

求解 SAT 问题的拟物拟人算法——Solar^{***}

黄文奇 金人超

(华中理工大学计算机系, 武汉 430074)

摘要 利用拟物与拟人的方法, 为合取范式可满足性问题的高效率近似求解得出了继承策略、新路策略和赦免策略, 然后对著名的 Bart Selman 跳坑策略给出了一个直观解释. 综合这些策略得出了一个新的求解算法——Solar.

关键词 合取范式 可满足性 拟物法 拟人法 算法

1 拟物拟人途径

命题逻辑中合取范式(CNF)的可满足性问题是当代理论计算机科学的核心问题, 对此问题的快速求解是各色门类计算机技术工程的瓶颈任务. 虽然目前一时难以建立完善有关理论, 但是沿着拟物拟人途径却可望为求解此问题得出高效实用的快速算法.

所谓拟物即是寻找到与原始数学问题等价的物理世界并观察这个世界中物质运动的生动形象, 然后从中得出启发以求解数学问题^[1]. 由于物理状态的演化天然地是按照使其 Lagrange 函数的积分达到最小的方式进行, 这就决定了拟物算法最终在数学上落实为优化问题. 然而用数学方法求解优化问题, 有时会碰到计算落入局部最小值陷阱的困难境地, 对于如何跳出局部最小值陷阱让计算走向前景更好的区域中去的问题, 拟物方法已无能为力, 但是, 人类在几千年的共同生活中形成了丰富的社会经验, 利用这些经验作比拟有时可以启发出好的“跳出陷阱”的策略. 另外, 即使在拟物的计算过程中, 为使计算进行得更顺畅一些, 讯息资源被利用得更充分一些, 人们的社会经验有时也是有用的. 我们可以将这种把人类的社会经验形式化为算法用以求解某些特殊困难的数学问题的方式称为拟人途径^[2].

2 例子与一般情形

考虑如下的 CNF, 问它是否可以满足

$$(\bar{P}_1 \vee \bar{P}_2) \wedge (P_1 \vee P_2), \quad (2.1)$$

其中 P_1, P_2 为独立命题变元, $\bar{P}_i$ 表示 P_i 的非. 每个命题变元的取值范围为 $\{0, 1\}$, 0 和 1 的逻辑意义分别为假和真.

考虑如下变换, 它将二维 Euclid 空间 $R^2 = \{-\infty, +\infty\}^2$ 中的任一点 (x_1, x_2) 变换成二元

1996-08-22 收稿, 1996-11-26 收修改稿

* 国家“八六三”高科技计划、国家自然科学基金及数学天元基金资助项目

** 此算法于 1996 年 3 月 17 日在北京 96 第三届 SAT 问题快速算法国际竞赛中获金奖(第 1 名)

Boole 空间 $\{0, 1\}^2$ 中的点 (P_1, P_2)

$$P_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } x_i \geq 1; \\ 0, & \text{若 } x_i \leq 0; \\ \text{任意地给定 0 或 1, 若 } x_i \in \text{开区间}(0, 1). \end{cases} \quad (2.2)$$

因为 $P_1 \vee P_2$ 为真意味着 $P_1 = 1$ 或 $P_2 = 1$ 即 $x_1 \geq 1$ 或 $x_2 \geq 1$; $\bar{P}_1 \vee \bar{P}_2$ 为真意味着 $P_1 = 0$ 或 $P_2 = 0$, 即 $x_1 \leq 0$ 或 $x_2 \leq 0$. 于是, 变换(2.2)式将 CNF(2.1)的可满足性问题等价地变换为如下 R^2 中的覆盖问题: 在图 1 所示的平面上是否存在一个点, 它既处于斜阴影区域又处于垂直阴影区域? 换言之, 对于已知的 2 个区域而言, 平面上是否存在一个点, 它被其中的每一个所覆盖? 因此, 可将 CNF 可满足性问题看成 Covering 问题, 只不过在经典的 Covering 问题中是点不动区域动, 而现在则是区域不动点动^[3-5].

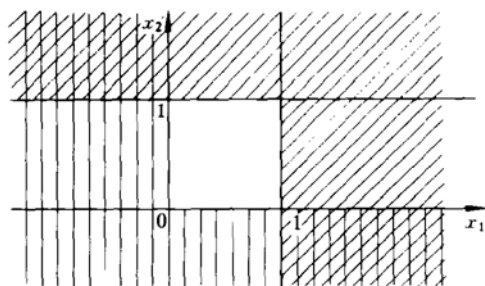


图 1

可将直阴影区域与斜阴影区域都看成带负电荷的钢板, 它们之间被电介质薄板隔开. 将 2 块钢板压紧平放好, 上面再放 1 块玻璃板. 此时如果在玻璃板的任一给定位置上放 1 颗带正电荷的玻璃珠, 则 2 个带电钢板中的每个都用自己的电场力独立作用于玻璃珠以将它引向自身. 玻璃珠一旦进入某钢板后此钢板由于屏蔽现象的原因即对其失去引力, 待到又离开这块钢板了, 则此板又对珠子恢复引力, 再次将其引向自身. 除非玻璃珠达到 2 块钢板的公共部分, 它将一直处于不停的运动之中. 这样, 在 2 块钢板诱导出的 2 个电场力的共同作用之下, 玻璃珠最终会逐渐被引至由这 2 个区域共同覆盖的公共部分. 于是 Covering 问题得到解决. 按变换(2.2)式, 则原始的可满足性问题得到解决.

玻璃珠所受的力为

$$\mathbf{F} = -\text{grad}[U_1(x_1, x_2) + U_2(x_1, x_2)], \quad (2.3)$$

其中 $U_v(x_1, x_2)$ 为第 v 块钢板诱导出的电场的势能. 按照物理意义, $U_1(x_1, x_2)$ (直阴影钢板诱导出的势能) 在第 1 象限外部 (导体上) 值为零, 而在内部 (真空) 则满足 Laplace 方程. 在针对第 1 象限利用分离变量法求解偏微分方程边值问题后得出 $U_1(x_1, x_2)$ 在整个平面上的分布为

$$U_1(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2, & \text{若 } x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0; \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (2.4)$$

同理, 相应于斜阴影钢板, 可得

$$U_2(x_1, x_2) = \begin{cases} (1 - x_1)(1 - x_2), & \text{若 } x_1 \leq 1 \wedge x_2 \leq 1; \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (2.5)$$

总势能为

$$U(x_1, x_2) = U_1(x_1, x_2) + U_2(x_1, x_2). \quad (2.6)$$

显然, $U(x_1, x_2)$ 为非负函数, 并且 $U(x_1, x_2) = 0$ 等价于点 (x_1, x_2) 是与 CNF-SAT 问题(2.1)相应的覆盖问题的解. 因此, 我们的 CNF-SAT 问题被转化成了总势能函数 $U(x_1, x_2)$

的求最小值点问题——优化问题. 设 (x_1^*, x_2^*) 为最小值点, 若 $U(x_1^*, x_2^*) = 0$ 则按(2.2)式即得出原始 SAT 问题的解 (P_1^*, P_2^*) ; 若 $U(x_1^*, x_2^*) > 0$ 则原始 SAT 问题无解.

对于一般的 CNF

$$\bigwedge_{i=1}^l (P_{i,1} \vee P_{i,2} \vee \cdots \vee P_{i,k_i} \vee \bar{P}_{ri,1} \vee \bar{P}_{ri,2} \vee \cdots \vee \bar{P}_{ri,K_{ri}}), \quad (2.7)$$

其中 $P_{i,1}, \dots, P_{i,k_i}, P_{ri,1}, \dots, P_{ri,K_{ri}}$ 为命题变元集 $\{P_1, \dots, P_m\}$ 中两两不同的命题变元. 相应地写出总势能函数

$$U(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^l U_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (2.8)$$

其中

$$U_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{cases} (1 - x_{i,1})(1 - x_{i,2}) \cdots (1 - x_{i,k_i}) x_{ri,1} x_{ri,2} \cdots x_{ri,K_{ri}}, \\ \text{若 } x_{i,1} \leq 1 \wedge \cdots \wedge x_{i,k_i} \leq 1 \wedge x_{ri,1} \geq 0 \wedge \cdots \wedge x_{ri,K_{ri}} \geq 0; \\ 0, \quad \text{否则.} \end{cases} \quad (2.9)^{1)}$$

这里 $U_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 的物理意义为 m 维 Euclid 空间中带负电的导体

$$R^m - x_{i,1} \leq 1 \wedge \cdots \wedge x_{i,k_i} \leq 1 \wedge x_{ri,1} \geq 0 \wedge \cdots \wedge x_{ri,K_{ri}} \geq 0$$

所诱导出的电场的静电势能, 其中 $x_{i,1}, \dots, x_{i,k_i}, x_{ri,1}, \dots, x_{ri,K_{ri}}$ 为实变元集 $\{x_1, \dots, x_m\}$ 中两两不同的实变元.

CNF(2.7) 的 SAT 问题等价于对(2.8)式中总势能函数 $U(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 求最小值点的问题. 设 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$ 为最小值点, 若 $U(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) > 0$ 则 SAT 问题无解, 若 $U(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) = 0$, 则依变换(2.10)

$$P_v^* = \begin{cases} 1, & \text{若 } x_v^* \geq 1; \\ 0, & \text{若 } x_v^* \leq 0; \\ \text{任意地给定 } 0 \text{ 或 } 1, & \text{若 } x_v^* \in (0, 1); \end{cases} \quad \text{对于 } v = 1, 2, \dots, m. \quad (2.10)$$

$P_1^*, P_2^*, \dots, P_m^*$ 为 CNF(2.7) 的成真指派. 反之若 $P_1^*, P_2^*, \dots, P_m^*$ 为 CNF(2.7) 的成真指派则总势能函数

$$U(P_1^*, P_2^*, \dots, P_m^*) = 0. \quad (2.11)$$

3 对总势能函数寻优搜索的大致框架

由于对实数的运算比对 01 数的运算要慢得多, 真正模拟实 m 维 Euclid 空间 R^m 中带电粒子运动的模拟算法, 在目前国际学术界所涉及的低维情形(如小于 10^5 维)不会显示出其真正的优点. 而由于(2.11)式的保证, 我们可以只对总势能函数 $U(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 在 R^m 中的

1) 由此表达式可见, 我们的 $U_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 在广大的地区为零, 与其他学者所提出的指标函数不同. 由于玻璃珠频繁地在 Euclid 空间中单位立方体 $[0, 1]^m$ 的边界上运动, 而边界上 U 的梯度是取决于函数在两侧的分布, 而不是单方面地取决于一侧的分布的, 因此, 即使是在 $[0, 1]^m$ 中讨论问题, 我们的函数 $U_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 也是不同的. 至于考虑到 U_i 的物理来源, 则这种不同就更是深刻了

子集, 离散的 $\{0, 1\}^m$ 空间上进行寻优搜索. 注意, 即使在这种离散的搜索中, 我们的连续的物理模型所带给我们对 SAT 问题的感觉与理解, 其价值仍然是非常之高的. 因为利用这种感觉与理解仍然能启发出好的搜索策略. 与这种策略有关的现象在本质上与离散或连续没有关系, 但在连续的表达方式之下, 特别在有了物理意义之后, 人们能看得更为直观与清晰. 另外, 这种连续模型使我们能很自然地将离散计算嵌入到连续计算中去, 从而可以利用连续数学中强有力的工具, 从理论上得出在离散搜索中对于一个点及其邻域中全部点上的总势能函数值的快速算法.

定义 3.1 把对 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的一组真值指派看成 $\{0, 1\}^m$ 空间中的一个点 X , 将与点 X 恰在某一个变元上取值不同的点的集合称为 X 的邻域.

显然, 任一点的邻域中恰有 m 个点. 对于点 X' , 若 $U(X') < U(X)$ 则称 X' 为 X 的邻域中的下降点. 若下降点 X' 是由 X 翻转变元 x_v 的值而来, 则称 x_v 为 X 的下降变元.

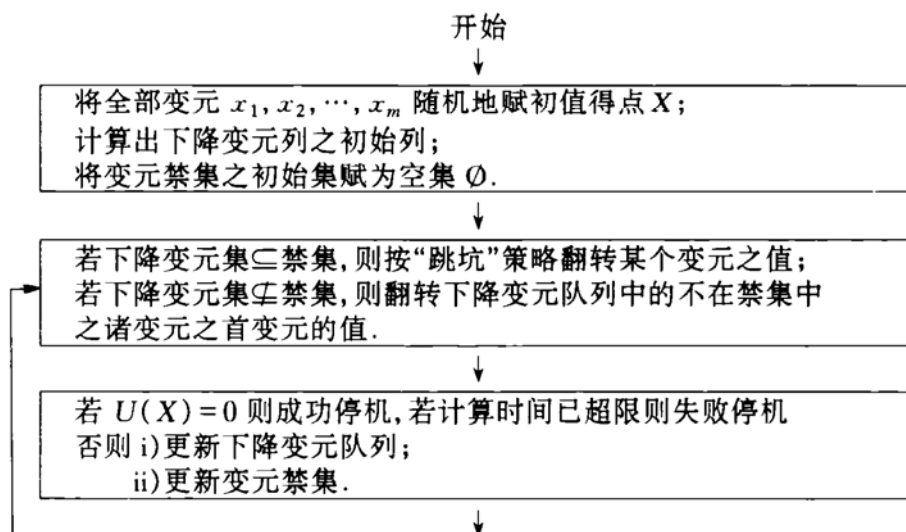
我们的寻优搜索的原始思路如下:

(1) 在 $\{0, 1\}^m$ 空间中随机地取定一个点作为 X 的初始点;

(2) 设在任一时刻 X 的值 $X^{(t)}$ 已算出, 先按某种自然方式将 $X^{(t)}$ 的邻域中的下降点点集排成直线队列, 若下降点点集非空, 则将这个队列的为首的点选作点 X 在 $t+1$ 时刻的值 $X^{(t+1)}$. 我们可将这种从 $X^{(t)}$ 到 $X^{(t+1)}$ 的过渡称作下降步骤. 若下降点点集为空则知 $X^{(t)}$ 点已为函数 U 的局部最小值点, 于是按某种基于拟人思路的“跳坑”策略将计算从 $X^{(t)}$ 点跳到其邻域中的一个确定的新点 $X^{(t+1)}$. 我们可将这种从 $X^{(t)}$ 到 $X^{(t+1)}$ 的过渡称作逃出步骤.

以上思路虽然是本质的, 但有一个小漏洞需要补平. 即在逃出步骤中, 若点 $X^{(t)}$ 经翻转某个变元 x_v 后变成 $X^{(t+1)}$, 则很可能从 $X^{(t+1)}$ 的角度来看, 老点 $X^{(t)}$ 是 $X^{(t+1)}$ 的邻域中的下降点, 于是很有可能从 $X^{(t+1)}$ 出发的下降步骤是再翻转变元 x_v 值而得出 $X^{(t+2)} = X^{(t)}$. 即计算走了回头路.

为补平这一漏洞, 我们可以设置变元禁集并将下降变元中的诸变元按实行翻转的优先顺序排成纵队列. 这样, 我们的寻优搜索的思路框架被发展为如下框图.



以下我们分节描述利用什么样的相应策略如何具体完成此框图中的各种计算. 这种描述一旦完成, Solar 算法事实上也就被清楚地呈现了出来.

4 继承策略——点 X 上的势能函数与下降变元集的快速计算

记第 t 时刻的诸变元 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的取值为 $X^{(t)} \in \{0, 1\}^m$, 于是第 $t+1$ 时刻的点 $X^{(t+1)}$ 是从 $X^{(t)}$ 出发经过翻转某变元 x_u ($u=1, 2, \dots, m$) 的 01 值而来.

由于对 (2.8) 式中各 U_i , 在其表达式 (2.9) 中, 每个变元至多只出现一次, 根据分析学中的 Taylor 公式, 我们有如下严格等式:

$$U(X^{(t+1)}) = U(X^{(t)}) + (x_u^{(t+1)} - x_u^{(t)}) \cdot \frac{\partial U(X^{(t)})}{\partial x_u}.$$

由于 01 值 $x_u^{(t+1)}$ 是自 01 值 $x_u^{(t)}$ 翻转而来, $x_u^{(t+1)} = 1 - x_u^{(t)}$, 于是得出计算总势能 $U(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 的递推公式

$$U(X^{(t+1)}) = U(X^{(t)}) + (1 - 2x_u^{(t)}) \cdot \frac{\partial U(X^{(t)})}{\partial x_u}. \quad (4.1)$$

为了计算出点 $X^{(t)}$ 的诸下降变元, 只需计算出诸值 $\frac{\partial U(X^{(t)})}{\partial x_v}$, $v=1, 2, \dots, m$ 即可, 例如, 若 $X^{(t)} = (0, 1, 0, 1)$,

$$\frac{\partial U(X^{(t)})}{\partial x_1} = 1, \frac{\partial U(X^{(t)})}{\partial x_2} = 1, \frac{\partial U(X^{(t)})}{\partial x_3} = -1, \frac{\partial U(X^{(t)})}{\partial x_4} = -1,$$

则可知 x_1 为上升变元, x_2 为下降变元, x_3 为下降变元, x_4 为上升变元.

由于 $\partial U / \partial x_v$ 对于 x_u 的线性性, 类似 (4.1) 式的导出, 可得计算诸 $\partial U / \partial x_v$ 的递推公式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial U(X^{(t+1)})}{\partial x_v} = \frac{\partial U(X^{(t)})}{\partial x_v} + (1 - 2x_u^{(t)}) \cdot \sum_{i=1}^l \frac{\partial^2 U_i(X^{(t)})}{\partial x_u \partial x_v}, \\ \frac{\partial U(X^{(t+1)})}{\partial x_u} = \frac{\partial U(X^{(t)})}{\partial x_u}, \end{cases} \quad (4.2)$$

其中 $v \in \{1, 2, \dots, m\} - \{u\}$.

递推 (4.2) 式使我们在计算点 X 上的总势能函数 U 的诸一阶偏导数时可节约大量时间, 因为在新情况下的计算中充分地利用了老情况下已有的讯息. 而新老情况的差异是很小的, 这体现在 (4.2) 式中的项 $\frac{\partial^2 U_i(X^{(t)})}{\partial x_u \partial x_v}$ 对于很多的 (i, u, v) 皆为零. 至于总势能函数 U , 在有了偏导数值后, 利用 (4.1) 式来计算则更是简单.

对于当今国际学术界公认为最困难的 SAT 问题之一的随机 3-SAT 问题, 即 (2.7) 式中的 $l = 4.25 \sim 4.3m$, $k_i + k_{ri} = 3$, 且这 3 个变元由 $(P_1, P_2, \dots, P_m)$ 中随机选取, 然后对每个变元随机地取非或不取非的情形, 我们可以分析一下在新点 $X^{(t+1)}$ 上求诸一阶偏导数的工作量.

由于 CNF 中总共有 $3l = 3 \times 4.3m$ 个文字出现, 所以变元 x_u 在 U 的表达式中出现的次数大约为 $3 \times 4.3m / m = 3 \times 4.3 \approx 13$ 次,

$$\underbrace{(x_u \dots) + (\dots x_u) + \dots + (\dots x_u)}_{\text{约 13 个括弧}},$$

于是, 在 U 的表达式中与 x_u 以乘积关系同时出现在某一个圆括弧中的变元 x_v (称作搭界变元) 大约少于 $2 \times 13 = 26$ 个. 即在每一个新时刻, 大约只有少于 26 个的一阶偏导数需要更新, 而其他的一阶偏导数则不变.

有趣的是, 26 是一个绝对常数, 与问题的规模即 CNF 的长度无关. 在此离散的空间 $\{0, 1\}^m$ 中, 点 $X^{(t+1)}$ 上的势能与下降变元集的这种快速计算, 显然地是得益于由 (2.9) 与 (2.8) 式定义的连续空间 $(-\infty, +\infty)^m$ 中具有和谐性质的连续函数 $U(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

5 Bart Selman 的“跳坑策略”及其拟人解释^[6, 2]

我们采用 Bart Selman 的策略作为“跳坑策略”, 设在 t 时刻, 计算处于 $\{0, 1\}^m$ 中的点 $X^{(t)}$, $U(X^{(t)}) = \sum_{i=1}^l U_i(X^{(t)}) > 0$, 按 (2.9) 式, 显然对每个 i 有 $U_i(X^{(t)}) = 0$ 或 $U_i(X^{(t)}) = 1$. Selman 的策略是随机地选取一个使 $U_i(X^{(t)}) = 1$ 的函数 U_i , 再在此 U_i 的表达式中随机地选取一个变元, 将其 0/1 值翻转. 这样, U_i 的值由 1 变成 0, 点 $X^{(t)}$ 变成点 $X^{(t+1)}$.

可从拟人的角度对 Selman 的策略作如下体味. 函数 $U(X^{(t)})$ 的值是整个社会对点 $X^{(t)}$ 的不满意的总程度的度量. 整个社会由 l 个集团 $U_i (i = 1, 2, \dots, l)$ 组成, 每个集团对点 $X^{(t)}$ 的不满意的程度为相应的函数值 $U_i(X^{(t)})$, 它要么为 0 要么为 1. Selman 策略的意味是当局实施如下动作: 在整个社会中随便选取一个不满意的集团, 然后针对此集团修改一项与它有关的政策, 使它由不满意到满意.

当局的这种动作与在诸物体的 packing 问题的求解过程中让因受挤压感到最痛苦的物体从当前的位置跳走至一个随机地确定的新位置的做法, 其精神完全是一致的^[2].

6 对新路策略的贯彻

我们描述下降变元队列与变元禁集的演化规则以及有关的赦免策略.

下降变元队列的演化规则如下:

(1) 在初始时刻, 即在初始指派 $X^{(0)}$ 之下, 将全部下降变元按变元序号排列, 小序号变元在先大序号变元在后;

(2) 每翻转一个变元 x_u 后, 点 $X^{(t)}$ 变成了 $X^{(t+1)}$, 若 x_u 原来不是点 $X^{(t)}$ 的下降变元, 翻转后 x_u 成为了点 $X^{(t+1)}$ 的下降变元, 则将变元 x_u 加入到 t 时刻的下降变元队列之尾;

(3) 每翻转一个变元 x_u 后, 点 $X^{(t)}$ 变成了 $X^{(t+1)}$, 若另有变元 $x_v, v \neq u, x_v$ 原来不是 $X^{(t)}$ 的下降变元, 翻转后 x_v 成为了 $X^{(t+1)}$ 的下降变元, 则将变元 x_v 加入到 t 时刻的下降变元队列之首;

(4) 每翻转一个变元 x_u 后, 点 $X^{(t)}$ 变成了 $X^{(t+1)}$, 将点 $X^{(t)}$ 的下降变元队列中不再是点 $X^{(t+1)}$ 的下降变元的变元删去.

规则 (2) 是为了防止计算走回头路, 将引起走回头路的下降变元 x_u 的翻转优先级别定得最低. 规则 (3) 针对的情况是, 在 x_u 翻转的前后 $\partial u / \partial x_v$ 异号, 这就表明在新时刻的新地方

$X^{(t+1)}$, 令 x_v 的 01 值改变的方向是一个很新的方向, 这种改变降低了函数 U 的值却不是走老路. 因此, 对这种变元 x_v 的翻转优先级别应定得高.

变元禁集的演化规则如下: (i) 每翻转一个变元 x_u 后, 点 $X^{(t)}$ 变成了 $X^{(t+1)}$. 若此种翻转是按下降步骤操作的, 则置变元禁集为空;

(ii) 每翻转一个变元 x_u 后, 点 $X^{(t)}$ 变成了 $X^{(t+1)}$. 若此种翻转是按“跳坑策略”操作的 (即逃出), 则将变元 x_u 加入到老的变元禁集中去;

(iii) 每翻转一个变元 x_u 后, 点 $X^{(t)}$ 变成了 $X^{(t+1)}$. 若此种翻转是按“跳坑策略”操作的 (即逃出), 则对于老禁集中的诸变元 x_v , $v \neq u$, 作如下处理: 若 x_v 属于原下降变元集但不属于新下降变元集或者 x_v 不属于原下降变元集但属于新下降变元集, 则将变元 x_v 从老变元禁集中删去.

规则(i)运用的情形是计算点 $X^{(t)}$ 处于老的局部极小点的陷阱之外. 这时当然无需在 $X^{(t+1)}$ 点处对 U 的下降计算进行限制.

规则(ii)的意味与下降变元队列演化规则(2)是一致的. 即将 x_u 放入禁集的含义是防止计算走回头路, 禁止下一时刻再翻转变元 x_u , 将其值又变回去.

规则(iii)是开禁的规则. 即对于禁集中的变元 x_v , 它是在过去某个历史时刻被禁锢进来的, 到了实质性的情况发生了变化的新时刻就不应再禁锢它了. 这个实质性的情况就是“ x_v 是否属于当时的下降变元集”.

对于下降变元队列与变元禁集的演化规则, 我们有如下定理.

定理 在任一时刻, 所有不在禁集中的下降变元都连续地排在下降队列的前段.

证 在初始时刻禁集为空, 定理成立. 在将基于下降变元队列的演化规则与禁集演化规则所作的各类动作进行清晰的分类之后可知本定理所示的性质在这些动作的前后具有继承性. 例如, 由列队规则(2)和禁集演化规则(ii), 禁集中的下降变元总是加在下降变元队列之尾; 由列队规则(3)和禁集演化规则(iii), 不在禁集中的下降变元总是加在下降变元队列之首.

按此定理, 在下降步骤, 所需翻转的变元明确地就是下降变元队列之首, 不需再去寻找.

7 实验结果, 算例与评论

我们用随机 3-SAT 问题的样例对 Solar 进行了实验测试. 为便于与竞赛前已公开发表的最好算法 GSAT + w^[6] 相比较, 我们取 $l/m = 4.25$. 实验数据如表 1 所示, 所使用的计算机为 sunsparc2. 其中平均计算时间为对于算出为可满足的诸样例的平均计算时间. 从表中可以看出:

表 1

变元数 m	子句数 l	平均计算时间/s	总样例数	报告已满足的样例数	尚未满足的样例数
500	2 125	21	50	42	8
1 000	4 250	91	20	16	4
2 000	8 500	766	10	7	3

(1) 在 $l/m = 4.25$ 处算出为可满足的样例数占总样例数的比例明显高于 0.5. 这说明

Solar 的稳定性远优于 GSAT + w, 因为对于 GSAT + w 而言, 这个比例大致等于 0.5. 这也附带地说明, 比值 l/m 的转变点, 客观上应高于 4.25.

(2) 即使在解出更多的可满足的样例的基础上(亦即在样例总难度提高了的基础上)来统计计算时间, Solar 的平均计算时间仍然明显少于 GSAT + w. 这说明 Solar 的速度远高于 GSAT + w.

根据本文的分析与最后的实验结果, 作者可以预料, 对于今后国际学术界更现实有用的高维情形(如高于 10^5 维)而言, m 维 Euclid 空间 R^m 中的连续物理模型会发挥出更明显的作用. 研制出统一的, 对当代计算机科学与技术的各部门真实有用的 SAT 软件已经为时不远.

致谢 对李未教授在工作过程中所给予我们的指教关心与帮助, 美国 Oregon 大学的 Crawford 教授的热忱鼓励, 致以深切的感谢. 谨以此文纪念周培源与王浩先生.

参 考 文 献

- 1 黄文奇, 詹叔浩. 求解 Packing 问题的拟物方法. 应用数学学报, 1979, (2): 176~180
- 2 黄文奇. 处理 NP 难度问题的拟物和拟人方法. 国际离散数学与算法研讨会文集. 广州: 暨南大学出版社, 1994
- 3 Rogers C A. Packing and Covering. Cambridge: Cambridge University Press, 1964
- 4 黄文奇. 求解 covering 问题的拟物方法——NP 难度问题的一个处理途径. 计算机学报, 1989, (8): 610~616
- 5 李 未, 黄文奇. 一种求解合取范式可满足性问题的数学物理方法. 中国科学, A 辑, 1994, 25(11): 1 208~1 217
- 6 Selman B, Kautz H A, Cohen B. Noise strategies for improving local search. Proc AAAI-94, 337~343
- 7 Gu J. Efficient local search for very large-scale satisfiability problems. Sigart Bulletin, 1992, 3(1): 8~12