多分量非线性可积系统中的奇异局域矢量波

王秀彬^{1,2}, 陈勇^{1*}, 韩波¹, 田守富^{2*}

1. 哈尔滨工业大学数学学院, 哈尔滨 150001;

2. 中国矿业大学数学学院, 徐州 221116

E-mail: xiubinwang@163.com, yongchen@hit.edu.cn, bohan@hit.edu.cn, sftian@cumt.edu.cn

收稿日期: 2021-05-26; 接受日期: 2021-09-23; 网络出版日期: 2021-12-23; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11871180 和 11975306) 资助项目

摘要 本文利用 Darboux 变换结合渐近展开方法推导出多分量非局部非线性 Schrödinger 方程的一般高阶有理解. 当参数满足特定的约束条件时, 本文利用一些图形详细地讨论了非局部系统解的动力学行为. 这些结果表明多分量非局部系统中存在更丰富的局域波结构. 更重要的是, 所得结果也可用于解释非局部波模型中相应的波现象.

关键词 可积系统 Darboux 变换 变量分离技术 孤子

MSC (2020) 主题分类 35Q55, 35Q51, 35P30, 81Q05

1 引言

著名的非线性 Schrödinger 方程

$$iq_t + \frac{1}{2}q_{xx} \pm |q|^2q = 0 \quad (1.1)$$

可以用来描述非线性科学领域中的非线性波现象, 如非线性光学、Bose-Einstein 凝聚、气象、等离子体和金融等^[1-6], 其中下标表示对变量的偏导数. 实际上, 它也是数学物理领域中一个基本的非线性模型^[7,8]. 它是完全可积的, 许多学者通过反散射变换、Darboux 变换和 Hirota 双线性等方法已经得到了该系统各种不同形式的非线性波解^[9-12]. 在过去的 20 年中, 它再次受到科研工作者的广泛关注, 其主要原因是它可以用来刻画怪波现象. 怪波现象是自发性的且具有来无影去无踪的特征^[13]. 近年来, 这类波引起了人们的广泛关注, 因为它们在海洋中具有破坏性的影响^[14]. 1983 年, Peregrine^[15] 首次给出了在非线性 Schrödinger 方程 (1.1) 中推导出怪波的第一个解析表达式. 后来, Akhmediev 等^[16] 在非线性 Schrödinger 方程 (1.1) 中推导出高阶怪波^[17], 并揭示了其有趣的动力学行为. 除了上述标准的非线性 Schrödinger 方程 (1.1), 人们发现许多其他非线性可积模型也可以用来刻画怪波现象, 如 Hirota 方程^[18]、Kundu-Eckhaus 方程^[19]、Sasa-Satsuma 方程^[20-22]、耦合非线性 Schrödinger 方程^[23-26]、

英文引用格式: Wang X B, Chen Y, Han B, et al. Exotic localized vector waves in the multicomponent nonlinear integrable systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 1057–1072, doi: 10.1360/SSM-2021-0096

Gerdjikov-Ivanov 方程^[27]、高维非线性 Schrödinger 方程^[28,29] 和 Davey-Stewartson 方程^[30] 等. 在光纤和水箱中对怪波的实验观测也有报道^[31,32]. 之前对怪波的研究大多集中在局部非线性可积模型中, 即解的演化只依赖于局部解值及其局部时空导数. 最近出现了一些关于奇偶对称的非局部可积模型怪波解的简单研究^[33,34]. 这些解在 x 处的演化不仅取决于 x 处的局部解, 还取决于远处 $-x$ 的非局部解. 也就是说, 在遥远位置 x 和 $-x$ 的解态是直接相关的, 这让人联想到粒子之间的量子纠缠. 研究结果表明, 奇偶对称非局部模型比局部模型中存在更多新型的怪波结构^[31,32]. 这些怪波可以跨越所有的时间和空间, 也可以形成坍塌奇点. 此外, 解动力学行为表现出丰富的模式, 其中大部分在局部模型中没有对应的模式. 因此对奇偶对称的非局部模型的研究是非常有意义的.

近年来, 奇偶时间对称性的研究已经在数学和物理的各个分支中引起了广泛的关注, 因为它为潜在的动力系统提供了强大的数学和物理见解^[35-37]. 此外, 部分的奇偶时间对称性在光学中也展示出了广泛的应用^[38-40]. 受奇偶时间对称性理论和实验研究的激励, 利用著名的 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur 系统的约化, Ablowitz 和 Musslimani^[41] 首次提出了如下的非局部非线性 Schrödinger 方程:

$$iq_t(x, t) + \frac{1}{2}q_{xx}(x, t) \pm q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) = 0, \quad (1.2)$$

其中, $\pm$ 分别表示聚焦 (+) 和散焦 (-) 情形, 上划线表示共轭复数. 方程 (1.2) 包含自感应电位且满足奇偶时间对称性的条件. 之后, 许多学者提出并研究了一系列新的非局部可积模型^[42-50]. 此外, 多维和多分量的奇偶时间对称的概念已被证明包含部分奇偶时间对称性, 并且证明了这类奇偶时间对称系统具有奇偶时间对称的大部分性质. 多分量耦合非线性 Schrödinger 方程是一类具有广泛用途的非线性系统, 例如, 从原子凝聚^[51,52] 到水波^[53]、非线性光学^[54,55]、生物物理学^[56] 和等离子体物理学^[57,58]. 特别地, 多分量耦合非线性 Schrödinger 方程可以用来描述短脉冲在多模光纤^[59] 和光纤阵列^[4] 中的传播. 因此, 对多分量非局部非线性模型的研究是必然的且是有价值的.

众所周知, Darboux 变换是一个构造非线性模型孤子解的有力工具. 但是, 因为多分量非线性模型涉及高阶矩阵谱问题, 因此分析过程变得非常困难且复杂. 本文主要利用 Darboux 变换和变量分离技术研究多分量非局部非线性 Schrödinger 方程的高阶有理解. 此外, 通过图像分析的方式讨论了这些解的动力学行为.

余下内容的结构安排如下. 第 2 节首先利用变量分离技术研究多分量非局部非线性 Schrödinger 方程的 Lax 对. 然后利用 Taylor 展开机制得到 N 阶有理孤子解. 此外, 通过图像分析的方式展示了这些孤子解的动力学行为. 第 3 节给出本文的结论与展望. 附录 A 给出定理的证明.

2 非局部多分量非线性 Schrödinger 模型的解

本节集中研究如下的非局部多分量散焦非线性 Schrödinger 方程^[60]:

$$iq_t(x, t) + \frac{1}{2}q_{xx}(x, t) - q(x, t)q^\dagger(-x, t)q(x, t) = 0, \quad (2.1)$$

其中 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ 是复向量场, 上标 T 表示转置, $\dagger$ 表示共轭转置. 方程 (2.1) 具有奇偶时间对称性, 即在 $x \rightarrow -x$ 和 $t \rightarrow -t$ 的联合变换和复共轭作用下不变.

2.1 变量分量技术

系统 (2.1) 仍然是可积的, 它的 Lax 对可表示为

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \quad (2.2)$$

其中,

$$\begin{cases} U = i(\lambda\sigma_3 + Q), \\ V = i\lambda(\lambda\sigma_3 + Q) + \frac{1}{2}\sigma_3(Q_x - iQ^2), \\ Q = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{q}^\dagger(-x, t) \\ \mathbf{q}(x, t) & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

另外, $\sigma_3 = \text{diag}(1, -\mathbf{I})$, $\mathbf{I}$ 表示单位矩阵. Lax 对 (2.2) 中两个线性方程的相容性条件

$$U_t - V_x + [U, V] = 0$$

可以直接推导出方程 (2.1).

简单计算可知方程 (2.1) 具有满足如下形式的种子解:

$$\mathbf{q}_0 = \frac{\mathbf{a}}{\exp(i\sigma t)}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

其中 $\sigma = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$. 接下来, 寻求与谱参数相对应的 Lax 系统 (2.2) 的解族

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \Lambda \mathcal{R} \mathcal{E} \mathcal{Z}, \quad \mathcal{R} = \exp(i\Theta x), \quad \mathcal{E} = \exp(i\Omega t), \quad (2.3)$$

其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}/\exp(i\sigma t) \end{pmatrix}.$$

这里 $\mathcal{Z}$ 表示任意复 $n+1$ 维向量. 设定

$$[\Theta, \Omega] = \Theta\Omega - \Omega\Theta = 0. \quad (2.4)$$

结合表达式 (2.2) 和 (2.4), 可知

$$\Theta = \begin{pmatrix} \lambda & -\mathbf{a}^\dagger \\ \mathbf{a} & -\lambda\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \frac{1}{2}\Theta^2 + \lambda\Theta - \frac{1}{2}\lambda^2 + \sigma.$$

在 (2.3) 中的指数矩阵 $\mathcal{R}$ 可写为

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \Theta_{1,1} & \Theta_{1,1} & \cdots & \Theta_{1,n+1} \\ \Theta_{2,1} & \Theta_{2,2} & \cdots & \Theta_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{n+1,1} & \Theta_{n+1,2} & \cdots & \Theta_{n+1,n+1} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} \Theta_{1,1} = \tau \cosh(\tau x) + i\lambda \sinh(\tau x), \\ \Theta_{m+1,1} = -\Theta_{1,m+1} = a_m \sinh(\tau x), \quad m \geq 1, \\ \Theta_{m+1,m+1} = a_m^2 \sigma^{-1} (\tau \cosh(\tau x) - i\lambda \sinh(\tau x)) \\ \quad + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{m-1}^2 + a_{m+1}^2 + \cdots + a_n^2) \sigma^{-1} \tau e^{-i\lambda x}, \\ \Theta_{n+1,m+1} = \Theta_{m+1,n+1} = a_n a_m \sigma^{-1} (\tau \cosh(\tau x) - i\lambda \sinh(\tau x) - \tau e^{-i\lambda x}), \\ \tau = \sqrt{\rho^2 - \lambda^2}, \quad \rho^2 = \sigma. \end{cases}$$

按照类似的方式, 在 (2.3) 中指数矩阵 $\mathcal{E}$ 可表示为

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\xi} \begin{pmatrix} \Omega_{1,1} & \Omega_{1,2} & \cdots & \Omega_{1,n+1} \\ \Omega_{2,1} & \Omega_{2,2} & \cdots & \Omega_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{n+1,1} & \Omega_{n+1,2} & \cdots & \Omega_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \exp\left(\frac{1}{2}i\sigma t\right),$$

其中

$$\begin{cases} \Omega_{1,1} = \xi \cosh(\xi t) + i\lambda^2 \sinh(\xi t), \quad \xi = \lambda\tau, \\ \Omega_{m+1,1} = -\Omega_{1,m+1} = ia_m \sinh(\xi t), \\ \Omega_{m+1,m+1} = a_m^2 \sigma^{-1} (\xi \cosh(\xi x) - i\lambda^2 \sinh(\xi x)) \\ \quad + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{m-1}^2 + a_{m+1}^2 + \cdots + a_n^2) \sigma^{-1} \xi e^{\frac{1}{2}i(\rho^2 - 2\lambda^2)t}, \\ \Omega_{n+1,m+1} = \Omega_{m+1,n+1} = a_n a_m \sigma^{-1} (\xi \cosh(\xi x) - i\lambda^2 \sinh(\xi x) - \xi e^{\frac{1}{2}i(\rho^2 - 2\lambda^2)t}). \end{cases}$$

2.2 高阶有理孤子解的推导

本小节致力于构造方程 (2.1) 的高阶孤子解. 设定 $\lambda = \rho(1 + \epsilon)$ 并利用如下的 Taylor 展开式:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \\ \cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \end{aligned}$$

可得矩阵 $\mathcal{R}$ 在 $\epsilon = 0$ 处的展开式为

$$\mathcal{R}|_{\lambda=\rho(1+\epsilon)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n \epsilon^n,$$

其中

$$\mathcal{R}_n = \begin{pmatrix} \rho_n & -a_1 \rho^{-1} \beta_n & \cdots & -a_n \rho^{-1} \beta_n \\ a_1 \rho^{-1} \beta_n & \rho^{-2} (a_1^2 \Pi_n + \Gamma_1 e^{-i\rho x} A_n) & \cdots & a_1 a_n \rho^{-2} (\Pi_n - e^{-i\rho x} A_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n \rho^{-1} \beta_n & a_1 a_n \rho^{-2} (\Pi_n - e^{-i\rho x} A_n) & \cdots & \rho^{-2} (a_n^2 \Pi_n + \Gamma_n e^{-i\rho x} A_n) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

且

$$\begin{cases} \Gamma_m = \sum_{m \neq n} a_m^2, \\ \rho_n = \alpha_n - \beta_n - \beta_{n-1}, \\ \Pi_n = \alpha_n + \beta_n + \beta_{n-1}, \\ \alpha_n = \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n-l}^l 2^{n-2l} A_{2(n-l)}, \\ \beta_n = \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n-l}^l 2^{n-2l} A_{2(n-l+1)}, \\ C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad A_m = \frac{(-i)^m (\rho x)^m}{m!}, \end{cases}$$

n 和 m 是非负整数. 类似地, 矩阵 $\mathcal{E}$ 在 $\epsilon = 0$ 处的展开式为

$$\mathcal{E}|_{\lambda=\rho(1+\epsilon)} = \exp\left(\frac{1}{2}i\sigma t\right) \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n \epsilon^n,$$

其中

$$\mathcal{E}_n = \begin{pmatrix} \sigma_n & -a_1 \rho^{-1} \theta_n & \cdots & -a_n \rho^{-1} \theta_n \\ a_1 \rho^{-1} \theta_n & \rho^{-2} (a_1^2 \chi_n + \Gamma_1 e^{-\frac{1}{2}i\rho^2 t} \varrho_n) & \cdots & a_1 a_n \rho^{-2} (\chi_n - e^{-\frac{1}{2}i\rho^2 t} \varrho_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n \rho^{-1} \theta_n & a_1 a_n \rho^{-2} (\chi_n - e^{-\frac{1}{2}i\rho^2 t} \varrho_n) & \cdots & \rho^{-2} (a_n^2 \chi_n + \Gamma_n e^{-\frac{1}{2}i\rho^2 t} \varrho_n) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

且

$$\begin{cases} \sigma_n = \gamma_n - \theta_n - \theta_{n-1}, \quad \chi_n = \gamma_n + \theta_n + \theta_{n-1}, \\ \gamma_n = \sum_{l=0}^{[\frac{3n}{4}]} \sum_{m=0}^l (-1)^{n-l} C_{n-l}^m C_{2(n-l)}^{l-m} 2^{n-l-m} B_{2(n-l)}, \\ \theta_n = i \sum_{l=0}^{[\frac{3n+1}{4}]} \sum_{m=0}^l (-1)^{n-l} C_{n-l}^m C_{2(n-l)+1}^{l-m} 2^{n-l-m} B_{2(n-l)+1}, \\ \varrho_n = \sum_{n=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n-l}^l i^{n-l} 2^{n-2l} B_n, \quad B_m = \frac{(i\rho)^{2m} t^m}{m!}. \end{cases}$$

从上述表达式可知 l 是非负整数. 下面假设 ω_k 是 ϵ 的任意多项式函数:

$$\mathcal{Z}_0(\epsilon) = \sum_{k=0}^n \omega_k \epsilon^k, \quad \omega_k = \begin{pmatrix} \omega_{1,k} \\ \omega_{2,k} \\ \vdots \\ \omega_{n,k} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

进而可知解 (2.3) 满足如下扩展形式:

$$\Psi|_{\lambda=\rho(1+\epsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \epsilon^n,$$

$$\Psi_n = \exp\left(\frac{1}{2}i\sigma t\right) \Lambda \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \mathcal{R}_k \mathcal{E}_j \omega_{n-k-j}.$$

然后在定理 A.1 设定 $\lambda_1 = \rho$, 可得到方程 (2.1) 的 N 阶孤子解.

定理 2.1 当非局部非线性 Schrödinger 方程 (2.1) 的解关于空间变量是偶函数时, 非局部方程 (2.1) 的解与对应局部方程的解相同. 因此非局部非线性 Schrödinger 方程 (2.1) 的解关于空间变量在相差一个方程的对称变换时不是空间变量的偶函数.

证明 当 $N = 1$ 时, 单分量非局部非线性 Schrödinger 方程的一阶有理解. 类似于文献 [61], 通过简化容易得到单分量非局部非线性 Schrödinger 方程的解不是关于空间变量的偶函数, 且不满足相应的局部非线性 Schrödinger 方程. 类似地, 两分量非局部非线性 Schrödinger 方程的一阶孤子解可简化为

$$\begin{cases} q_1[1] = \left[a_1 \frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}} + a_2 \frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{N}} \right] e^{-i(a_1^2 + a_2^2)t}, \\ q_2[1] = \left[a_2 \frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}} - a_1 \frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{N}} \right] e^{-i(a_1^2 + a_2^2)t}, \end{cases} \quad (2.8)$$

其中

$$\begin{cases} \mathcal{N}_1 = 3 - 4(a_1^2 + a_2^2)^2 t^2 + 4(a_1^2 + a_2^2)x^2 - 8i(a_1^2 + a_2^2)t + 2|g|^2 e^{-2i\sqrt{a_1^2 + a_2^2}x}, \\ \mathcal{N}_2 = 8g[2i(a_1^2 + a_2^2)t - 2i\tilde{\rho}x - 1]e^{-i\frac{1}{2}(2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}x + (a_1^2 + a_2^2)t)}, \\ \mathcal{N} = 2 + 4(a_1^2 + a_2^2)^2 t^2 - 4(a_1^2 + a_2^2)x^2 + 2|g|^2 e^{2i\sqrt{a_1^2 + a_2^2}x}, \end{cases} \quad (2.9)$$

g 为任意复常数. 根据表达式 (2.8) 和 (2.9) 可得, 当 $g \neq 0$ 时, 解 $q_1[1]$ 和 $q_1[2]$ 关于空间变量在相差一个方程的对称变换时不是空间变量的偶函数, 且不满足相应的局部非线性 Schrödinger 方程. 用类似的方式, 可以依次验证多分量非局部非线性 Schrödinger 方程 (2.1) 的解关于空间变量在相差一个方程的对称变换时不是空间变量的偶函数. $\square$

2.3 有理孤子解的动态分析

为了更好地了解非局部系统解的特征, 本小节主要通过图像分析的方式展示孤子解的动力学行为. 当 $N = 1$ 时, 方程 (2.1) 的一阶孤子解满足

$$\begin{pmatrix} q_1[1] \\ q_2[1] \\ \vdots \\ q_n[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} / \exp(i\sigma t) - 4\rho\bar{\varphi}_1[0](-x, t) \begin{pmatrix} \varphi_2[0] \\ \varphi_3[0] \\ \vdots \\ \varphi_{n+1}[0] \end{pmatrix} / \sum_{j=1}^{n+1} \varphi_j[0]\bar{\varphi}_j[0](-x, t),$$

其中

$$\Delta[0] = \begin{pmatrix} \varphi_1[0] \\ \varphi_2[0] \\ \vdots \\ \varphi_{n+1}[0] \end{pmatrix} = \Psi_0 = \exp\left(\frac{1}{2}i\sigma t\right) \Lambda \mathcal{R}_0 \mathcal{E}_0 \omega_0,$$

另外, $\mathcal{R}_0$ 和 $\mathcal{E}_0$ 分别由表达式 (2.5) 和 (2.6) 在 $n = 0$ 时得到.

同样地, 当 $N = 2$ 时, 可得方程 (2.1) 的一阶阶孤子解满足

$$\begin{pmatrix} q_1[2] \\ q_2[2] \\ \vdots \\ q_n[2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1[1] \\ q_2[1] \\ \vdots \\ q_n[1] \end{pmatrix} - 4\rho\bar{\varphi}_1[1](-x, t) \times \begin{pmatrix} \varphi_2[1] \\ \varphi_3[1] \\ \vdots \\ \varphi_{n+1}[1] \end{pmatrix} \bigg/ \sum_{j=1}^{n+1} \varphi_j[1]\bar{\varphi}_j[1](-x, t),$$

其中,

$$\Delta[1] = \begin{pmatrix} \varphi_1[1] \\ \varphi_2[1] \\ \vdots \\ \varphi_{n+1}[1] \end{pmatrix} = T[1]\Psi_1 + \rho\Psi_0, \quad T[1] = 2\rho(I - P[1])$$

和

$$P[1] = \frac{\Delta[0]\Delta[0]^\dagger(-x, t)}{\Delta^\dagger[0](-x, t)\Delta[0]}, \quad \Psi_1 = \exp\left(\frac{1}{2}i\sigma t\right)\Lambda\mathcal{R}_0\mathcal{E}_0\omega_0,$$

另外, $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{E}_1$ 分别由表达式 (2.5) 和 (2.6) 在 $n = 1$ 时得到.

由于单分量非局部非线性 Schrödinger 方程已经有很多工作, 下面重点分析耦合非局部非线性 Schrödinger 方程解的动力学行为.

对于两分量非局部非线性 Schrödinger 方程的精确解, 当参数选取 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $\omega_{1,0} = 1$, $\omega_{2,0} = 1$, $\omega_{3,0} = 1$ 时, 此解在周期背景上展现出相互作用呼吸波, 如图 1 所示. 当其他参数保持不变且 $a_1 = 0$, $\omega_{3,0} = 0$ 时, 如图 2 所示, 在第一个分量上, 两个亮孤子之间的相互作用出现, 同时在第二个分量中出现了亮孤子与周期呼吸之间的相互作用. 当其他参数保持不变且 $\omega_{3,0} = 1.1$ 时, 准 Akhmediev 呼吸波出现, 如图 3 所示. 对于二阶孤子解, 如图 4 所示, 在第一个分量中, M- 型孤子和准 Akhmediev 呼吸波之间的相互作用出现, 同时在第二个分量中, 相互作用的孤子出现. 此外, 这些现象表明这些碰撞是具有弹性的, 即碰撞过程中没有能量损失且碰撞后波的形状保持不变. 特别地, 这些波的分布关于 $(0, 0)$ 中心对称.

对于三分量非局部非线性 Schrödinger 方程的精确解, 当 $N = 1$ 时, 可得到一阶有理孤子, 如图 5 所示, 在前两个分量中, 展示出了呼吸孤子的特征; 而在第三个分量中, 周期性背景上的亮暗呼吸波之间的相互作用出现. 随着自由参数 $\omega_{4,0}$ 增大, 周期背面逐渐小时, 仅出现亮暗孤子的相互作用, 如图 6 所示. 对于二阶有理孤子, 如图 7 所示, 在第一个分量中, 相互作用波的振幅在原点附近趋于 0, 而在第二和第三个分量中, 相互作用波的振幅在原点附近达到最大值. 特别地, 在第三个分量中出现了多峰孤子. 如图 8 所示, 随着自由参数 $\omega_{3,0}$ 增大, 多峰孤子表现出较弱的局域性.

上述非局部非线性 Schrödinger 方程的波结构并没有出现在通常的局部非线性 Schrödinger 方程中. 从波动结构的角度看, 非局部模型和局部模型具有明显的差别. 这些 3 维图像展示了这些解关于 $(0, 0)$ 中心对称, 因此这些图像也展示了所得的解关于空间变量在相差一个方程的对称变换时不是空间变量的偶函数.

图 1 (网络版彩图) 当参数选取 $a_1 = 1, a_2 = 1, \omega_{1,0} = \omega_{2,0} = 1, \omega_{3,0} = 1$ 时, 两分量非局部 Schrödinger 方程的一阶孤子解 (a) $|q_1|$ 和 (c) $|q_2|$; (b) $|q_1|$ 沿 x 轴方向的波强度; (d) $|q_2|$ 沿 x 轴方向的波强度

图 2 (网络版彩图) 当参数选取 $a_1 = 0, a_2 = 1, \omega_{1,0} = \omega_{2,0} = 1, \omega_{3,0} = 0$ 时, 两分量非局部 Schrödinger 方程的一阶孤子解 (a) $|q_1|$ 和 (c) $|q_2|$; (b) $|q_1|$ 沿 x 轴方向的波强度; (d) $|q_2|$ 沿 x 轴方向的波强度

图 3 (网络版彩图) 当参数选取 $a_1 = 0, a_2 = 1, \omega_{1,0} = \omega_{2,0} = 1, \omega_{3,0} = 1.1$ 时, 两分量非局部 Schrödinger 方程的一阶孤子解 (a) $|q_1|$ 和 (c) $|q_2|$; (b) $|q_1|$ 沿 x 轴方向的波强度; (d) $|q_2|$ 沿 x 轴方向的波强度

图 4 (网络版彩图) 当参数选取 $a_1 = 0, a_2 = 1, \omega_{1,0} = 1, \omega_{2,0} = 1, \omega_{3,0} = 1, \omega_{1,1} = 0, \omega_{2,1} = 50, \omega_{3,1} = 0$ 时, 两分量非局部 Schrödinger 方程的二阶孤子解 (a) $|q_1|$ 和 (c) $|q_2|$; (b) $|q_1|$ 沿 x 轴方向的波强度; (d) $|q_2|$ 沿 x 轴方向的波强度

图 5 (网络版彩图) 当参数选取 $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $\omega_{1,0} = 1$, $\omega_{2,0} = 1$, $\omega_{3,0} = 1$, $\omega_{4,0} = 1.4$ 时, 三分量非局部 Schrödinger 方程的一阶孤子解 (a) $|q_1|$ 、(b) $|q_2|$ 和 (c) $|q_3|$; (d)–(f) 分别表示 $|q_1|$ 、 $|q_2|$ 和 $|q_3|$ 沿 x 轴方向的波强度

图 6 (网络版彩图) 当参数选取 $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $\omega_{1,0} = 1$, $\omega_{2,0} = 1$, $\omega_{3,0} = 1$, $\omega_{4,0} = 6$ 时, 三分量非局部 Schrödinger 方程的一阶孤子解 (a) $|q_1|$ 、(b) $|q_2|$ 和 (c) $|q_3|$; (d)–(f) 分别表示 $|q_1|$ 、 $|q_2|$ 和 $|q_3|$ 沿 x 轴方向的波强度

图 7 (网络版彩图) 当参数选取 $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, \omega_{1,0} = 1, \omega_{2,0} = 1, \omega_{3,0} = 1, \omega_{4,0} = 1, \omega_{1,1} = 0, \omega_{2,1} = 0, \omega_{3,0} = 100, \omega_{4,0} = 0$ 时, 三分量非局部 Schrödinger 方程的二阶孤子解 (a) $|q_1|$ 、(b) $|q_2|$ 和 (c) $|q_3|$; (d)–(f) 分别表示 $|q_1|$ 、 $|q_2|$ 和 $|q_3|$ 沿 x 轴方向的波强度

图 8 (网络版彩图) 当参数选取 $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, \omega_{1,0} = 1, \omega_{2,0} = 1, \omega_{3,0} = 1, \omega_{4,0} = 1, \omega_{1,1} = 0, \omega_{2,1} = 0, \omega_{3,0} = 1,000, \omega_{4,0} = 0$ 时, 三分量非局部 Schrödinger 方程的二阶孤子解 (a) $|q_1|$ 、(b) $|q_2|$ 和 (c) $|q_3|$; (d)–(f) 分别表示 $|q_1|$ 、 $|q_2|$ 和 $|q_3|$ 沿 x 轴方向的波强度

3 结论与展望

本文证明了如何利用 Darboux 变换结合渐近展开式在多分量非局部非线性 Schrödinger 方程中推导出新的高阶有理孤子解. 这些有理的 N 阶孤子解可以用变量分离的形式表示出来. 通过选取合适的可控参数, 这些解能够展示一系列新颖和复杂的动态模式. 这些新的动态模式揭示了孤子理论中潜在的动力学行为, 并促进了人们对相应的非线性波现象的理解. 特别地, 方程 (2.1) 包含任意多分量组合, 以至于本文研究的成果相当广义. 因此, 散焦非局部非线性 Schrödinger 方程^[61] 和散焦非局部耦合非线性 Schrödinger 方程^[62] 等系统的解都可以通过约化方程 (2.1) 的解精确得到.

最后, 我们声明现在已经存在许多有效的方法来构造非局部非线性可积模型的精确解, 如 Wronskian 方法^[63]、dressing 方法^[64] 和反散射变换^[65] 等. 因此, 值得关注的是, 多分量非局部 Schrödinger 方程 (2.1) 是否可以用这些方法来求解? 这些问题留待今后进一步讨论.

致谢 作者们对审稿人、编委以及给予帮助的人表示感谢.

参考文献

- 1 Zakharov V E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J Appl Mech Tech Phys*, 1972, 9: 190–194
- 2 Agrawal G P. *Nonlinear Fiber Optics*. New York: Academic Press, 1995
- 3 Hasegawa A, Kodama Y. *Solitons in Optical Communications*. Oxford: Oxford University Press, 1995
- 4 Akhmediev N, Ankiewicz A. *Solitons: Nonlinear Pulses and Beams*. London: Chapman & Hall, 1997
- 5 Pitaevskii L, Stringari S. *Bose-Einstein Condensation*. Oxford: Oxford University Press, 2003
- 6 Yan Z Y. Financial rogue waves. *Commun Theor Phys (Beijing)*, 2010, 54: 947–949
- 7 Sulem C, Sulem P L. *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse*. New York: Springer, 1999
- 8 Fibich G. *The Nonlinear Schrödinger Equation: Singular Solutions and Optical Collapse*. New York: Springer, 2015
- 9 Zakharov V E, Shabat A B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov Phys JETP*, 1972, 34: 62–69
- 10 Ablowitz M J, Clarkson P A. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991
- 11 Xue B. New integrable models with N -peakons and algebro-geometric solutions of soliton equations (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2013, 43: 847–858 [薛波. 具有 N -peakon 的新可积模型与孤子方程的代数几何解. *中国科学: 数学*, 2013, 43: 847–858]
- 12 Matveev V B. *Darboux Transformations and Solitons*. New York: Springer-Verlag, 1991
- 13 Akhmediev N, Ankiewicz A, Taki M. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace. *Phys Lett A*, 2009, 373: 675–678
- 14 Kharif C, Pelinovsky E, Slunyaev A. *Rogue Waves in the Ocean*. Berlin: Springer, 2009
- 15 Peregrine D H. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions. *J Aust Math Soc Ser B Appl Math*, 1983, 25: 16–43
- 16 Akhmediev N, Ankiewicz A, Soto-Crespo J M. Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *Phys Rev E*, 2009, 80: 026601
- 17 Guo B, Ling L, Liu Q P. Nonlinear Schrödinger equation: Generalized Darboux transformation and rogue wave solutions. *Phys Rev E*, 2012, 85: 026607
- 18 Ankiewicz A, Akhmediev N, Soto-Crespo J M. Discrete rogue waves of the Ablowitz-Ladik and Hirota equations. *Phys Rev E*, 2010, 82: 026602
- 19 Qiu D, He J, Zhang Y, et al. The Darboux transformation of the Kundu-Eckhaus equation. *Proc R Soc A*, 2015, 471: 20150236
- 20 Bandelow U, Akhmediev N. Persistence of rogue waves in extended nonlinear Schrödinger equations: Integrable Sasa-Satsuma case. *Phys Lett A*, 2012, 376: 1558–1561
- 21 Chen S. Twisted rogue-wave pairs in the Sasa-Satsuma equation. *Phys Rev E*, 2013, 88: 023202
- 22 Mu G, Qin Z, Grimshaw R, et al. Intricate dynamics of rogue waves governed by the Sasa-Satsuma equation. *Phys D*, 2020, 402: 132252

- 23 Baronio F, Degasperis A, Conforti M, et al. Solutions of the vector nonlinear Schrödinger equations: Evidence for deterministic rogue waves. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 044102
- 24 Wang X B, Han B. Vector nonlinear waves in a two-component Bose-Einstein condensate system. *J Phys Soc Japan*, 2020, 89: 124003
- 25 Wang X B, Han B. The three-component coupled nonlinear Schrödinger equation: Rogue waves on a multi-soliton background and dynamics. *Europhys Lett*, 2019, 126: 15001
- 26 Mu G, Qin Z, Grimshaw R. Dynamics of rogue waves on a multisoliton background in a vector nonlinear Schrödinger equation. *SIAM J Appl Math*, 2015, 75: 1–20
- 27 Xu S, He J. The rogue wave and breather solution of the Gerdjikov-Ivanov equation. *J Math Phys*, 2012, 53: 063507
- 28 Wang X B, Tian S F, Zhang T T. Characteristics of the breather and rogue waves in a $(2+1)$ -dimensional nonlinear Schrödinger equation. *Proc Amer Math Soc*, 2018, 146: 3353–3365
- 29 Yu F J. Multi-rogue waves for the $(3+1)$ -dimensional coupled higherorder nonlinear Schrödinger equations in optical fiber (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2014, 44: 151–163 [于发军. $(3+1)$ -维耦合高阶非线性 Schrödinger 方程的光学多畸形波. *中国科学: 数学*, 2014, 44: 151–163]
- 30 Ohta Y, Yang J K. Rogue waves in the Davey-Stewartson I equation. *Phys Rev E*, 2012, 86: 036604
- 31 Kibler B, Fatome J, Finot C, et al. The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics. *Nat Phys*, 2010, 6: 790–795
- 32 Chabchoub A, Hoffmann N, Onorato M, et al. Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank. *Phys Rev E*, 2012, 86: 056601
- 33 Yang B, Yang J K. Rogue waves in the nonlocal $\mathcal{PT}$ -symmetric nonlinear Schrödinger equation. *Lett Math Phys*, 2019, 109: 945–973
- 34 Rao J G, Zhang Y S, Fokas A S, et al. Rogue waves of the nonlocal Davey-Stewartson I equation. *Nonlinearity*, 2018, 31: 4090–4107
- 35 Bender C M, Boettcher S. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$ symmetry. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 5243–5246
- 36 Bender C M, Brody D C, Jones H F. Complex extension of quantum mechanics. *Phys Rev Lett*, 2002, 89: 270401
- 37 Mostafazadeh A. Exact $\mathcal{PT}$ -symmetry is equivalent to Hermiticity. *J Phys A-Math Gen*, 2003, 36: 7081–7091
- 38 Yang J K. Partially $\mathcal{PT}$ symmetric optical potentials with all-real spectra and soliton families in multidimensions. *Opt Lett*, 2014, 39: 1133–1136
- 39 Kartashov Y V, Konotop V V, Torner L. Topological states in partially- $\mathcal{PT}$ -symmetric azimuthal potentials. *Phys Rev Lett*, 2015, 115: 193902
- 40 Beygi A, Klevansky S P, Bender C M. Coupled oscillator systems having partial $\mathcal{PT}$ symmetry. *Phys Rev A*, 2015, 91: 062101
- 41 Ablowitz M J, Musslimani Z H. Integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 064105
- 42 Ablowitz M J, Musslimani Z H. Integrable discrete $\mathcal{PT}$ symmetric model. *Phys Rev E*, 2014, 90: 032912
- 43 Khare A, Saxena A. Periodic and hyperbolic soliton solutions of a number of nonlocal nonlinear equations. *J Math Phys*, 2015, 56: 032104
- 44 Ablowitz M J, Musslimani Z H. Inverse scattering transform for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinearity*, 2016, 29: 915–946
- 45 Song C Q, Xiao D M, Zhu Z N. Solitons and dynamics for a general integrable nonlocal coupled nonlinear Schrödinger equation. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2017, 45: 13–28
- 46 Fokas A S. Integrable multidimensional versions of the nonlocal nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinearity*, 2016, 29: 319–324
- 47 Lou S Y, Huang F. Alice-Bob physics: Coherent solutions of nonlocal KdV systems. *Sci Rep*, 2017, 7: 869
- 48 Lou S Y. Alice-Bob systems, $\hat{P}$ - $\hat{T}$ - $\hat{C}$ symmetry invariant and symmetry breaking soliton solutions. *J Math Phys*, 2018, 59: 083507
- 49 Rao J G, Cheng Y, He J S. Rational and semirational solutions of the nonlocal Davey-Stewartson equations. *Stud Appl Math*, 2017, 139: 568–598
- 50 Ma W X. Inverse scattering and soliton solutions of nonlocal reverse-spacetime nonlinear Schrödinger equations. *Proc Amer Math Soc*, 2021, 149: 251–263
- 51 Kevrekidis P G, Frantzeskakis D J. Solitons in coupled nonlinear Schrödinger models: A survey of recent developments. *Rev Phys*, 2016, 1: 140–153
- 52 Bashkin E P, Vagov A V. Instability and stratification of a two-component Bose-Einstein condensate in a trapped ultracold gas. *Phys Rev B*, 1997, 56: 6207–6212
- 53 Ablowitz M J, Horikis T P. Interacting nonlinear wave envelopes and rogue wave formation in deep water. *Phys Fluids*, 2015, 27: 012107

- 54 Kivshar Y S, Agrawal G P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. San Diego: Academic Press, 2003
- 55 Kartashov Y V, Astrakharchik G E, Malomed B A, et al. Frontiers in multidimensional self-trapping of nonlinear fields and matter. Nat Rev Phys, 2019, 1: 185–197
- 56 Scott A C. Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures. Oxford: Oxford University Press, 1999
- 57 Bailung H, Nakamura Y. Observation of modulational instability in a multi-component plasma with negative ions. J Plasma Phys, 1993, 50: 231–242
- 58 Bailung H, Sharma S K, Nakamura Y. Observation of peregrine solitons in a multicomponent plasma with negative ions. Phys Rev Lett, 2011, 107: 255005
- 59 Agrawal G P. Nonlinear Fiber Optics. New York: Academic Press, 2013
- 60 Rao J G, He J, Kanna T, et al. Nonlocal M -component nonlinear Schrödinger equations: Bright solitons, energy-sharing collisions, and positons. Phys Rev E, 2020, 102: 032201
- 61 Zhang G, Yan Z, Chen Y. Novel higher-order rational solitons and dynamics of the defocusing integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation via the determinants. Appl Math Lett, 2017, 69: 113–120
- 62 Zhang G, Yan Z. Multi-rational and semi-rational solitons and interactions for the nonlocal coupled nonlinear Schrödinger equations. Europhys Lett, 2017, 118: 60004
- 63 Ma W X, You Y. Solving the Korteweg-de Vries equation by its bilinear form: Wronskian solutions. Trans Amer Math Soc, 2005, 357: 1753–1778
- 64 Lenells J. Dressing for a novel integrable generalization of the nonlinear Schrödinger equation. J Nonlinear Sci, 2010, 20: 709–722
- 65 Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, et al. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. Phys Rev Lett, 1967, 19: 1095–1097

附录 A

定理 A.1 设 $\Psi(\lambda)|_{\lambda=\lambda_1(1+\epsilon)}$ 是 Lax 系统 (2.2) 关于谱参数 $\lambda_1(1+\epsilon)$ 和种子解 $(q_1[0], q_2[0], \dots, q_n[0])^T$ 对应的一个解. 如果 $\Psi(\lambda)$ 在 λ_1 处的展开式为

$$\Psi(\lambda)|_{\lambda=\lambda_1(1+\epsilon)} = \Psi_0\epsilon + \Psi_1\epsilon + \Psi_2\epsilon^2 + \dots, \quad (\text{A.1})$$

其中,

$$\begin{aligned} \Delta[n] &= \begin{pmatrix} \varphi_1[n] \\ \varphi_2[n] \\ \vdots \\ \varphi_{n+1}[n] \end{pmatrix} = \lambda_1 \Delta[n-1] + \mathbf{T}[n] \Upsilon[n-1], \quad n \geq 1, \\ \Delta[0] &= \begin{pmatrix} \varphi_1[0] \\ \varphi_2[0] \\ \vdots \\ \varphi_{n+1}[0] \end{pmatrix} = \Psi_0, \\ \Upsilon[n-1] &= \Delta[n-1](\Psi_j \rightarrow \Psi_{j+1}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

以及

$$\begin{cases} \mathbf{T}[n] = (\lambda_1 + \bar{\lambda}_1) \mathbf{I} - (\bar{\lambda}_1 + \lambda_1) \mathbf{P}[n], \\ \mathbf{P}[n] = \frac{\Delta[n-1] \Delta^\dagger[n-1](-x, t)}{\Delta^\dagger[n-1](-x, t) \Delta[n-1]} \end{cases}$$

是 Lax 系统 (2.2) 关于同一个谱参数 λ_1 和种子解 $\mathbf{q}[n-1] = (q_1[n-1], q_2[n-1], \dots, q_n[n-1])^T$ 所对应的解, 则

$$\begin{pmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ \vdots \\ q_n[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1[n-1] \\ q_2[n-1] \\ \vdots \\ q_n[n-1] \end{pmatrix} - 2(\bar{\lambda}_1 + \lambda_1)\bar{\varphi}_1[n-1](-x, t) \begin{pmatrix} \varphi_2[n-1] \\ \varphi_3[n-1] \\ \vdots \\ \varphi_{n+1}[n-1] \end{pmatrix} \bigg/ \sum_{j=1}^{n+1} \varphi_j[n-1]\bar{\varphi}_j[n-1](-x, t).$$

证明 首先介绍一些准备工作. 符号 $\Delta[n](\Psi_j \rightarrow \Psi_{j+1})$ 表示 Ψ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 由 Ψ_{j+1} 替换, 但是 $\mathbf{T}[j]$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 在 $\Delta[n]$ 中保持不变. 此外, 需要引入如下符号:

$$\Phi[N] = \Upsilon[N](\Psi_j \rightarrow \Psi_{j+1}).$$

$\Upsilon[N](\Psi_j \rightarrow \Psi_{j+1})$ 与 $\Delta[n](\Psi_j \rightarrow \Psi_{j+1})$ 一样. 下面用两个简单例子来说明上述符号: 对于 $n = 0$, 有 $\Delta[0] = \Psi_0$, $\Upsilon[0] = \Psi_1$ 和 $\Phi[0] = \Psi_2$. 对于 $n = 1$, 有 $\Delta[1] = \lambda_1 \Delta[0] + \mathbf{T}[1]\Psi_1 = \lambda_1 \Psi_0 + \mathbf{T}[1]\Psi_1$, $\Upsilon[1] = \lambda_1 \Upsilon[0] + \mathbf{T}[1]\Phi[0] = \lambda_1 \Psi_1 + \mathbf{T}[1]\Psi_1$ 和 $\Phi[1] = \lambda_1 \Psi_2 + \mathbf{T}[1]\Psi_3$. 通常情形下, 需要运用迭代关系 (A.2) 和展开式

$$\mathbf{P}(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda_1 + \mathbf{T}[j]) = \sum_{j=0}^n f_j \lambda_1^{n-j} = \sum_{j=0}^n g_j,$$

其中

$$\begin{cases} g_j = \lambda_1^{n-j} f_j, & j = 0, 1, \dots, n, \\ f_0 = 1, & f_1 = \sum_{j=1}^n \mathbf{T}[j], & f_n = \mathbf{T}[n]\mathbf{T}[n-1] \cdots \mathbf{T}[1]. \end{cases}$$

$\Delta[n]$ 可用精确形式表示为 $\Delta[n] = \sum_{j=0}^n g_j \Psi_j$. 于是可得到

$$\Upsilon[n] = g_0 + g_1 \Psi_2 + g_2 \Psi_3 + \cdots + g_n \Psi_{n+1}, \quad \Phi[n] = g_0 \Psi_2 + g_1 \Psi_3 + g_2 \Psi_4 + \cdots + g_n \Psi_{n+2}.$$

将 (A.1) 代入 (2.2) 中并设定 ϵ^j ($j = 0, 1, 2, \dots$) 的系数为 0, 可得

$$\Psi_{0x} = \mathbf{U}_0 \Psi_0, \quad \Psi_{jx} = \mathbf{U}_0 \Psi_j + i\lambda_1 \sigma_3 \Psi_{j-1}, \quad j \geq 1 \quad (\text{A.3})$$

和

$$\begin{aligned} \Psi_{0t} &= \mathbf{V}_0 \Psi_0, \\ \Psi_{1t} &= \mathbf{V}_0 \Psi_1 + (2i\lambda_1^2 \sigma_3 + 2\lambda_1 Q_0) \Psi_0, \\ \Psi_{jt} &= \mathbf{V}_0 \Psi_j + (2i\lambda_1^2 \sigma_3 + 2\lambda_1 Q_0) \Psi_{j-1} + i\lambda_1^2 \sigma_3 \Psi_{j-2}, \quad j \geq 2, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

以及

$$\mathbf{U}_0 = i\lambda_1 \sigma_3 + Q_0, \quad \mathbf{V}_0 = i\lambda_1 (\lambda_1 \sigma_3 + Q_0) + \frac{1}{2} \sigma_3 (Q_{0x} - iQ_0^2).$$

根据 (A.3) 和 (A.4) 的第一个方程可得 $\Delta[0] = \Psi_0$ 是线性系统 (2.2) 关于 (p_0, q_0) 和 $\lambda = \lambda_1$ 的一个解. 因此, 可得到如下的 Darboux 变换:

$$\Psi[1] = \mathbf{T}[1]\Psi, \quad \mathbf{T}[1] = (\lambda_1 + \bar{\lambda}_1)\mathbf{I} - (\bar{\lambda}_1 + \lambda_1)\mathbf{P}[1]$$

和

$$\mathbf{P}[0] = \frac{\Delta[0]\Delta^\dagger[0](-x, t)}{\Delta^\dagger[0](-x, t)\Delta[0]},$$

以及

$$\mathbf{T}|_{\lambda=\lambda_1}\Delta[0] = \mathbf{T}[1]\Psi_0 = 0.$$

于是方程 (2.1) 对应的解可表示为

$$\begin{pmatrix} q_1[1] \\ q_2[1] \\ \vdots \\ q_n[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1[0] \\ q_2[0] \\ \vdots \\ q_n[0] \end{pmatrix} - 2(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1)\bar{\varphi}_1[0](-x, t) \begin{pmatrix} \varphi_2[0] \\ \varphi_3[0] \\ \vdots \\ \varphi_{n+1}[0] \end{pmatrix} \bigg/ \sum_{j=1}^{n+1} \varphi_j[0]\bar{\varphi}_j[0](-x, t),$$

进而可得到上述定理在 $n = 0$ 时成立. 当 $n \geq 1$ 时, 利用数学归纳法, 可完成上述定理的证明. $\square$

Exotic localized vector waves in the multicomponent nonlinear integrable systems

Xiu-Bin Wang, Yong Chen, Bo Han & Shou-Fu Tian

Abstract In this paper, general higher-order rational solutions of the nonlocal multicomponent nonlinear Schrödinger equations are derived by using a method of Darboux-dressing transformation with an asymptotic expansion. When the free parameters satisfy some constraints, the dynamics of those solutions in the nonlocal systems are discussed with some graphics. They demonstrate that the structure of localized waves in this multicomponent nonlocal system is richer than that in a one-component nonlocal system. More importantly, the results may be useful to explain and enrich the corresponding wave phenomena in local wave models.

Keywords integrable system, Darboux transformation, variable separation technique, solitons

MSC(2020) 35Q55, 35Q51, 35P30, 81Q05

doi: 10.1360/SSM-2021-0096