关于 3- 点临界图的一个猜想的证明

刘慧清^{①*}, 陆玫^②, 章舜哲^①

① 湖北大学数学与计算机科学学院, 武汉 430062;

② 清华大学数学科学系, 北京 100084

E-mail: hql_2008@163.com, mlu@math.tsinghua.edu.cn, happy2008zsz@163.com

收稿日期: 2012-04-24; 接受日期: 2013-02-01; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10990011 和 11171097) 资助项目

摘要 设 $\gamma(G)$ 是图 G 的点控制数. 如果对任意的 $v \in V(G)$, 都有 $\gamma(G-v) < \gamma(G)$ 成立, 那么称 G 为 γ - 点临界图. 本文主要给出 Ananchuen 和 Plummer 提出的一个猜想的证明, 得到了如下的结果: 若 G 是无 $K_{1,7}$ 的 3- 点临界图, 且阶数为不小于 18 的偶数, 则除几类特殊图外, G 均有完美匹配.

关键词 点控制数 3- 点临界图 完美匹配

MSC (2010) 主题分类 05C69, 05C70

1 引言

本文所考虑的图都是简单图. 没有定义的术语和记号参见文献 [1]. 设图 $G = (V(G), E(G))$ 是一个简单图且 $v \in V(G)$, 记 $N_G(v)$ 为点 v 在 G 中的所有邻点的集合, $d_G(v) = |N_G(v)|$. 图 G 的点数称为 G 的阶数, 若 G 的阶数是偶 (奇) 数, 则称 G 是偶 (奇) 阶图. 对任意的 $S \subseteq V(G)$, $N_G(S)$ 定义为 S 在 G 中的所有邻点的集合, $G[S]$ 为 G 的由 S 导出的子图. 令 $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ 和 $G-S = G[V \setminus S]$. 对 G 的子图 H , 设 $N_H(S) = N(S) \cap V(H)$. 特别地, 当 $S = \{v\}$ 时, 记 $N_H(v) = N_H(\{v\})$ 和 $d_H(v) = |N_H(v)|$. 图 G 的连通分支的个数和奇分支的个数分别记为 $c(G)$ 和 $c_o(G)$. 如果 G 的两个点子集 S 和 T , 满足 $T \subseteq N[S]$, 那么我们称 S 控制 T , 或者称 T 被 S 控制, 且记为 $S \mapsto T$. 如果 $S \mapsto V(G)$, 那么 S 称为 G 的一个点控制集. 图 G 中所有点控制集的最小基数称为 G 的点控制数, 记为 $\gamma(G)$. 两个不交的图 G 和 H 的联图 $G \vee H$, 是指在 $G+H$ 中, 把 G 中的每个顶点与 H 中的每个顶点都连接起来所得到的图. 一个 n - 团是指一个 n 阶完全图 K_n . 若 n 为偶数, 则记 K'_n 是指删去 K_n 的一个完美匹配后得到的图. 如果 G 中不存在与 $K_{1,r}$ 同构的导出子图, 那么称 G 是无 $K_{1,r}$ 的. G 的一个 F - 子图是指 G 的一个与 F 同构的子图.

如果对任意的 $v \in V(G)$, 都有 $\gamma(G-v) < \gamma(G)$ 成立 (显然, $\gamma(G-v) = \gamma(G) - 1$), 那么 G 称为 γ - 点临界图. 然而即使在 $\gamma = 3$ 的情况下, 这样的图的结构性质仍然是不清楚的 (参见文献 [2-11]). Ananchuen 和 Plummer [2] 提出了下面的一个猜想.

猜想 A [2] 如果图 G 是一个无 $K_{1,7}$ 的 3- 点临界偶阶图, 那么 G 有完美匹配.

与此问题相关的有如下的一些定理.

定理 1.1 [3] 图 G 是 2- 点临界当且仅当 $G \cong K'_{2n}$.

定理 1.2 ^[4] 设 G 是 3- 点临界图.

- (i) 如果 G 不连通, 那么 $G = 3K_1$, 或者 G 是一个 2- 点临界图和一个孤立点的不相交的并;
- (ii) 如果 G 有一个割点 u , 那么 $c(G - u) = 2$;
- (iii) 如果 G 有一个 2 点割 S , 那么 $c(G - u) \leq 3$.

定理 1.3 ^[2,4] 设 G 是 3- 点临界连通图.

- (i) 如果 G 是无 $K_{1,5}$ 的偶阶图, 那么 G 有完美匹配;
- (ii) 如果 G 是无 $K_{1,5}$ 的奇阶图, 且阶数不小于 11, 那么 G 有几乎完美匹配.

定理 1.4 ^[5] 设 G 是 n 阶连通的 3- 点临界图.

- (i) 如果 G 是无 $K_{1,6}$ 的偶阶图 ($n \neq 12$), 那么 G 有完美匹配;
- (ii) 如果 G 是无 $K_{1,7}$ 的奇阶图 ($n \neq 13$), 那么 G 有几乎完美匹配或者 G 是某些特殊图.

如图 1 所示, 图 Q_1 和 Q_2 都是 n 阶图, 其中 $Q_1 - S_1$ 的一个分支 $C_1 = K_1 \vee K'_{n-10}$, 另外 5 个分支是孤立点 (这里 $S_1 = \{v_1, \dots, v_4\}$, $V(K_1) = \{v'_1\}$), $v_1 \mapsto K'_{n-10}$, $v_j \mapsto C_1$, $j = 3, 4$; $Q_2 - S_2$ 的一个分支 $C_1 = K_1 \vee K'_{n-12}$, 另外 6 个分支是孤立点 (这里 $S_2 = \{v_1, \dots, v_5\}$, $V(K_1) = \{v'_1\}$), $v_1 \mapsto K'_{n-12}$ 且 $v_j \mapsto C_1$, $j = 3, 4, 5$.

若 n 是偶数, 则图 Q_1 和 Q_2 均是无 $K_{1,7}$ 的且没有完美匹配的. 事实上, 注意到 $c_o(G - S_j) > |S_j|$, 因此由 Tutte 定理可知, 图 Q_j ($j = 1, 2$) 没有完美匹配.

本文中, 我们证明了下面的定理. 此定理表明除了某些特殊的图以外, 猜想 A 成立.

定理 B 如果 G 是一个无 $K_{1,7}$ 的 3- 点临界偶阶图, 且阶数 $n \geq 18$, 那么 G 有完美匹配, 或者 G 有 Q_i - 子图 ($i = 1, 2$).

注 C 对于点数不大于 16 的无 $K_{1,7}$ 的 3- 点临界偶阶图, 在某些情形下, 我们能够找到不满足定理 B 的结论的特殊图类, 但是要找出所有情形下的例外图还是很困难的 (即使 G 是无 $K_{1,6}$ 的, 参见文献 [5]). 然而, 我们仍然相信通过努力, 可以找出所有点数不大于 16 的没有完美匹配的图.

2 相关的引理

设 G 是一个图. Tutte 给出了关于图的完美匹配的经典结果: 如果图 G 没有完美匹配, 那么 G 中存在一个点子集 S , 满足 $c_o(G - S) > |S|$. 我们把 G 的满足 $c_o(G - S) > |S|$ 的集合 S 称为 G 的 Tutte 集 (或者称为反因子集, 参见文献 [6]). 对任意的 $v \in V(G)$, $G - v$ 的一个最小的点控制集记为 D_v . 如果存在 $u \in V(G)$ 满足 $D_u = \{a, b\}$, 那么称 $\{a, b\}$ 是可由 D_u 实现的.

下面, 我们总是假设图 G 是无 $K_{1,7}$ 的 3- 点临界偶阶图. 设 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_{|S|}\}$ 是 G 的极小 Tutte 集. 记 $\bar{S} = V(G) \setminus S$. 设 $C_1, \dots, C_l$ 是 $G - S$ 的所有连通分支, 且 $c_o(G - S) = t$, 则 $l \geq t \geq |S| + 2$. 对任意的 $v_p \in S$, 令 $\mathcal{C}_{v_p} = \{C_i : N_{C_i}(v_p) \neq \emptyset, 1 \leq i \leq l\}$. 若 $D_w \cap S = \{v_p\}$, 则记

图 1 (a) 图 Q_1 ; (b) 图 Q_2

$D_w^S = v_p$. 假设存在 $w \in V(G)$ 使得 $D_w^S = v_p$, 则定义 $B_{v_p} = \{C_i : V(C_i) \setminus N(v_p) \neq \emptyset, 1 \leq i \leq l\}$. 令 $J = \{j : |V(C_j)| \geq 2, 1 \leq j \leq l\}$.

引理 2.1 ^[2] (i) 对任意的 $v \in V(G)$, 均有 $|D_v| = 2$;

(ii) 如果 $D_v = \{x, y\}$, 那么 $xv, yv \notin E(G)$;

(iii) 对 G 中任意两个不同的点 v 和 w , 均有 $D_v \neq D_w$.

引理 2.2 ^[7] 对任意的 $1 \leq p \leq |S|$, 均有 $|\mathcal{C}_{v_p}| \geq 3$.

引理 2.3 ^[8] (i) 如果 $l \geq 4$, 那么 $D_u \cap S \neq \emptyset$, 且对任意的 $u \in V(G)$, 均有 $|N_S(u)| \leq |S| - 1$;

(ii) 如果任意的 $v \in S$ 均满足 $D_v \subseteq S$, 那么对任意的 $u \in \bar{S}$, $|N_S(u)| \geq 2$, 且 $|N_S(v)| \neq 1$, 即若 $N_S(v) \neq \emptyset$, 则 $2 \leq |N_S(v)| \leq |S| - 3$.

引理 2.4 设 $u_i \in V(C_i)$ 且 $D_{u_i}^S = v_p$.

(i) 如果存在两个不同的顶点 $u' \in V(C_j) \setminus \{u_i\}$ 和 $u'' \in V(C_q) \setminus \{u_i\}$ 使得 $v_p u', v_p u'' \notin E(G)$, 那么 $j = q$. 特别地, $|B_{v_p}| \leq 2$.

(ii) 如果存在 $u_j \in V(C_j)$ ($i \neq j$) 使得 $D_{u_j}^S = v_p$, 那么 $v_p \mapsto \bar{S} \setminus \{u_i, u_j\}$.

证明 (i) 假若 $j \neq q$, 则由 $v_p u', v_p u'' \notin E(G)$, 可知, $D_{u_i} \setminus S \subseteq V(C_j)$ 或者 $D_{u_i} \setminus S \subseteq V(C_q)$. 因此 u'' 或者 u' 不能被 D_{u_i} 控制, 此为矛盾. 故 $j = q$. 若 $j \neq i$, 则 $D_{u_i} \setminus S \subseteq V(C_j)$, 因此有 $v_p \mapsto C_r$, $1 \leq r \leq l$, $r \neq i, j$. 于是 $|B_{v_p}| \leq 2$.

(ii) 因为 $v_p u_i, v_p u_j \notin E(G)$, 故由引理 2.1 可知, $D_{u_i}^S = D_{u_j}^S = v_p$. 因此 $D_{u_i} \setminus S \subseteq V(C_j)$ 且 $v_p \mapsto \bar{S} \setminus (V(C_j) \cup \{u_i\})$. 类似地, $v_p \mapsto \bar{S} \setminus (V(C_i) \cup \{u_j\})$. 从而 $v_p \mapsto \bar{S} \setminus \{u_i, u_j\}$. $\square$

引理 2.5 如果 $l \geq 8$, 那么对任意的 $u \in S \cup (\bigcup_{j \in J} V(C_j))$, 均有 $D_v \subseteq S$. 而且, 如果 $l \geq 9$, 那么对每个 $v \in V(G)$, 均有 $D_v \subseteq S$.

证明 如果 $l \geq 4$ 且存在 $u \in V(G)$ 满足 $D_u \not\subseteq S$, 那么, 由引理 2.3 可知, $|D_u \cap S| = 1$. 故 $D_u \not\subseteq S$. 令 $u \in S \cup (\bigcup_{j \in J} V(C_j))$, 则 $G - (S \cup \{u\})$ 至少有 l 个分支. 因此, 如果 $l \geq 8$, 那么 D_u^S 控制 $G - (S \cup \{u\})$ 中至少 $l - 1 \geq 7$ 个分支, 与 G 是无 $K_{1,7}$ 矛盾. 而且, 若 $l \geq 9$, 则对任意的 $w \in V(G)$, $G - (S \cup \{w\})$ 至少有 $l - 1$ 个分支, 因而 D_w^S 控制 $G - (S \cup \{w\})$ 中至少 $l - 2 \geq 7$ 个分支, 与 G 是无 $K_{1,7}$ 矛盾. $\square$

引理 2.6 设 C_i 是 $G - S$ 的奇分支且 $|V(C_i)| \geq 3$. 如果对任意的 $w \in V(C_i)$, 均有 $D_w \not\subseteq S$, 那么存在 $u, v \in V(C_i)$ ($u \neq v$), 使得 $D_u^S \neq D_v^S$.

证明 假若对任意的 $w \in V(C_i)$, $D_w^S = v_q$, 则 $D_w \setminus S \subseteq V(C_i)$. 因此 $N_{C_i}(v_q) = \emptyset$. 进而, 由引理 2.1 可知, $\gamma(G[C_i]) > 1$ 且 $\gamma(G[C_i \setminus \{w\}]) = 1$. 从而 $G[C_i]$ 是一个 2- 点临界图. 由定理 1.1, $G[C_i]$ 是偶阶图, 这与 C_i 是奇分支矛盾. $\square$

引理 2.7 假设 $l \geq 5$ 且 $D_{v_1} = \{v_2, v'_1\}$, 其中 $v'_1 \in V(C_1)$. 令 $u_j \in V(C_j)$, $2 \leq j \leq l$. 记 $S' = \{v_i \in S \setminus \{v_2\} : D_{u_j}^S = v_i, 2 \leq j \leq l\}$, 则 $S' \neq \emptyset$. 而且, 如果 $N_{C_1}(v_2) = \emptyset$, 那么对任意的 $u \in \bar{S} \setminus \{v'_1\}$, 均有 $D_u^S \neq v_1$.

证明 因为 $l \geq 5$, 所以由引理 2.3(i), 对任意的 $u \in V(G)$ 都有 $D_u \cap S \neq \emptyset$. 注意到 $v_1 v'_1, v_1 v_2 \notin E(G)$ 且 $v_2 \mapsto C_j$, $2 \leq j \leq l$. 由 G 是无 $K_{1,7}$ 的可知, $|S| + 2 \leq l \leq 7$. 由引理 2.1, $v_2 \notin D_{u_j}$ 且 $|D_{u_j} \cap S| = 2$ ($2 \leq j \leq l$). 于是 $\binom{|S|-1}{2} \geq l - 1 \geq |S| + 1$, 即 $|S| \geq 5$. 因此 $l = 7$, $|S| = 5$ 且 $N_{C_1}(v_2) = \emptyset$. 另一方面, 由于 $S \setminus \{v_2\}$ 中每一对均能由 D_{u_j} 实现 ($2 \leq j \leq 7$), 故 $D_{v_2} \not\subseteq S$. 不妨假设存在 $w \in V(C_1)$, 满足 $D_{v_2} = \{v_p, w\}$ ($p \neq 2$), 且 $D_{u_2} = \{v_p, v_q\}$, $q \neq p, 2$. 则由引理 2.1 可知, $u_2 v_p \notin E(G)$. 从而 u_2 不能被 D_{v_2} 控制, 此为矛盾. 故 $S' \neq \emptyset$.

假设 $N_{C_1}(v_2) = \emptyset$, 且存在 $u \in \bar{S} \setminus \{v'_1\}$ 使得 $D_u^S = v_1$, 则由 $v_1 v'_1 \notin E(G)$ 可得, $D_u \setminus S \subseteq V(C_1)$ 且 $v'_1 \in V(C_1)$. 注意到 $v_1 v_2 \notin E(G)$ 且 $N_{C_1}(v_2) = \emptyset$. 故 v_2 不能被 D_u 控制, 此为矛盾. $\square$

3 定理 B 的证明

设图 G 是一个无 $K_{1,7}$ 的 3- 点临界偶阶图, 其阶数 $n \geq 18$. 假设定理 B 的结论不成立, 即图 G 不包含 Q_i - 子图 ($i = 1, 2$) 且没有完美匹配. 设 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 是极小 Tutte 集, $G - S$ 的连通分支记为 $C_1, C_2, \dots, C_l$ 且 $c_o(G - S) = t$. 由定理 1.2 可知, $k \geq 3$. 于是 $l \geq t \geq k + 2 \geq 5$. 由引理 2.3(i) 可知, 对任意的 $v \in V(G)$, 均有 $D_v \cap S \neq \emptyset$. 令 $u_j \in V(C_j)$, $1 \leq j \leq l$.

命题 3.1 $|S| = k \neq 3$.

证明 假设 $|S| = 3$. 若存在某个 $i \in \{1, 2, 3\}$, 不妨设 $i = 1$, 使得 $D_{v_1} = \{v_2, v'_1\}$ ($v'_1 \in V(C_1)$), 则 $v_1 v'_1 \notin E(G)$ 且 $v_2 \mapsto C_i$, $2 \leq i \leq l$. 由引理 2.2, 我们不妨假设 $C_2, C_3 \in \mathcal{C}_{v_3}$, $v_3 u_2, v_3 u_3 \in E(G)$. 于是由引理 2.1 可知, $D_{u_2}^S = D_{u_3}^S = v_1$. 注意到 $v_1 v'_1 \notin E(G)$. 因此 $|B_{v_1}| \geq 3$ ($C_1, C_2, C_3 \in B_{v_1}$), 与引理 2.4(i) 矛盾. 于是对任意的 $1 \leq i \leq 3$, 均有 $D_{v_i} \subseteq S$. 进而由引理 2.3 和 2.1 可知, $|N_S(u)| = 2$, 且对于任意的 $u \in \bar{S}$ 均有 $|D_u \cap S| = 1$.

因为 $n \geq 18$, 所以 $|\bar{S}| \geq 15 = 5|S|$. 于是存在 $w_i \in \bar{S}$ 使得所有的 $D_{w_i}^S$ ($1 \leq i \leq 5$) 相等. 不妨设 $D_{w_i}^S = v_1$. 由引理 2.4(i), 我们不妨假设 $w_i \in V(C_1)$, $1 \leq i \leq 5$ 且 $v_1 \mapsto C_j$, $2 \leq j \leq l$. 如果 C_1 是奇分支, 故由引理 2.6 可知, 存在 $w \in V(C_1) \setminus \{w_i : 1 \leq i \leq 5\}$ 使得 $D_w^S \neq v_1$, 不妨设 $D_w^S = v_2$. 注意到 $\bigcup_{i=2}^l D_{u_i}^S \subseteq \{v_2, v_3\}$. 于是由引理 2.4(i), 至多存在一个点 u_r ($2 \leq r \leq l$) 使得 $D_{u_r}^S = v_2$. 因此对于所有的 $2 \leq j \neq r \leq l$, 都有 $D_{u_j}^S = v_3$, 即 $|B_{v_3}| \geq 3$, 与引理 2.4(i) 矛盾. 故 C_1 是偶分支. 从而 $l \geq 6$. 注意到 $v_1 \mapsto C_i$, $2 \leq i \leq l$ 且 $\bigcup_{i=2}^l D_{u_i}^S \subseteq \{v_2, v_3\}$. 因此, $|B_{v_2}| \geq 3$ 或者 $|B_{v_3}| \geq 3$, 与引理 2.4(i) 矛盾. $\square$

命题 3.2 $|S| \neq 4$.

证明 假设 $|S| = 4$, 则 $l \geq t \geq 6$. 假若对任意的 $1 \leq i \leq 4$, 都有 $D_{v_i} \subseteq S$, 则不失一般性, 我们可令 $D_{v_1} = \{v_2, v_3\}$. 则 $v_3 v_4 \in E(G)$ (或者 $v_2 v_4 \in E(G)$). 因此, $D_{v_3} = D_{v_4} = \{v_1, v_2\}$ (或者 $D_{v_2} = D_{v_4} = \{v_1, v_3\}$), 与引理 2.1 矛盾. 故存在某个 $1 \leq i \leq 4$ 满足 $D_{v_i} \not\subseteq S$, 不妨设 $D_{v_1} = \{v_2, v'_1\}$, 其中 $v'_1 \in V(C_1)$. 则 $v_1 v'_1, v_1 v_2 \notin E(G)$ 且 $v_2 \mapsto C_j$, $2 \leq j \leq l$. 于是由引理 2.1 可知, $\bigcup_{j=2}^l (D_{u_j} \cap S) \subseteq \{v_1, v_3, v_4\}$. 因 G 是无 $K_{1,7}$ 的, $l \leq 7$.

若 $l = 7$, 则 $N_{C_1}(v_2) = \emptyset$. 由引理 2.7, $S' = \{v_i \in S \setminus \{v_2\} : D_{u_j}^S = v_i, 2 \leq j \leq 7\} \neq \emptyset$, 且若 $|D_{u_j} \cap S| = 1$ ($2 \leq j \leq 7$), 则 $D_{u_j}^S \neq v_1$. 不失一般性, 我们假设 $v_3 \in S'$, $D_{u_7}^S = v_3$ 且 $v_3 \mapsto C_j$, $2 \leq j \leq 5$. 故由引理 2.1 可知, $\bigcup_{j=2}^5 (D_{u_j} \cap S) \subseteq \{v_1, v_4\}$. 注意到 $D_{u_j}^S \neq v_1$ ($2 \leq j \leq 5$), 因此 $v_4 \in S'$, 于是 $|B_{v_4}| \geq 4$, 与引理 2.4(i) 矛盾. 故 $l = t = 6$ 且 $v_2 \mapsto C_j$, $2 \leq j \leq 6$.

断言 1 存在 $2 \leq j \leq 6$, 使得 $D_{u_j}^S = v_1$.

证明 假设对所有的 $2 \leq j \leq 6$, 均有 $D_{u_j}^S \neq v_1$. 因为 $D_{u_j} \cap S \subseteq \{v_1, v_3, v_4\}$ ($2 \leq j \leq 6$), 所以存在 u_p 使得 $|D_{u_p} \cap \{v_1, v_3, v_4\}| = 1$. 不失一般性, 令 $D_{u_6} \cap \{v_1, v_3, v_4\} = \{v_3\}$, 且 $D_{u_6} \setminus \{v_3\} \subseteq V(C_1) \cup V(C_5)$, 则 $v_3 \mapsto C_i$ ($2 \leq i \leq 4$). 由引理 2.1 可知, $\bigcup_{j=2}^4 (D_{u_j} \cap S) \subseteq \{v_1, v_4\}$. 又因为所有的 $2 \leq j \leq 6$ 均有 $D_{u_j}^S \neq v_1$, 所以 $v_4 \in S'$, 且 $|B_{v_4}| \geq 3$, 与引理 2.4(i) 矛盾. $\square$

由断言 1, 不妨令 $D_{u_6}^S = v_1$. 则由 $v_1 v'_1 \notin E(G)$ 可知, $D_{u_6} \setminus \{v_1\} \subseteq V(C_1)$. 因此, $v_1 \mapsto C_i$, $2 \leq i \leq 5$ 且 $v_1 \mapsto C_6 \setminus \{u_6\}$. 又由引理 2.1, $\bigcup_{i=2}^5 (D_{u_i} \cap S) \subseteq \{v_3, v_4\}$. 假设存在 $2 \leq i \leq 5$ 满足 $D_{u_i} = \{v_3, v_4\}$, 不妨设 $D_{u_2} = \{v_3, v_4\}$, 则 $|D_{u_i} \cap S| = 1$ ($3 \leq i \leq 5$), 不失一般性, 令 $D_{u_3}^S = v_3$, 于是 $v_3 \mapsto C_4 \cup C_5$. 进而由引理 2.1 和 2.3(i) 可知, $D_{u_4}^S = D_{u_5}^S = v_4$, 即 $C_2, C_4, C_5 \in B_{v_4}$, 与引理 2.4(i) 矛盾. 故对任意的

$2 \leq i \leq 5$ 均有 $D_{u_i} \neq \{v_3, v_4\}$. 由引理 2.4, 我们可假设

$$D_{u_2}^S = D_{u_3}^S = v_3, \quad D_{u_4}^S = D_{u_5}^S = v_4, \quad v_3 \mapsto \bar{S} \setminus \{u_2, u_3\} \quad \text{且} \quad v_4 \mapsto \bar{S} \setminus \{u_4, u_5\}. \quad (1)$$

断言 2 对于所有的 $2 \leq j \leq 6$, 都有 $|C_j| = 1$.

证明 假设存在 $2 \leq j \leq 6$ 使得 $|C_j| > 1$, 不妨设 $|C_2| > 1$ 且 $u' \in V(C_2) \setminus \{u_2\}$. 于是对于所有的 $1 \leq i \leq 4$, 均有 $u'v_i \in E(G)$. 从而由引理 2.1 可知, $D_{u'} \cap S = \emptyset$, 此为矛盾. $\square$

因为 $n \geq 18$, 故由断言 2 可知, $|V(C_1)| \geq 9$.

断言 3 $v_1 \mapsto C_1 \setminus \{v'_1\}$, $v'_1 \mapsto C_1$, $D_u^S = v_2$, 且对任意的 $u \in V(C_1) \setminus \{v'_1\}$, 均有 $D_u \setminus S \subseteq V(C_1) \setminus \{v'_1\}$.

证明 注意到 $\bigcup_{u \in V(C_1)} (D_u \cap S) \subseteq \{v_1, v_2\}$ 和 $D_{u_6}^S = v_1$. 若 $v'_1 v_2 \in E(G)$, 则由引理 2.1 可知, $D_{v'_1} = \{v_1, u_6\}$. 因此由引理 2.4(ii), $v_1 \mapsto \bar{S} \setminus \{v'_1, u_6\}$, 即 $v_1 \mapsto C_1 \setminus \{v'_1\}$. 故由引理 2.1 可知, 断言 3 成立. 若 $v'_1 v_2 \notin E(G)$, 则由 $v'_1 v_1, v'_1 v_2 \notin E(G)$ 可知, $\{v_1, v_2\}$ 不能由任何的 D_w 实现, 这里 $w \in V(C_1) \setminus \{v'_1\}$. 若存在 $u \in V(C_1) \setminus \{v'_1\}$ 满足 $D_u^S = v_1$, 则由引理 2.4(ii) 可知, $v_1 \mapsto \bar{S} \setminus \{u, u_6\}$, 与 $v_1 v'_1 \notin E(G)$ 矛盾. 因此, $D_u^S = v_2$, 且对任意的 $u \in V(C_1) \setminus \{v'_1\}$, 均有 $D_u \setminus S \subseteq V(C_1) \setminus \{v'_1\}$. 进而, 由 $v_1 v_2 \notin E(G)$ 可知, $D_u \setminus S \mapsto v_1$, 即 $v_1 \mapsto C_1 \setminus \{v'_1\}$. 注意到 $D_{v_1} = \{v_2, v'_1\}$ ($v'_1 \in V(C_1)$), 且对任意的 $u \in V(C_1) \setminus \{v'_1\}$ 都有 $D_u^S = v_2$. 于是由引理 2.1, $v'_1 \mapsto C_1$. $\square$

由断言 3 可知, $G[C_1 \setminus \{v'_1\}]$ 是 2-点临界的, 故由定理 1.1, $G[C_1 \setminus \{v'_1\}] \cong K'_{n-10}$. 因此由 (1) 和断言 2 可知, G 包含 Q_1 -子图, 这与假设矛盾. $\square$

接下来, 我们令 $S^* = \{\{v_i, v_j\} : \{v_i, v_j\} \mapsto S, v_i, v_j \in S\}$. 注意到若 $S^* \neq \emptyset$, 设 $\{v_i, v_j\} \in S^*$, 则存在 $u \in \bar{S}$ 使得 $N(u) \cap \{v_i, v_j\} = \emptyset$. 记 $U = \{u \in \bar{S} : N(u) \cap \{v_i, v_j\} = \emptyset, \{v_i, v_j\} \in S^*\}$. 于是若 $S^* \neq \emptyset$, 则 $U \neq \emptyset$. 另一方面, 若存在 $u \in \bar{S}$ 满足 $D_u = \{v_i, v_j\} \subseteq S$, 则 $D_u \in S^*$ 且 $u \in U$.

给定一个点子集 $\{v_i, v_j\} \in S^*$, 可能存在两个或两个以上的点 $u \in \bar{S}$ 满足 $N(u) \cap \{v_i, v_j\} = \emptyset$. 但是我们只需要一个这样的点即可, 于是定义函数 $\phi : S^* \rightarrow U$, 其中 $N(\phi(\{v_i, v_j\})) \cap \{v_i, v_j\} = \emptyset$. 令 $U^* = \{\phi(\{v_i, v_j\}) : \{v_i, v_j\} \in S^*\}$, 则 $|S^*| \geq |U^*|$.

命题 3.3 $|S| \neq 5$.

证明 假设 $k = 5$, 于是 $l \geq t \geq 7$ 且 t 是奇数. 若 $l \geq 9$, 则由引理 2.5 可知, 对任意的 $v \in V(G)$, 都有 $D_v \subseteq S$, 故 $n \leq \binom{5}{2} = 10$, 与 $n \geq 18$ 矛盾. 故 $l \leq 8$. 我们先证明下面的断言.

断言 4 对任意的 $v_i \in S$, 均有 $D_{v_i} \subseteq S$.

证明 假设存在 $1 \leq i \leq 5$, 使得 $D_{v_i} \not\subseteq S$, 不妨设 $D_{v_1} = \{v_2, v'_1\}$, 其中 $v'_1 \in V(C_1)$. 于是由引理 2.5 和 2.1 可知, $l = t = 7$, $v_1 v_2, v_1 v'_1 \notin E(G)$, 且 $v_2 \mapsto C_i$, $2 \leq i \leq 7$. 又因 G 是无 $K_{1,7}$ 的, 所以 $N_{C_1}(v_2) = \emptyset$, $v'_1 \mapsto C_1$ 且每一个 C_i ($2 \leq i \leq 7$) 都是一个团. 由引理 2.7 可知, $S' \neq \emptyset$, 且当 $|D_u \cap S| = 1$ 时, $D_u^S \neq v_1$, 这里 $u \in \bar{S} \setminus \{v'_1\}$. 因此, 不妨假设 $v_3 \in S'$, 且 $D_{u_7}^S = v_3$. 于是我们有 $D_{u_7} \setminus S \not\subseteq V(C_1)$. 否则, $v_3 \mapsto C_i$ ($2 \leq i \leq 6$), 且由引理 2.1 可知, $\bigcup_{i=2}^6 (D_{u_i} \cap S) \subseteq \{v_1, v_4, v_5\}$. 注意到 $\{v_1, v_4, v_5\}$ 中至多存在 3 对点集能够由 D_{u_i} ($2 \leq i \leq 6$) 实现, 且当 $|D_{u_i} \cap S| = 1$ 时, $D_{u_i} \neq v_1$. 因此, 存在 $j \in \{4, 5\}$ 满足 $v_j \in S'$ 和 $|B_{v_j}| \geq 3$, 此为矛盾. 故我们假设 $D_{u_7} \setminus S \subseteq V(C_6)$ 和 $v_3 \mapsto C_i$, $1 \leq i \leq 5$. 于是 $\bigcup_{i=2}^5 (D_{u_i} \cap S) \subseteq \{v_1, v_4, v_5\}$, 这表明 $v_4 \in S'$ 或者 $v_5 \in S'$. 进而, $v_4, v_5 \in S'$. 否则, 假若 $v_4 \notin S'$, $v_5 \in S'$ 且 $D_{u_5}^S = v_5$. 于是由引理 2.4, 不妨假设 $v_5 \mapsto C_2, C_3$, 即 $u_2 v_5, u_3 v_5 \in E(G)$. 注意到当 $|D_{u_i} \cap S| = 1$ ($i = 2, 3$) 时, $D_{u_i} \neq v_1$. 因此, 由引理 2.1 可知, $D_{u_2} = D_{u_3} = \{v_1, v_4\}$, 此与引理 2.1 矛盾. 不失一般性, 我们假设 $D_{u_2}^S = v_5$, $\{v_5\} \subseteq (D_{u_3} \cap S) \subseteq \{v_1, v_5\}$, $D_{u_4}^S = v_4$ 且 $\{v_4\} \subseteq (D_{u_5} \cap S) \subseteq \{v_1, v_4\}$. 于是 $v_4 \mapsto C_i$ ($i = 1, 2, 3, 6, 7$), $v_5 \mapsto C_i$ ($i = 1, 4, 5, 6, 7$). 进而, $|C_j| = 1$, $2 \leq j \leq 7$. 否则, 设 $u' \in V(C_2) \setminus \{u_2\}$, 则由引理 2.1 及 $v_i \mapsto C_2$, $2 \leq i \leq 4$ 可知, $D_{u'} \cap S \subseteq \{v_1, v_5\}$. 因此由 $D_{u'}^S \neq v_1$ 可知, $v_5 \in D_{u'}$, 即 $v_5 u' \notin E(G)$.

注意到 $D_{u_2}^S = v_5$ 且 $v_5 u_3 \notin E(G)$. 于是 D_{u_2} 不能控制 u' 或者 u_3 , 此为矛盾. 故对所有的 $2 \leq j \leq 7$, $V(C_j) = \{u_j\}$, 从而由 $n \geq 18$ 可得, $|V(C_1)| \geq 7$.

另一方面, 注意到 $v_i \mapsto C_1, 3 \leq i \leq 5$, 因此 $\bigcup_{u \in V(C_1)} (D_u \cap S) \subseteq \{v_1, v_2\}$. 设 $u \in V(C_1) \setminus \{v'_1\}$. 于是由 $v'_1 \mapsto C_1$ 可知, $uv'_1 \in E(G)$. 又由 $v_1 v'_1, v_2 v'_1 \notin E(G)$ 可知, $D_u \neq \{v_1, v_2\}$. 从而由引理 2.7, $D_u^S = v_2$. 因为 $N_{C_1}(v_2) = \emptyset$, $D_u \setminus \{v_2\} \mapsto V(C_1)$. 又由 $v_1 v_2 \notin E(G)$ 可知, $D_u \setminus \{v_2\} \mapsto v_1$, 即 $v_1 \mapsto C_1 \setminus \{v'_1\}$. 由引理 2.1, $D_u \setminus \{v_2\} \neq \{v'_1\}$, 即 $D_u \setminus \{v_2\} \subseteq V(C_1) \setminus \{v'_1\}$. 于是 $G[C_1 \setminus \{v'_1\}]$ 是一个 2- 点临界图. 由定理 1.1, $G[C_1 \setminus \{v'_1\}] \cong K'_{n-12}$. 综上所述, G 包含 Q_2 - 子图, 与假设矛盾. $\square$

由断言 4, $G[S]$ 是一个 5 圈或者 $G[S]$ 包含一个 4 圈和一个孤立点. 我们考虑下面的两种情形.

情形 1 $G[S]$ 是一个 5 圈 $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_1$.

在此情形下, $S^* = \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_1\}, \{v_5, v_3\}\}$. 记 $\phi(\{v_i, v_{i+2}\}) = w_i \in U^*$, 则 $|B_{v_i}| \geq 1$ ($1 \leq i \leq 5$), 且对任意的 $u \in \bar{S} \setminus \{w_1, w_2, \dots, w_5\}$, 都有 $|D_u \cap S| = 1$. 注意到 $l \geq 7$. 不失一般性, 假设对所有的 $1 \leq i \leq 5$, $w_i \notin V(C_1) \cup V(C_2)$. 令 $D_{u_1}^S = v_1$ 和 $D_{u_2}^S = v_j$, 则 $j \neq 1$. 否则, $D_{u_1}^S = D_{u_2}^S = v_1$, 故由引理 2.4(ii) 可知, $v_1 \mapsto \bar{S} \setminus \{u_1, u_2\}$, 即 $v_1 \mapsto w_1$, 与 $\phi(\{v_1, v_3\}) = w_1 \in U^*$ 矛盾. 由对称性, 不妨令 $j = 2$ 或 $j = 3$. 则由引理 2.1 和 2.4(i) 可知, $w_1, w_2, \dots, w_5$ 位于 $G - S$ 的同一个分支中. 因此我们假设 $w_i \notin V(C_3) \cup V(C_4)$ ($1 \leq i \leq 5$). 则由引理 2.4 可知, $D_{u_i}^S \neq v_1, v_2$ ($i = 3, 4$). 令 $D_{u_3}^S = v_a$, $D_{u_4}^S = v_b$. 同上可知, $a \neq b, a, b \in \{2, 3, 4, 5\} \setminus \{j\}$, 且 $w_1, w_2, \dots, w_5$ 位于 $G - S$ 的同一个分支中. 因此, 不妨设 $\{w_1, w_2, \dots, w_5\} \subseteq V(C_l)$. 故由引理 2.4(i) 可知, 存在 $j \in \{5, 6, 7\}$ 使得 $D_{u_j} \cap S = \emptyset$, 此为矛盾.

情形 2 $G[S]$ 包含一个 4 圈 $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$ 和一个孤立点 v_5 .

在此情形下, $D_{v_1} = \{v_3, v_5\}$, $D_{v_2} = \{v_4, v_5\}$, $D_{v_3} = \{v_1, v_5\}$, $D_{v_4} = \{v_2, v_5\}$, 且由 $S^* = \emptyset$ 可知, 对任意的 $u \in \bar{S}$, 均有 $|D_u \cap S| = 1$. 由引理 2.5 和 $n \geq 18$ 可得, $l = t = 7$.

若 $|\mathcal{C}_{v_5}| \leq 4$, 不妨设 $C_5, C_6, C_7 \notin \mathcal{C}_{v_5}$, 则由 $D_{v_i} = \{v_5, v_{i+2}\}$ 可知, 对每一个 $1 \leq i \leq 4$, $v_i \mapsto C_5, C_6, C_7$. 因此 $D_{u_i}^S = v_5$ 且 $C_i \in B_{v_5}$ ($i = 5, 6, 7$), 与引理 2.4(i) 矛盾. 于是 $5 \leq |\mathcal{C}_{v_5}| \leq 6$. 因为 $n \geq 18$, 所以 $|\bar{S}| \geq 13 \geq 2|S| + 3$. 故存在三个不同的顶点 $w_j \in \bar{S}$ 和某个 $1 \leq p \leq 5$ 使得 $D_{w_j}^S = v_p, j = 1, 2, 3$. 进而, 由引理 2.4, 我们可以假设存在某个 $1 \leq q \leq 7$ 使得

$$w_j \in V(C_q) \text{ 且 } D_{w_j} \setminus S \subseteq V(C_q), \quad j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

情形 2.1 $|\mathcal{C}_{v_5}| = 6$.

在此情形下, 我们假设 $C_7 \notin \mathcal{C}_{v_5}$ 且 $C_i \in \mathcal{C}_{v_5}$ ($1 \leq i \leq 6$). 因为 G 是无 $K_{1,7}$ 的, 所以 $G[N_{C_i}(v_5)]$ ($1 \leq i \leq 6$) 是一个团. 又因 $D_{v_j} = \{v_5, v_{j+2}\}$, 故对任意的 $w \in V(C_7)$ 均有 $wv_j \in E(G)$ ($1 \leq j \leq 4$). 于是由引理 2.1, $D_w^S = v_5$ 且当 $|V(C_7)| \geq 3$ 时, $D_w \setminus S \subseteq V(C_7)$. 进而由引理 2.6 可得, $V(C_7) = \{u_7\}$. 另一方面, 存在 $w^* \in \bigcup_{i=1}^6 V(C_i)$ 使得 $w^* v_5 \notin E(G)$. 否则, $\{v_5, u_7\} \mapsto V(G)$, 此为矛盾. 于是由 $D_{v_i} = \{v_{i+2}, v_5\}$ 和 (2) 可知, $w^* v_i \in E(G)$ ($1 \leq i \leq 4$), $D_{w^*} = \{u_7, v_5\}$, 且 $w^* \neq w_j$ ($j = 1, 2, 3$). 又因为 $D_{w^*} = \{u_7, v_5\}$, 所以 $v_5 \mapsto (\bigcup_{i=1}^6 V(C_i)) \setminus \{w^*\}$. 若 $w^* \in V(C_q)$, 则由 $G[C_q \setminus \{w^*\}]$ 是一个团可知, 存在某个 $1 \leq p \leq 4$ 使得 $D_{w_i} = \{v_p, w^*\}$ ($i = 1, 2, 3$), 与引理 2.1(iii) 矛盾. 若 $w^* \notin V(C_q)$, 则 $G[C_q]$ 是一个团且 $D_{w_j} \setminus S \not\subseteq V(C_q)$ ($j = 1, 2, 3$), 与 (2) 矛盾.

情形 2.2 $|\mathcal{C}_{v_5}| = 5$.

在此情形下, 假设 $C_6, C_7 \notin \mathcal{C}_{v_5}$, $C_i \in \mathcal{C}_{v_5}$ ($1 \leq i \leq 5$). 于是对任意的 $w \in V(C_6) \cup V(C_7)$, 均有 $wv_j \in E(G)$ ($1 \leq j \leq 4$). 从而由引理 2.1, $D_w^S = v_5$. 进而, 由引理 2.6 可得, $|V(C_6)| = |V(C_7)| = 1$ 且

$v_5 \mapsto C_a, 1 \leq a \leq 5$. 于是 $v_p \neq v_5$ 且 $C_q \neq C_6, C_7$, 不妨设 $v_p = v_1, C_q = C_1$. 则由引理 2.6 和 (2) 可知, $|V(C_1)| \geq 5$.

断言 5 存在 $w' \in V(C_1) \setminus \{w_1, w_2, w_3\}$, 使得 $D_{w'} \setminus S \not\subseteq V(C_1)$.

证明 假若对任意的 $w \in V(C_1)$, 均有 $D_w \setminus S \subset C_1$, 则 $v_r := D_w^S \mapsto C_i, 2 \leq i \leq 7$. 又由 G 是无 $K_{1,7}$ 的, $N_{C_1}(v_r) = \emptyset$. 于是 $G[C_1]$ 是 2- 点临界的. 由定理 1.1, $G[C_1]$ 是偶阶的, 矛盾. $\square$

令 $v_r := D_{w'}^S (r \neq 1)$, 其中 w' 如断言 5 中所述. 于是 $v_r \mapsto C_1 \setminus \{w'\}$. 又由 G 是无 $K_{1,7}$ 的可知, $G[N_{C_1}(v_r)]$ 是一个团. 由引理 2.1 和 (2) 可得, $D_{w_i} = \{v_1, w'\}, i = 1, 2, 3$, 与引理 2.1(iii) 矛盾. $\square$

命题 3.4 $|S| \neq 6$.

证明 假设 $|S| = 6$. 于是 $l \geq t \geq 8$. 若 $l \geq 9$, 则由引理 2.5 可知, 对任意的 $v \in V(G)$, 都有 $D_v \subseteq S$. 因此 $n \leq \binom{6}{2} = 15$, 矛盾. 故 $t = l = 8$. 由引理 2.5, 对任意的 $v \in S$, 均有 $D_v \subseteq S$. 由引理 2.3(ii) 可得, $N_S(v) = \emptyset$ 或者 $2 \leq |N_S(v)| \leq 3$. 接下来我们将证明 $G[S] = H_i (1 \leq i \leq 7)$, 这里 H_1 是 6- 圈 $v_1 v_2 \cdots v_6 v_1$, 其他如图 2 所示. 首先我们断言 $G[S]$ 不含孤立点. 否则, 令 v_1 是 $G[S]$ 的一个孤立点. 于是由 $v_1 \in D_{v_i}$ 可知, $G[S \setminus \{v_1\}]$ 是 2- 点临界的, 且对任意的 $v_i \in S (2 \leq i \leq 6)$, 均有 $D_{v_i} \subseteq S$. 因此由定理 1.1, $G[S \setminus \{v_1\}]$ 是偶阶的, 与 $|S| = 6$ 矛盾. 其次 $G[S]$ 是连通的. 否则, 因为 $\delta(G[S]) \geq 2$, 所以 $G[S] \cong 2K_3$, 与 $D_{v_i} \subseteq S$ 矛盾. 如果 $G[S]$ 是 2- 正则的, 那么 $G \cong H_1$. 故不妨假设 $d_{G[S]}(v_4) = 3$ 且 $N_{G[S]}(v_4) = \{v_a, v_b, v_c\}$. 则由引理 2.1 可知, $D_{v_4} = \{v_d, v_e\}$, 这里 $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. 不失一般性, 设 $v_d v_a, v_d v_b \in E(G), v_e v_c \in E(G)$. 若 $v_d v_e \in E(G)$, 则 $G[S] \cong H_7$, 或者 $G[S] \cong H_4$ (此时 $v_e v_b \in E(G)$), 或者 $G[S] \cong H_6$ (此时 $v_e v_b, v_a v_c \in E(G)$); 若 $v_d v_e \notin E(G)$, 则由 $\delta(G[S]) \geq 2$, 不妨设 $v_b v_e \in E(G)$. 因此 $G[S] \cong H_2$, 或者 $G[S] \cong H_3$ (此时 $v_e v_a \in E(G)$), 或者 $G[S] \cong H_5$ (此时 $v_e v_a, v_d v_c \in E(G)$).

注意到 $S^* = \{\{v_i, v_j\} : \{v_i, v_j\} \mapsto S, v_i, v_j \in S\}$. 容易验证在图 H_1, H_2 和 H_7 中, $|S^*| = 3$; 在图 H_3 和 H_4 中, $|S^*| = 5$. 由引理 2.5 可知, 对任意的 $v \in \bigcup_{j \in J} V(C_j)$, 均有 $D_v \subseteq S$ 且 $D_v \in S^*$. 注意到如果存在 $u \in \bar{S}$ 使得 $D_u = \{v_i, v_j\} \in S^*$, 那么对任意的 $w \in \bar{S} \setminus \{u\}$, 都有 $N(w) \cap \{v_i, v_j\} \neq \emptyset$. 因此由引理 2.1 可知, $\bigcup_{j \in J} V(C_j) \subseteq U^*$, 且 $|U^*| \geq \sum_{i \in J} |V(C_i)|$. 令 $|V(C_1)| \geq \cdots \geq |V(C_8)|$. 若 $|J| = 1$, 则由 $n \geq 18, |V(C_1)| \geq 5$, 即 $|U^*| \geq \sum_{i \in J} |V(C_i)| \geq 5$; 若 $|J| \geq 2$, 则 $|U^*| \geq \sum_{i \in J} |V(C_i)| \geq 6$. 于是 $|S^*| \geq 5$. 从而 $G[S] \cong H_i (i = 1, 2, 7)$.

因为 $\{v_i, v_{i+3}\} \in S^* (1 \leq i \leq 3)$, 所以 $|B_{v_j}| \geq 1 (1 \leq j \leq 6)$. 由引理 2.4(i) 可知,

$$\text{若 } V(C_i) = \{w\}, V(C_j) = \{w'\}, i \neq j, \text{ 则 } D_w^S \neq D_{w'}^S \text{ 且 } |D_w \cap S| = |D_{w'} \cap S| = 1. \quad (3)$$

若 $U^* = V(C_1)$, 则 $|V(C_i)| = 1$ 且 $|D_{u_i} \cap S| = 1 (2 \leq i \leq 8)$. 因此存在 $2 \leq p \neq q \leq 8$ 使得 $D_{u_p}^S = D_{u_q}^S = v_i (1 \leq i \leq 6)$, 从而 $C_1, C_p, C_q \in B_{v_i}$, 与引理 2.4(i) 矛盾. 故 $V(C_1) \subset U^*$. 若 $|J| \geq 2$, 则 $|S^*| \geq |U^*| \geq 6$; 若 $|J| = 1$, 则由 $n \geq 18$ 可得, $|V(C_1)| \geq 5$. 进而由 (3), $|S^*| \geq |U^*| \geq |V(C_1)| + 1 \geq 6$. 于是 $G[S] \cong H_i, 3 \leq i \leq 4$. 因此, 我们只需考虑如下的两种情形. 在接下来的证明中, 所有 $v_p \in S (p > 6)$ 的下标均取 6 的剩余类.

图 2 图 $H_i (2 \leq i \leq 7)$

情形 1 $G[S] \cong H_5$.

在此情形下, $S^* = \{\{v_i, v_j\} : i = 1, 3, 5, j = 2, 4, 6\}$ 且 $D_{v_i} = \{v_{i+2}, v_{i-2}\}$, $1 \leq i \leq 6$. 则对任意的 $w \in U^*$, 都有 $|N_S(w)| = 4$, 因此 $|U^*| = |S^*| = 9$, 且对任意的 $u \in \bar{S} \setminus U^*$ 均有 $|D_u \cap S| = 1$. 于是由 $V(C_1) \subset U^*$ 可得, $|V(C_1)| \in \{3, 5, 7\}$. 注意到若 $|V(C_3)| = 3$, 则 $U^* = V(C_1) \cup V(C_2) \cup V(C_3)$. 若 $|V(C_1)| = 7$, 则由 $\bigcup_{j \in J} V(C_j) \subseteq U^*$ 可得, $|V(C_2)| = 1$; 若 $|V(C_1)| = 5$ 和 $|V(C_2)| = 3$, 则 $V(C_1) \cup V(C_2) \subseteq U^*$. 假若 $U^* = V(C_1) \cup V(C_2) \cup V(C_3)$. 由 (3), 可令 $D_{u_{i+3}}^S = v_i$ ($1 \leq i \leq 5$). 又因 $S^* = \{\{v_i, v_j\} : i = 1, 3, 5, j = 2, 4, 6\}$, 所以存在 $1 \leq i \leq 5$ 满足 $|B_{v_i} \cap \{C_1, C_2, C_3\}| \geq 2$, 因此 $|B_{v_i}| \geq 3$, 与引理 2.4(i) 矛盾. 故 $U^* \supset V(C_1) \cup V(C_2) \cup V(C_3)$, 从而

$$|V(C_3)| = \cdots = |V(C_8)| = 1, \quad |V(C_1)| + |V(C_2)| \leq 6. \quad (4)$$

因为 $|U^*| = 9$, 所以可令 $U^* = \bigcup_{i=1}^5 V(C_i)$. 由 (3), 不妨设 $D_{u_6} = v_1$, $D_{u_7} = v_{i_1}$ 和 $D_{u_8} = v_{i_2}$, 其中 $i_1, i_2 \neq 1$ 且 $i_1 \neq i_2$. 定义 $U_i^* = \{\phi(\{v_i, v_j\}) : \{v_i, v_j\} \in S^*\}$ ($1 \leq i \leq 6$). 于是由引理 2.1 和 2.4(i), 存在 $p \in \{1, 2\}$, 使得 $U_i^* \subseteq V(C_p)$ ($i = 1, i_1, i_2$). 注意到 $|U_i^* \cap U_j^*| \leq 1$ ($1 \leq i \neq j \leq 6$). 因此 $|V(C_1)| + |V(C_2)| \geq 7$, 与 (4) 矛盾.

情形 2 $G[S] \cong H_6$.

在这种情形下, $S^* = \{\{v_i, v_j\} : i = 1, 2, 6; j = 3, 4, 5\}$, $D_{v_i} = \{v_{i+2}, v_{i-2}\}$, $i = 1, 4$ 且 $D_{v_j} = \{v_{j+2}, v_{j+3}\}$, $j = 2, 3, 5, 6$. 因此对任意的 $u \in \bar{S}$ 都有 $|N_S(u)| = 4$, 这意味着 $|U^*| = |S^*| = 9$. 类似于情形 1 的讨论, 我们导出类似的矛盾. $\square$

由命题 3.1–3.4, $|S| \geq 7$ 且 $l \geq |S| + 2 \geq 9$. 又由引理 2.5 和 G 是无 $K_{1,7}$ 的, 可得, $l \leq 12$ 且 $2k + 2 \leq k + l \leq |V(G)| \leq \binom{k}{2}$. 于是 $7 \leq k \leq 10$.

令 $r = \binom{k}{2} - |V(G)|$. 则当 $k = 7$ 时, $r \leq 3$; 当 $8 \leq k \leq 10$ 时, $r \leq \frac{k^2 - 5k - 4}{2}$. 设 $R^* = \{(v_i, v_j) : \text{对任意的 } v \in V(G), \{v_i, v_j\} \subseteq S \text{ 均不能由 } D_v \text{ 实现}\}$. 则 $|R^*| \leq r$.

对任意的 $x \in \bar{S}$, 若 $xv_{i_j} \notin E(G)$, $1 \leq j \leq p$, 则记 $x := \overline{i_1 i_2 \cdots i_p}$. 则由引理 2.1, $p \geq 2$.

断言 6 令 $x := \overline{i_1 i_2 \cdots i_p}$ ($p \geq 3$), 且 $D_x = \{v_{i_1}, v_{i_2}\}$, 则 $\{v_{i_j}, v_{i_q}\}$ 均不能由任何的 D_v ($v \in V(G) \setminus \{x\}$) 实现, 这里 $1 \leq j, q \leq p$ 和 $(j, q) \neq (1, 2)$. 而且, 若 $y := \overline{j_1 j_2 \cdots j_q}$, 则 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}\} \not\subseteq \{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_q}\}$ 且 $\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_q}\} \not\subseteq \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}\}$.

证明 若存在 $z \in V(G) \setminus \{x\}$ 满足 $D_z = \{v_{i_j}, v_{i_q}\}$, 则 x 不能被 D_z 控制, 此为矛盾.

假若 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}\} \subseteq \{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_q}\}$, 则 $yv_{i_1}, yv_{i_2} \notin E(G)$, 因此 y 不能被 D_x 控制, 矛盾. 因此 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}\} \not\subseteq \{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_q}\}$. 同样的有 $\{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_q}\} \not\subseteq \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}\}$. $\square$

把 $G - S$ 的每一个连通分支 C_j , $1 \leq j \leq l$ 收缩为一个点后得到的图记为 G' . 令 G^* 是 G' 的二部支撑子图, 其二划分为 $(S, \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_l^*\})$, 其中 u_j^* 对应于 C_j ($1 \leq j \leq l$). 则 G^* 是无 $K_{1,7}$ 的, 当 $|C_j| = 1$ 时, $d_{G^*}(u_j^*) \leq k - 2$, 且当 $|C_j| > 1$ 时, 由断言 6 可知, $d_{G^*}(u_j^*) \geq d_G(u_j) + |C_j| - 1$.

断言 7 如果 $7 \leq k \leq 10$, 那么 $|E(G^*)| \geq 7k - 6$.

证明 对任意的 $u \in \bar{S}$, 若 $u = \overline{i_1 i_2 \cdots i_p}$ ($p = k - d_S(u) \geq 3$), 则由断言 6 可知, S 中至少存在 $\binom{p}{2} - 1$ 对顶点不能由任何的 D_v 实现 ($v \in V(G)$). 假若 $|E(G^*)| \leq 7k - 7$, 则易验证当 $k = 7$ 时, $|R^*| \geq 4 > 3 \geq r$; 当 $8 \leq k \leq 10$, $|R^*| \geq k^2 - 7k + 2 > \frac{k^2 - 5k - 4}{2} \geq r$, 此为矛盾. 因此 $|E(G^*)| \geq 7k - 6$. $\square$

由断言 7, 存在 $v_i \in S$, 满足 $d_{G^*}(v_i) \geq 7$, 与 G^* 是无 $K_{1,7}$ 矛盾. 定理 B 证毕.

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London: The Macmillan Press Ltd, 1976
- 2 Ananchuen N, Plummer M D. Matchings in 3-vertex-critical graphs: the even case. *Networks*, 2005, 45: 210–213
- 3 Brigham R C, Chinn P Z, Dutton R D. Vertex domination-critical graphs. *Networks*, 1988, 18: 173–179
- 4 Ananchuen N, Plummer M D. Matchings in 3-vertex-critical graphs: the odd case. *Discrete Math*, 2007, 307: 1651–1658
- 5 Wang T, Yu Q L. Matching and factor-critical property in 3-dominating-critical graphs. *Util Math*, 2010, 83: 159–170
- 6 Sumner D P. 1-factors and antifactor sets. *J Lond Math Soc*, 1976, 13: 351–359
- 7 Wang T, Yu Q. Factor-critical property in 3-dominating-critical graphs. *Discrete Math*, 2009, 309: 1079–1083
- 8 Wang T, Yu Q. A conjecture on k -factor-critical and 3- γ -critical graphs. *Sci China Math*, 2010, 53: 1385–1391
- 9 Ananchuen N, Plummer M D. On the connectivity and matchings in 3-vertex-critical claw-free graphs. *Util Math*, 2006, 69: 85–96
- 10 Fulman J, Hanson D, MacGillivray G. Vertex domination-critical graphs. *Networks*, 1995, 25: 41–43
- 11 李凡, 陆玫. 阶数极大的临界全控制图. *中国科学: 数学*, 2011, 41: 1089–1094

A conjecture on 3-vertex-critical graphs

LIU HuiQing, LU Mei & ZHANG ShunZhe

Abstract Let $\gamma(G)$ be the domination number of a graph G . A graph G is γ -vertex-critical if $\gamma(G-v) < \gamma(G)$ for every vertex $v \in V(G)$. In this paper, we show that if G is a 3-vertex-critical graph of even order $n \geq 18$ and $K_{1,7}$ -free, then G contains a perfect matching with some exceptions. Our result solves a conjecture proposed by Ananchuen and Plummer.

Keywords domination number, 3-vertex-critical, perfect matching

MSC(2010) 05C69, 05C70

doi: 10.1360/012013-84