniform in  $\epsilon$  estimates and the compactness results in Radon measures.

**Keywords** mixing fluids, weak solutions, Navier-Stokes/Allen-Cahn equations, sharp interface limit

**MSC(2020)** 35K57, 76D05, 49Q20

**doi:** 10.1360/SSM-2023-0331