

特征 2 的除环上 Hermitian 矩阵几何

黄礼平

长沙理工大学数学与计算科学学院, 长沙 410114
E-mail: lipingmath@sohu.com, lipingmath@163.com

收稿日期: 2010-09-02; 接受日期: 2011-08-17
湖南省教育厅资助 (批准号: 10A002) 科研项目

摘要 设 D 是带对合的除环. 当 $\text{char}(D) \neq 2$ 时, D 上 Hermitian 矩阵几何的基本定理最近已经证明. 作者进一步证明了特征 2 的带对合的除环上 Hermitian 矩阵几何的基本定理, 从而得到任意带对合的除环上 Hermitian 矩阵几何的基本定理.

关键词 带对合的除环 矩阵几何 Hermitian 矩阵

MSC (2000) 主题分类 15A57, 51D20

1 引言

矩阵几何研究由华罗庚开创^[1-5], 并且华的工作由很多学者继续^[3-21]. 矩阵几何的基本问题是刻画关于矩阵加法群的粘切性保持双射. 关于 Hermitian 矩阵几何的研究, 华罗庚^[1]在 1945 年讨论了复数域上的 Hermitian 矩阵几何, 万哲先^[6-9]在 1994-1996 年证明了满足一定条件的除环上 Hermitian 矩阵几何的基本定理. 最近, 我们^[10-14]证明了特征不等于 2 的除环上 Hermitian 矩阵几何的基本定理. 论文 [15] 还刻画了关于复数域上 Hermitian 矩阵空间的粘切性保持映射.

对于特征 2 的带对合的除环 (体), 其 Hermitian 矩阵几何的基本定理仍是一个公开问题. 本文解决了这个问题, 因此得到任意带对合的除环上 Hermitian 矩阵几何的基本定理.

在本文中, 设 $D = (D, -)$ 是一个带对合 $-$ (阶为 2 的反自同构) 的除环, Z 为 D 的中心域, $\text{char}(D)$ 为 D 的特征. 用 $(\frac{a}{Z})$ 表示特征不等于 2 的域 Z 上的四元数可除 (结合) 代数, 其中 $a, b \in Z^*$. 设

$$F(D, -) = \{a \in D : a = \bar{a}\}, \quad K(D, -) = \{a \in D : a = -\bar{a}\}, \quad (1.1)$$

分别简记 $F(D, -)$ 和 $K(D, -)$ 为 F 和 K . 设子集 $X \subseteq D$, 用 $|X|$ 表示 X 的势, X^* 表示 X 中的可逆元集合. 设 $\mathbb{F}_2$ 是仅有两个元素的有限域.

设 $D^{m \times n}$ 是 D 上 $m \times n$ 矩阵的集合, $D^n = D^{1 \times n}$. 用 $GL_n(D)$ 表示 D 上 $n \times n$ 可逆矩阵的集合. 设 $A = (a_{ij}) \in D^{m \times n}$, 记 ${}^t A = (a_{ji})$ 为 A 的转置矩阵. 若 $\sigma : D \rightarrow D'$ 是一个映射, 我们定义 $A^\sigma = (a_{ij}^\sigma)$. 设 $A \in D^{n \times n}$, 若 $A = {}^t \bar{A}$, 则称 A 为关于对合 $-$ 的 Hermitian 矩阵, 用 $\mathcal{H}_n(D, -)$ (简记 $\mathcal{H}_n(D)$) 表示 D 上关于对合 $-$ 的所有 $n \times n$ Hermitian 矩阵的集合. 若 $D = F$, 则 D 是一个域, $-$ 是恒等映射. 当 $D = F$ 时, 通常用 $\mathcal{S}_n(F)$ 表示 $\mathcal{H}_n(D)$, 称其为域 F 上 $n \times n$ 对称矩阵的集合. 显然, $\mathcal{H}_n(D)$ 是域 $Z \cap F$ 上的线性空间, 它的元素称为点. 所有以下形式的双射

$$X \mapsto {}^t \bar{P} X P + H_0, \quad \forall X \in \mathcal{H}_n(D), \quad (1.2)$$

其中 $P \in GL_n(D)$ 和 $H_0 \in \mathcal{H}_n(D)$, 构成 $\mathcal{H}_n(D)$ 的一个变换群.

设 $A, B \in \mathcal{H}_n(D)$, 定义 $\text{ad}(A, B) = \text{rank}(A - B)$ 为 A 与 B 之间的算术距离. 当 $\text{ad}(A, B) = 1$ 时, 称 A 与 B 粘切, 记作 $A \sim B$. 设 $D' = (D', *)$ 与 $D = (D, -)$ 分别是带对合 $*$ 与 $-$ 的除环. 一个映射 $\varphi: \mathcal{H}_m(D', *) \rightarrow \mathcal{H}_m(D, -)$ 称为粘切性保持映射, 如果对所有的 $A, B \in \mathcal{H}_m(D', *)$, $A \sim B$ 推出 $\varphi(A) \sim \varphi(B)$.

引理 1.1 (见 [12] 中的定理 1.2) 设 D 是一个带对合 $-$ 的除环, φ 是从 $\mathcal{H}_n(D)$ ($n \geq 2$) 到它自身的粘切性保持双射, 则 φ^{-1} 也是粘切性保持双射, 并且当 $\mathcal{H}_n(D) \neq \mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$ 时, φ 保持算术距离不变.

本文结构如下: 在第 2 节中, 我们介绍 $\mathcal{H}_n(D)$ 中的秩 1 和秩 2 极大集, 并给出几个引理; 在第 3 节中, 我们证明特征 2 的带对合除环上 2×2 Hermitian 矩阵几何的基本定理, 并给出文献 [14] 中定理 3.2 的证明中的一个跳步的修补; 在第 4 节中, 我们证明特征 2 的带对合除环上 $n \times n$ ($n \geq 3$) Hermitian 矩阵几何的基本定理; 在第 5 节中, 我们给出任意带对合除环上 Hermitian 矩阵几何的基本定理.

2 极大集和引理

在本节中, 设 D 是一个带对合 $-$ 的除环, $F = F(D, -)$. 令 $E_{ij}^{(n)}$ (简记为 E_{ij}) 是 (i, j) 位置元素为 1 而其他位置元素全为 0 的 n 阶矩阵, $D_{ij}(x) = xE_{ij}^{(n)} + \bar{x}E_{ji}^{(n)}$, 其中 $x \in D$, $i \neq j$. 显然有 $D_{ij}(x) = D_{ji}(\bar{x})$. 用 I_r 表示 r 阶单位矩阵, 0_r 表示 r 阶零矩阵.

设 $\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$, 令

$$\mathcal{H}_n[\alpha] = \left\{ \sum_{1 \leq s, t \leq r} x_{i_s i_t} E_{i_s i_t}^{(n)} : x_{i_s i_t} = \overline{x_{i_t i_s}} \in D \right\}, \quad (2.1)$$

其中 $\alpha = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \langle n \rangle$, $i_1 < \dots < i_r$, 则 $\mathcal{H}_n[\alpha] \subseteq \mathcal{H}_n(D)$. 记 ${}^t\overline{Q}(\mathcal{H}_n[\alpha])Q = \{{}^t\overline{Q}XQ : X \in \mathcal{H}_n[\alpha]\}$, 其中 $Q \in GL_n(D)$.

设

$$\mathcal{M}_i = \{xE_{ii}^{(n)} : x \in F\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{M}_{1j} = \{xE_{11}^{(n)} + D_{1j}(x) + xE_{jj}^{(n)} : x \in F\}, \quad j = 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

则 $\mathcal{H}_n[\{i\}] = \mathcal{M}_i$ 和 $\mathcal{H}_n[\{1, j\}] \supseteq \mathcal{M}_{1j}$.

下列定义和命题平行于文献 [3, 13, 14, 16] 中所述, 我们略去其证明.

定义 2.1 $\mathcal{H}_n(D)$ 中的一个非空子集 $\mathcal{M}$ 称为一个秩 1 极大集, 如果 $\mathcal{M}$ 中的任意两个不同的点均粘切, 并且与 $\mathcal{M}$ 中所有的点都粘切的点必在 $\mathcal{M}$ 中.

引理 2.2^[13, 14] 在 $\mathcal{H}_n(D)$ 中, 所有的 $\mathcal{M}_i$ ($i = 1, \dots, n$) 和 $\mathcal{M}_{1j}$ ($j = 2, \dots, n$) 都是秩 1 极大集. 并且每个秩 1 极大集 $\mathcal{M}$ 可写成下列形式

$$\mathcal{M} = \{{}^t\overline{P}XP + H_0 : X \in \mathcal{M}_1\} := {}^t\overline{P}\mathcal{M}_1P + H_0, \quad (2.4)$$

其中 $P \in GL_n(D)$ 和 $H_0 \in \mathcal{H}_n(D)$ 是固定的.

引理 2.3^[13, 14] 在 $\mathcal{H}_n(D)$ 中, 如果 H_1 和 H_2 是两个粘切的点, 则存在一个惟一的秩 1 极大集包含它们.

引理 2.4^[13,14] 在 $\mathcal{H}_n(D)$ 中, 如果两个秩 1 极大集的交集是非空的, 则它们的交集仅有一个点.

引理 2.5 (见 [13] 的定理 3.9) 设 D 是带对合 $-$ 的除环且 $|F| \geq 3$, n 是 ≥ 2 的整数, $\varphi: \mathcal{H}_n(D) \rightarrow \mathcal{H}_n(D)$ 是粘切性保持双射且 $\varphi(0) = 0$. 则存在固定的 $P \in GL_n(D)$ 使得

$$\varphi(\mathcal{M}_i) = {}^t\overline{P}\mathcal{M}_iP, \quad \varphi(\mathcal{M}_{1j}) = {}^t\overline{P}\mathcal{M}_{1j}P, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

$$\varphi(\mathcal{H}_n[\alpha]) = {}^t\overline{P}(\mathcal{H}_n[\alpha])P, \quad \forall \alpha \subseteq \langle n \rangle. \quad (2.6)$$

对 $1 \leq i \leq n$, 令

$$\mathcal{L}_i = \left\{ x_{ii}E_{ii}^{(n)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n D_{ij}(x_{ij}) : x_{ii} \in F, x_{ij} \in D, j \neq i \right\}, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}_{1j} = {}^t(I_n + E_{1j}^{(n)})\mathcal{L}_1(I_n + E_{1j}^{(n)}), \quad j = 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

则

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_{1j} = \{(x + \overline{x})E_{11} + D_{1j}(x) : x \in D\}, \quad j = 2, \dots, n, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{L}_j \cap \mathcal{L}_{1j} = \{(x + \overline{x})E_{jj} + D_{1j}(x) : x \in D\}, \quad j = 2, \dots, n, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j = \{D_{ij}(x) : x \in D\}, \quad i \neq j. \quad (2.11)$$

定义 2.6 $\mathcal{H}_n(D)$ 的子集 $\mathcal{L}$ 称为一个秩 2 极大集, 如果 $\mathcal{L}$ 满足下列条件:

- (i) $\mathcal{L}$ 包含一个秩 1 极大集 $\mathcal{M}$;
- (ii) 任取 $H \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{M}$ 与 $T \in \mathcal{M}$, $\text{ad}(H, T) = 2$;
- (iii) 设 $H \in \mathcal{H}_n(D)$, 如果对所有的 $T \in \mathcal{M}$, 都有 $\text{ad}(H, T) = 2$, 则 $H \in \mathcal{L}$.

由引理 1.1 和定义 2.6, 显然有

推论 2.7 设 D 是带对合的除环且 $|F| \geq 3$, 若 φ 是从 $\mathcal{H}_n(D)$ 到它自身的粘切性保持双射, 则 φ 将秩 2 极大集映射为秩 2 极大集.

引理 2.8^[3,13,14,16] 在 $\mathcal{H}_n(D)$ 中, 所有的 $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, \dots, n$) 和 $\mathcal{L}_{1j}$ ($j = 2, \dots, n$) 都是秩 2 极大集, 并且每个秩 2 极大集 $\mathcal{L}$ 可写成下列形式

$$\mathcal{L} = \{{}^t\overline{P}XP + H_0 : X \in \mathcal{L}_1\} := {}^t\overline{P}\mathcal{L}_1P + H_0, \quad (2.12)$$

其中 $P \in GL_n(D)$ 和 $H_0 \in \mathcal{H}_n(D)$ 是固定的.

引理 2.9^[3,13,14,16] 在 $\mathcal{H}_n(D)$ 中, 每个秩 1 极大集包含在惟一的秩 2 极大集中. 包含 $\mathcal{M}_1$ 的惟一的秩 2 极大集是 $\mathcal{L}_1$.

引理 2.10^[3,13,14,16] 如果 $\mathcal{L}$ 是秩 2 极大集, $H_0 \in \mathcal{L}$. 则在 $\mathcal{L}$ 中, 存在包含 H_0 的惟一的秩 1 极大集.

令

$$\mathcal{L}_i^{(0)} = \{X : X = (x_{st}) \in \mathcal{L}_i, x_{ii} = 0\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

引理 2.11 (见 [13] 中命题 4.5) 设 D 是带对合的除环且 $|F| \geq 3$. 若 φ 是从 $\mathcal{H}_n(D)$ ($n \geq 3$) 到它自身的粘切性保持双射, 并且 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\mathcal{L}_i) = \mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, n$. 则

$$\varphi(\mathcal{L}_i^{(0)}) = \mathcal{L}_i^{(0)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

引理 2.12 (见 [13] 中命题 4.6) 设 D 是带对合的除环且 $|F| \geq 3$, n 是 ≥ 3 的整数, φ 是从 $\mathcal{H}_n(D)$ 到它自身的粘切性保持双射, 并且 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\mathcal{L}_i) = \mathcal{L}_i$, $1 \leq i \leq n$. 则任取非零的 $(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n) \in D^{n-1}$ 和 $H \in \mathcal{L}_i^{(0)}$, 存在非零的 $(p'_1, \dots, p'_{i-1}, p'_{i+1}, \dots, p'_n) \in D^{n-1}$, 使得

$$\varphi\left(\left\{\sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}(xp_j) + H : x \in D\right\}\right) = \left\{\sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}(xp'_j) + \varphi(H) : x \in D\right\}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.15)$$

对 $1 \leq i \leq n$ ($n \geq 3$), $\mathcal{L}_i^{(0)}$ 是 D 上的 $(n-1)$ 维左向量空间, 因此有左仿射几何 $AG(\mathcal{L}_i^{(0)})$, 并且 $AG(\mathcal{L}_i^{(0)})$ 和 $AG(D^{n-1})$ 是仿射同构的. 在 $AG(\mathcal{L}_i^{(0)})$ 中, 线的参数方程是公式 (2.15) 中的集合. 如果 φ 是从 $\mathcal{L}_i^{(0)}$ 到它自身的将线变到线的双射, 并且当 $D = \mathbb{F}_2$ 时 φ 将面变到面, 则称 φ 为从 $\mathcal{L}_i^{(0)}$ 到它自身的一个直射. 由除环上仿射几何基本定理 [3,16], 直射是半线性映射.

引理 2.13 设 D 是带对合的除环且 $|F| \geq 3$, n 是大于或等于 3 的整数, φ 是从 $\mathcal{H}_n(D)$ 到它自身的粘切性保持双射, 并且 $\varphi(0) = 0$ 和 $\varphi(\mathcal{L}_i) = \mathcal{L}_i$ ($1 \leq i \leq n$). 则

$$\varphi\left(\sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}(x_{ij})\right) = \sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}(x_{ij}^{\sigma_i} q_{ij}), \quad \forall x_{ij} \in D, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.16)$$

其中 σ_i 是 D 的自同构, $q_{ij} \in D^*$, $1 \leq i, j \leq n$, $j \neq i$. 并且所有的 q_{ij} 和 σ_i 是固定的.

证明 我们仅仅证明 $i = 1$ 的情形; $i > 1$ 的情形是类似的. 回忆 $\mathcal{L}_1^{(0)} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & X \\ \iota_X^* & 0 \end{pmatrix} : X \in D^{n-1}\right\}$. 由引理 2.11, 2.12 和仿射几何基本定理 [3,16], φ 诱导出从 $\mathcal{L}_1^{(0)}$ 到它自身的半线性映射. 设 $\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & X \\ \iota_X^* & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & X^* \\ \iota_{X^*}^* & 0 \end{pmatrix}$, $X \in D^{n-1}$. 则对所有的 $X \in D^{n-1}$, $X^* = X^{\sigma_1} P_1$. 其中 σ_1 是 D 的自同构, $P_1 \in GL_{n-1}(D)$. 由 (2.11) 和 $\varphi(\mathcal{L}_i) = \mathcal{L}_i$, 对所有的 $x \in D$, $j = 2, \dots, n$, 有 $\varphi(D_{1j}(x)) = D_{1j}(x^*)$. 因此易知 $P_1 = \text{diag}(q_{12}, \dots, q_{1n})$ 是对角矩阵. 则 $\varphi(\sum_{j=2}^n D_{1j}(x_{1j})) = \sum_{j=2}^n D_{1j}(x_{1j}^{\sigma_1} q_{1j})$, $\forall x_{1j} \in D$. 证毕.

3 特征 2 的除环上 2×2 Hermitian 矩阵几何

引理 3.1 (见 [10] 中的定理 1.1 和推论 1.2) 设 D 是带对合 $-$ 的除环, $F = \{a \in D : a = \bar{a}\}$, Z 是 D 的中心域. 如果 F 是 D 的真子域且 $F \subseteq Z$, 则我们有

- (i) 当 $\text{char}(D) \neq 2$ 时, D 是 F 的可离二次扩域, 或 $D = \left(\frac{a, b}{Z}\right)$;
- (ii) 当 $\text{char}(D) = 2$ 时, D 是 F 的可离二次扩域;
- (iii) 迹映射 $\text{Tr}: D \rightarrow F$, $a \mapsto a + \bar{a}$ 是满射.

引理 3.2 (见 [13] 中的定理 2.4) 如果 D 是带对合 $-$ 的除环并且 $|F| = 2$ 或 $|K| = 2$, 则 $D = \mathbb{F}_2$ 或 D 是 $\mathbb{F}_2$ 的可离二次扩域.

由引理 1.1, 引理 3.1 和 [3] 中的定理 6.4, 我们有

引理 3.3 [3] 设 D 是带对合 $-$ 的除环, $F = \{a \in D : a = \bar{a}\}$, Z 是 D 的中心域, n 是大于或等于 2 的整数. 假设 F 是 D 的真子域且 $F \subseteq Z$, $\varphi: \mathcal{H}_n(D) \rightarrow \mathcal{H}_n(D)$ 是粘切性保持双射, 则 φ 形如

$$\varphi(X) = a^t \bar{P} X^\sigma P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_n(D), \quad (3.1)$$

其中 $a \in F^*$, $P \in GL_n(D)$ 是固定的, σ 是 D 的自同构且 σ 与对合 $-$ 可交换.

当 $D = F$ 时, F 是域且 $\mathcal{H}_n(D) = \mathcal{S}_n(F)$, 我们有以下域上对称矩阵几何的基本定理.

定理 3.4 ^[3] 设 F 是域, n 是 ≥ 2 的整数, $\varphi: \mathcal{S}_n(F) \rightarrow \mathcal{S}_n(F)$ 是粘切性保持双射. 则当 $\mathcal{S}_n(F) \neq \mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$ 时, φ 形如

$$\varphi(X) = d^t P X^\sigma P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{S}_n(F), \quad (3.2)$$

其中 $d \in F^*$, $P \in GL_n(F)$, σ 是 F 的自同构. 当 $\mathcal{S}_n(F) = \mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$ 时, 还有另外一个从 $\mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$ 到它自身的粘切性保持双射

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ x_{13} & 0 & x_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ x_{13} & 0 & x_{33} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 1 \\ x_{13} & 1 & x_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{11}+1 & x_{12}+1 & x_{13}+1 \\ x_{12}+1 & x_{22} & 1 \\ x_{13}+1 & 1 & x_{33} \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \quad (3.3)$$

并且 φ 是形如 (3.2) 与形如 (3.3) 的双射之积. 反之, 形如 (3.2) 和 (3.3) (仅当 $n=3$ 和 $D=\mathbb{F}_2$ 时) 的映射均为粘切性保持双射.

注 3.5 当 F 是复数域且 φ 满足一定条件时, 上述定理由华罗庚 ^[1] 在 1945 年证明. 应用极大集方法, 除了 $n=2$ 且 $\text{char}(F)=2$ 的情形外, 定理 3.4 由万哲先 ^[3,6,7] 证明. $n=2$ 且 $\text{char}(F)=2$ 的情形后来由 [17] 证明. 文献 [20] 去掉了定理 3.4 的初始版本中的条件 “ φ^{-1} 保持粘切性”.

定义 3.6 ^[14] 设 D 是带对合 $-$ 的除环. 一个双射 $\sigma: D \rightarrow D$ 称为 D 的一个拟自同构, 如果 σ 满足下列条件: 任取 $x \in F^*$, $y, z \in D$, $(x+y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$, $\overline{y^\sigma} = (\overline{y})^\sigma$, $[(\overline{y} + \overline{z})x^{-1}(y+z)]^\sigma = (\overline{y^\sigma} + \overline{z^\sigma})(x^\sigma)^{-1}(y^\sigma + z^\sigma)$.

如果 σ 是 D 的拟自同构, 则有 $0^\sigma = 0$, $(-x)^\sigma = -x^\sigma$, $x \in D$.

引理 3.7 (见 [14] 中的定理 4.3) 设 D 是带对合 $-$ 的除环并且 D 不是域, Z 是 D 的中心域, $F = \{a \in D : a = \overline{a}\}$. 设 σ 是 D 的拟自同构, $d = (1^\sigma)^{-1} \in F^*$. 定义映射 $\tau: D \rightarrow D$ 为 $x^\tau = dx^\sigma$, $\forall x \in D$. 若 $D \neq (\frac{a,b}{Z})$ 或 $Z \neq F$, 则 τ 是 D 的自同构, 并且 $\overline{x^\tau} = d^{-1}(\overline{x})^\tau d$, $\forall x \in D$.

在 $\mathcal{H}_2(D, -)$ 中, 有

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \overline{y} & 0 \end{pmatrix} : x \in F, y \in D \right\}, \quad \mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ \overline{y} & x \end{pmatrix} : x \in F, y \in D \right\},$$

$$\mathcal{M}_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in F \right\}, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x+y \\ x+\overline{y} & x+y+\overline{y} \end{pmatrix} : x \in F, y \in D \right\}, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} y+\overline{y} & y \\ \overline{y} & 0 \end{pmatrix} : y \in D \right\}, \quad \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ \overline{y} & y+\overline{y} \end{pmatrix} : y \in D \right\}. \quad (3.6)$$

现在我们给出本节的主要结果如下.

定理 3.8 设 D 是带对合 $-$ 的除环且 $|F| \geq 3$, 其中 $F = \{a \in D : a = \bar{a}\}$. 若 $\varphi : \mathcal{H}_2(D) \rightarrow \mathcal{H}_2(D)$ 是粘切性保持双射, 则 φ 形如

$$\varphi(X) = {}^t \bar{P} X^\sigma P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_2(D), \quad (3.7)$$

其中 $P \in GL_2(D)$ 是固定的, σ 是 D 的拟自同构.

证明 由引理 1.1, φ 保持算术距离不变, 因此 φ 分别将秩 1 和秩 2 极大集映射为秩 1 和秩 2 极大集. 由引理 2.5 和 2.9, 置换 φ 由双射 $\varphi \mapsto {}^t \bar{P}^{-1}(\varphi - \varphi(0))P^{-1}$, 其中 $P \in GL_2(D)$, 我们有 $\varphi(0) = 0$,

$$\varphi(\mathcal{M}_i) = \mathcal{M}_i, \quad \varphi(\mathcal{M}_{12}) = \mathcal{M}_{12}, \quad i = 1, 2, \quad (3.8)$$

$$\varphi(\mathcal{L}_i) = \mathcal{L}_i, \quad \varphi(\mathcal{L}_{12}) = \mathcal{L}_{12}, \quad i = 1, 2. \quad (3.9)$$

因此有

$$\varphi(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{D_{12}(y) : y \in D\}, \quad (3.10)$$

$$\varphi(\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_{12}) = \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_{12}, \quad i = 1, 2. \quad (3.11)$$

由 (3.10), 定义双射 $\sigma : D \rightarrow D$ 为

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 & y \\ \bar{y} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y^\sigma \\ \bar{y}^\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad y \in D. \quad (3.12)$$

由 $\varphi(0) = 0, 0^\sigma = 0$. 因为 φ 保持粘切性, 由 (3.11), (3.6) 推出

$$\varphi \begin{pmatrix} y + \bar{y} & y \\ \bar{y} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^\sigma + \bar{y}^\sigma & y^\sigma \\ \bar{y}^\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 & y \\ \bar{y} & y + \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y^\sigma \\ \bar{y}^\sigma & y^\sigma + \bar{y}^\sigma \end{pmatrix}, \quad \forall y \in D. \quad (3.13)$$

类似于 [14] 中定理 3.2 的证明, 存在双射 $\delta : F \rightarrow F, 0^\delta = 0$ 使得

$$\varphi \begin{pmatrix} x & x + y \\ x + \bar{y} & x + y + \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\delta & x^\delta + y^\sigma \\ x^\delta + \bar{y}^\sigma & x^\delta + y^\sigma + \bar{y}^\sigma \end{pmatrix}, \quad \forall x \in F, y \in D, \quad (3.14)$$

并且

$$\bar{y}^\sigma = -(-\bar{y})^\sigma, \quad \forall y \in D. \quad (3.15)$$

由 $\varphi(\mathcal{M}_i) = \mathcal{M}_i$, 令 $\varphi(xE_{ii}) = x^{\mu_i} E_{ii}$, $x \in F$, 其中 $\mu_i : F \rightarrow F$ 是双射且 $0^{\mu_i} = 0, i = 1, 2$. 我们分别讨论下列两种情形.

情形 1 $\text{char}(D) = 2$. 则 (3.15) 成为

$$\bar{y}^\sigma = (\bar{y})^\sigma, \quad \forall y \in D. \quad (3.16)$$

因此

$$\bar{x}^\sigma = x^\sigma, \quad \forall x \in F. \quad (3.17)$$

由 (3.14) 和 (3.17), 得到

$$\varphi \begin{pmatrix} x & x + y \\ x + y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\delta & x^\delta + y^\sigma \\ x^\delta + y^\sigma & x^\delta \end{pmatrix}, \quad \forall x, y \in F. \quad (3.18)$$

从而有

$$\varphi \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\delta & x^\delta \\ x^\delta & x^\delta \end{pmatrix}, \quad \forall x \in F. \quad (3.19)$$

由 (3.18), 得

$$\varphi \begin{pmatrix} x & \\ & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\delta & x^\delta + x^\sigma \\ x^\delta + x^\sigma & x^\delta \end{pmatrix}, \quad \forall x \in F. \quad (3.20)$$

任取 $x \in F^*$, 因为 $xE_{11} + xE_{22} \sim xE_{11}$, 我们有 $\varphi(xE_{11} + xE_{22}) \sim x^{\mu_1}E_{11}$. 因此 $\text{rank}(M) = 1$, 其中 $M = \varphi(xE_{11} + xE_{22}) + x^{\mu_1}E_{11}$. 将 M 的第 2 行加到第 1 行, 然后将第 2 列加到第 1 列, 得到

$$\text{rank}(M) = \text{rank} \begin{pmatrix} x^{\mu_1} & x^\sigma \\ x^\sigma & x^\delta \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} x^{\mu_1} + x^\sigma(x^\delta)^{-1}x^\sigma & 0 \\ 0 & x^\delta \end{pmatrix} = 1.$$

则

$$x^{\mu_1} = x^\sigma(x^\delta)^{-1}x^\sigma, \quad x \in F^*. \quad (3.21)$$

因为 $xE_{11} + xE_{22} \sim xE_{22}$, $\forall x \in F^*$, 类似有

$$x^{\mu_2} = x^\sigma(x^\delta)^{-1}x^\sigma, \quad x \in F^*. \quad (3.22)$$

由 (3.21) 和 (3.22) 得 $\mu_1 = \mu_2$,

$$\varphi(xE_{ii}) = x^\sigma(x^\delta)^{-1}x^\sigma E_{ii}, \quad x \in F^*, \quad i = 1, 2. \quad (3.23)$$

由 $\varphi(\mathcal{L}_1) = \mathcal{L}_1$, (3.12) 和 (3.17), 可设

$$\varphi \begin{pmatrix} x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* & x^\sigma \\ x^\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in F^*.$$

因为 $\begin{pmatrix} x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \sim xE_{22}$, 有 $\begin{pmatrix} x^* & x^\sigma \\ x^\sigma & 0 \end{pmatrix} \sim x^\sigma(x^\delta)^{-1}x^\sigma E_{22}$. 因此

$$\text{rank} \begin{pmatrix} x^* & x^\sigma \\ x^\sigma & x^\sigma(x^\delta)^{-1}x^\sigma \end{pmatrix} = 1, \quad x \in F^*.$$

由上式与矩阵的初等变换, 易知任取 $x \in F$, $x^* = x^\delta$, 则

$$\varphi \begin{pmatrix} x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\delta & x^\sigma \\ x^\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in F. \quad (3.24)$$

任取 $x \in F^*$, 因为 $\begin{pmatrix} x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$, 由 (3.24) 和 (3.19), 有

$$\begin{pmatrix} x^\delta & x^\sigma \\ x^\sigma & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x^\delta & x^\delta \\ x^\delta & x^\delta \end{pmatrix}.$$

因此

$$x^\delta = x^\sigma, \quad \forall x \in F. \quad (3.25)$$

由 (3.23)–(3.25), 得

$$\varphi(xE_{ii}) = x^\sigma E_{ii}, \quad x \in F, \quad i = 1, 2, \quad (3.26)$$

$$\varphi \begin{pmatrix} x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\sigma & x^\sigma \\ x^\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in F. \quad (3.27)$$

类似地, 我们能证明

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x^\sigma \\ x^\sigma & x^\sigma \end{pmatrix}, \quad \forall x \in F. \quad (3.28)$$

由 (3.25), (3.20) 成为

$$\varphi(\text{diag}(x, x)) = \text{diag}(x^\sigma, x^\sigma), \quad \forall x \in F. \quad (3.29)$$

情形 2 $\text{char}(D) \neq 2$. 由 (3.15),

$$\overline{x^\sigma} = -(-x)^\sigma, \quad \forall x \in F. \quad (3.30)$$

任取 $x \in F^*$, $\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & x+x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2^{-1}x & \\ & 0 \end{pmatrix}$, 因此

$$\begin{pmatrix} 0 & x^\sigma \\ \overline{x^\sigma} & x^\sigma + \overline{x^\sigma} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (-2^{-1}x)^{\mu_1} & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -(-2^{-1}x)^{\mu_1} & x^\sigma \\ \overline{x^\sigma} & x^\sigma + \overline{x^\sigma} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} -(-2^{-1}x)^{\mu_1} - x^\sigma(x^\sigma + \overline{x^\sigma})^{-1}\overline{x^\sigma} & 0 \\ 0 & x^\sigma + \overline{x^\sigma} \end{pmatrix} = 1.$$

从而

$$-(-2^{-1}x)^{\mu_1} = x^\sigma(x^\sigma + \overline{x^\sigma})^{-1}\overline{x^\sigma} = [(x^\sigma)^{-1} + (\overline{x^\sigma})^{-1}]^{-1}, \quad \forall x \in F^*. \quad (3.31)$$

在 (3.31) 中, 用 $-2x$ 置换 x . 由 (3.30) 得

$$x^{\mu_1} = [((2x)^\sigma)^{-1} + ((\overline{2x})^\sigma)^{-1}]^{-1}, \quad \forall x \in F^*. \quad (3.32)$$

因此, 从 (3.30) 和 (3.32) 得

$$(-x)^{\mu_1} = -x^{\mu_1}, \quad \forall x \in F. \quad (3.33)$$

类似地, 我们能证明

$$x^{\mu_2} = [((2x)^\sigma)^{-1} + ((\overline{2x})^\sigma)^{-1}]^{-1}, \quad \forall x \in F^*.$$

因此 $\mu_1 = \mu_2$. 则由 (3.33),

$$\varphi(-xE_{ii}) = -\varphi(xE_{ii}), \quad \varphi(xE_{ii}) = x^{\mu_1}E_{ii}, \quad \forall x \in F, \quad i = 1, 2. \quad (3.34)$$

任取 $B, Y \in \mathcal{H}_2(D)$ 且 $\text{rank}(Y) = 1$, 存在 $Q \in GL_2(D)$ 使得 $Y = {}^t\overline{Q}\lambda E_{11}Q$, 其中 $\lambda \in F^*$. 令

$$\varphi'(X) = \varphi({}^t\overline{Q}XQ + B) - \varphi(B), \quad \forall X \in \mathcal{H}_2(D).$$

则 $\varphi' : \mathcal{H}_2(D) \rightarrow \mathcal{H}_2(D)$ 是粘切性保持双射并且 $\varphi'(0) = 0$.

类似于从 (3.8) 到 (3.34) 的证明, 我们也有 $\varphi'(-xE_{11}) = -\varphi'(xE_{11}), \forall x \in F$. 由

$$\varphi'(\lambda E_{11}) = \varphi(Y + B) - \varphi(B), \quad \varphi'(-\lambda E_{11}) = \varphi(-Y + B) - \varphi(B) = -\varphi'(\lambda E_{11}),$$

得到

$$\varphi(-Y + B) + \varphi(Y + B) = 2\varphi(B), \quad \forall B, Y \in \mathcal{H}_2(D), \text{rank}(Y) = 1. \quad (3.35)$$

在 (3.35) 中取 $Y = B$, 则

$$\varphi(2Y) = 2\varphi(Y), \quad \forall Y \in \mathcal{H}_2(D), \text{rank}(Y) = 1. \quad (3.36)$$

在 (3.35) 中取 $B = 0$, 则

$$\varphi(-Y) = -\varphi(Y), \quad \forall Y \in \mathcal{H}_2(D), \text{rank}(Y) = 1. \quad (3.37)$$

由 (3.31), (3.33), (3.36) 和 (3.37),

$$x^{\mu_1} = -2(-2^{-1}x)^{\mu_1} = 2[(x^\sigma)^{-1} + (\overline{x^\sigma})^{-1}]^{-1}, \quad \forall x \in F^*. \quad (3.38)$$

在 (3.35) 中取 $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & x \end{pmatrix}$, 其中 $x \in F^*$, 得

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 2x \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} 0 & x \\ \overline{x} & 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 & x \\ \overline{x} & x + \overline{x} \end{pmatrix} = 2\varphi \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & x \end{pmatrix},$$

从而由 (3.13),

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x^\sigma \\ \overline{x^\sigma} & 2^{-1}(x^\sigma + \overline{x^\sigma}) \end{pmatrix}, \quad x \in F. \quad (3.39)$$

在 (3.35) 中取 $Y = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, 得

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 & -x \\ -x & -x \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 2x & x \\ x & x \end{pmatrix} = 2\varphi \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in F.$$

故由 (3.30), (3.34) 和 (3.39), 得

$$\begin{pmatrix} 0 & -\overline{x^\sigma} \\ -x^\sigma & -2^{-1}(x^\sigma + \overline{x^\sigma}) \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 2x & x \\ x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^{\mu_1} & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in F.$$

因此

$$\varphi \begin{pmatrix} 2x & x \\ x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^{\mu_1} & \overline{x^\sigma} \\ x^\sigma & 2^{-1}(x^\sigma + \overline{x^\sigma}) \end{pmatrix}, \quad \forall x \in F. \quad (3.40)$$

因为对所有的 $x \in F^*$, $\begin{pmatrix} 2x & x \\ x & x \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 2^{-1}x \end{pmatrix}$ 是粘切的, 它们在 φ 下的像也是粘切的. 由 (3.40) 和 (3.34) 可知,

$$\begin{aligned} & \text{rank} \begin{pmatrix} 2x^{\mu_1} & \overline{x^\sigma} \\ x^\sigma & 2^{-1}(x^\sigma + \overline{x^\sigma}) - (2^{-1}x)^{\mu_1} \end{pmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} 2x^{\mu_1} & 0 \\ 0 & 2^{-1}(x^\sigma + \overline{x^\sigma}) - (2^{-1}x)^{\mu_1} - 2^{-1}x^\sigma(x^{\mu_1})^{-1}\overline{x^\sigma} \end{pmatrix} = 1. \end{aligned}$$

则

$$2^{-1}(x^\sigma + \overline{x^\sigma}) - (2^{-1}x)^{\mu_1} = 2^{-1}x^\sigma(x^{\mu_1})^{-1}\overline{x^\sigma}.$$

由 (3.38), 有 $(x^{\mu_1})^{-1} = 2^{-1}[(x^\sigma)^{-1} + (\overline{x^\sigma})^{-1}]$. 因此

$$2^{-1}(x^\sigma + \overline{x^\sigma}) - (2^{-1}x)^{\mu_1} = 4^{-1}(x^\sigma + \overline{x^\sigma}),$$

从而有 $(2^{-1}x)^{\mu_1} = 4^{-1}(x^\sigma + \overline{x^\sigma})$. 故由 (3.36), 得

$$x^{\mu_1} = 2(2^{-1}x)^{\mu_1} = 2^{-1}(x^\sigma + \overline{x^\sigma}), \quad \forall x \in F. \quad (3.41)$$

因为 $\begin{pmatrix} 2x & x \\ x & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\overline{x} & x \\ \overline{x} & 0 \end{pmatrix}$, $x \in F^*$, 由公式 (3.40), (3.41) 和 (3.13) 可以推出

$$\begin{pmatrix} x^\sigma + \overline{x^\sigma} & \overline{x^\sigma} \\ x^\sigma & 2^{-1}(x^\sigma + \overline{x^\sigma}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x^\sigma + \overline{x^\sigma} & x^\sigma \\ \overline{x^\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in F^*.$$

因此

$$\overline{x^\sigma} = x^\sigma, \quad x^{\mu_1} = x^\sigma, \quad (-x)^\sigma = -x^\sigma, \quad \forall x \in F. \quad (3.42)$$

由 (3.39) 和 (3.42), 也可得 (3.26) 和 (3.28). 类似地, 也可得 (3.27).

若 $y = -x \in F$, 则由 (3.14) 和 (3.42),

$$\varphi \begin{pmatrix} x & \\ & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\delta & x^\delta - x^\sigma \\ x^\delta - x^\sigma & x^\delta - 2x^\sigma \end{pmatrix}, \quad x \in F.$$

对任意的 $x \in F^*$, 因为 $xE_{11} - xE_{22} \sim xE_{11}$, 则 $\varphi(xE_{11} - xE_{22}) \sim x^\sigma E_{11}$. 故易知有 $x^\delta = x^\sigma$, 因此

$$\varphi(\text{diag}(x, -x)) = \text{diag}(x^\sigma, -x^\sigma), \quad \forall x \in F. \quad (3.43)$$

类似于文献 [14] 中公式 (3.20) 的证明, 可以证明

$$\varphi(\text{diag}(x, y)) = \text{diag}(x^\sigma, y^\sigma), \quad \forall x, y \in F.$$

综合情形 1 和 2, 总是有 (3.26)–(3.29), (3.37) 和 (3.43). 类似于文献 [14] 中公式 (3.22)–(3.29) 的证明, 可以证明

$$\varphi \begin{pmatrix} x & y \\ \overline{y} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\sigma & y^\sigma \\ \overline{y^\sigma} & z^\sigma \end{pmatrix}, \quad \forall x, z \in F, y \in D. \quad (3.44)$$

并且有 $(x+y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$, 任取 $x \in F, y \in D$. 在 (3.37) 中取 $Y = (\frac{1}{y} \frac{y}{yy})$, 其中 $y \in D$, 由 (3.44) 知 $(-y)^\sigma = -y^\sigma$. 则 (3.15) 推出 $\overline{y^\sigma} = (\overline{y})^\sigma, y \in D$. 因此 (3.44) 可写成

$$\varphi(X) = X^\sigma, \quad \forall X \in \mathcal{H}_2(D).$$

类似于文献 [14] 中的公式 (3.35) 的证明, 可以证明 σ 是 D 的拟自同构.

回忆我们已经作的变换 $\varphi \mapsto {}^t\overline{P^{-1}}(\varphi - \varphi(0))P^{-1}$, 原始的 φ 形如 $\varphi(X) = {}^t\overline{P}X^\sigma P + \varphi(0), \forall X \in \mathcal{H}_2(D)$. 证毕.

注 3.9 如果 $\text{char}(D) \neq 2$, 则 $|F| \geq 3$. 因此定理 3.8 推出 [14] 中的定理 3.2. 在 [14] 中定理 3.2 的证明中, 有一个跳步 “ $\overline{y^\sigma} = -(-\overline{y})^\sigma, \forall y \in D \Rightarrow \overline{x^\sigma} = x^\sigma, \forall x \in F$ ”. 定理 3.8 的证明 (情形 2) 修补了这个跳步.

由定理 3.8 中从 (3.8) 到最后的证明, 我们立即有下列推论:

推论 3.10 设 D 是特征为 2 的带对合 $-$ 的除环且 $|F| \geq 3$, 设 $\varphi: \mathcal{H}_2(D) \rightarrow \mathcal{H}_2(D)$ 是粘切性保持双射并且满足条件 (3.8) 与 $\varphi(0) = 0$, 则 $\varphi(X) = X^\sigma, \forall X \in \mathcal{H}_2(D)$, 其中 σ 是 D 的拟自同构.

现在, 我们证明下列特征 2 的带对合除环上 2×2 Hermitian 矩阵几何的基本定理.

定理 3.11 设 D 是特征 2 的带对合 $-$ 的除环, $F = \{a \in D : a = \overline{a}\}$, Z 是 D 的中心域. 如果 $\varphi: \mathcal{H}_2(D) \rightarrow \mathcal{H}_2(D)$ 是粘切性保持双射, 则 φ 形如

$$\varphi(X) = {}^t\overline{(hP)}X^\tau P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_2(D), \quad (3.45)$$

其中 $h \in F^*, P \in GL_2(D)$ 是固定的, τ 是 D 的自同构且满足条件 $\overline{x^\tau} = h(\overline{x})^\tau h^{-1}, x \in D$. 反之, 形如 (3.45) 的映射是粘切性保持双射.

证明 当 $D = F$ 时, $D = Z$ 是域并且 $-$ 是恒等映射, 因此 $\mathcal{H}_n(D) = \mathcal{S}_n(F)$, 从而由定理 3.4 知定理 3.11 成立. 当 D 是域且 $D \neq F$ 时, F 是 D 的真子域且 $F \subseteq Z$. 由引理 3.3, 我们有 (3.1), 因此 (3.45) 成立 (这里取 $\tau = \sigma$).

从现在开始, 我们假设 $D \neq F$ 并且 D 不是域. 假设 $|F| \leq 2$, 则由 $0, 1 \in F$ 推出 $|F| = 2$, 因此引理 3.2 推出 D 是域, F 是 D 的真子域且 $F \subseteq Z$. 由引理 3.3 知定理 3.11 成立.

以下假设 $|F| \geq 3$. 由定理 3.8, φ 形如

$$\varphi(X) = {}^t\overline{P}X^\sigma P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_2(D),$$

其中 σ 是 D 的拟自同构. 因为 D 不是域且 $\text{char}(D) = 2$, 有 $D \neq (\frac{a,b}{Z})$. 令 $d = (1^\sigma)^{-1} \in F^*, h = d^{-1}$. 设 $x^\tau = dx^\sigma, x \in D$. 由引理 3.7, τ 是 D 的自同构且满足条件 $\overline{x^\tau} = h(\overline{x})^\tau h^{-1}, x \in D$. 则 $X^\sigma = hX^\tau, X \in \mathcal{H}_2(D)$, 因此 φ 形如

$$\varphi(X) = {}^t\overline{P}hX^\tau P + \varphi(0) = {}^t\overline{(hP)}X^\tau P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_2(D).$$

定理 3.11 的反之部分的证明是平凡的. 证毕.

综合定理 3.11 和文献 [14] 中的定理 1.2, 我们有以下任意带对合的除环上 2×2 Hermitian 矩阵几何的基本定理.

定理 3.12 设 D 是带对合 $-$ 的除环, $F = \{a \in D : a = \overline{a}\}$, Z 是 D 的中心域. 设 φ 是从 $\mathcal{H}_2(D)$ 到它自身的粘切性保持双射, 则有

(i) 如果 $D \neq \left(\frac{a,b}{Z}\right)$ 或者 $Z \neq F$, 则 φ 形如

$$\varphi(X) = {}^t\overline{(hP)}X^\tau P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_2(D), \quad (3.46)$$

其中 $h \in F^*$, $P \in GL_2(D)$ 是固定的, τ 是 D 的自同构且满足条件 $\overline{x^\tau} = h(\overline{x})^\tau h^{-1}$, 任取 $x \in D$.

(ii) 如果 $D = \left(\frac{a,b}{Z}\right)$ 且 $Z = F$, 则 φ 形如(3.46), 或者形如

$$\varphi(X) = h {}^t\overline{P} X^\rho P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_2(D), \quad (3.47)$$

其中 $h \in Z^*$, $P \in GL_2(D)$ 是固定的, ρ 是 D 的自同构且 ρ 与对合 $-$ 可交换. 反之, 形如 (3.46) 与 (3.47) 的映射均为粘切性保持双射.

4 特征 2 的除环上的 Hermitian 矩阵几何

现在, 我们给出特征 2 的带对合的除环上 $n \times n$ ($n \geq 2$) Hermitian 矩阵几何的基本定理如下:

定理 4.1 设 D 是特征 2 的带对合 $-$ 的除环, $F = \{a \in D : a = \overline{a}\}$, Z 是 D 的中心域, n 是 ≥ 2 的整数. 设 $\varphi : \mathcal{H}_n(D) \rightarrow \mathcal{H}_n(D)$ 是粘切性保持双射, 则有

(i) 若 $\mathcal{H}_n(D) \neq \mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$, 则 φ 形如

$$\varphi(X) = {}^t\overline{(hP)}X^\tau P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_n(D), \quad (4.1)$$

其中 $h \in F^*$, $P \in GL_n(D)$ 是固定的, τ 是 D 的自同构且满足条件 $\overline{x^\tau} = h(\overline{x})^\tau h^{-1}$, $x \in D$.

(ii) 若 $\mathcal{H}_n(D) = \mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$, 则还有另外一个从 $\mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$ 到它自身的粘切性保持双射

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ x_{13} & 0 & x_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ x_{13} & 0 & x_{33} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 1 \\ x_{13} & 1 & x_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{11}+1 & x_{12}+1 & x_{13}+1 \\ x_{12}+1 & x_{22} & 1 \\ x_{13}+1 & 1 & x_{33} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

并且 φ 是形如 (4.1) 与形如 (4.2) 的双射之积. 反之形如 (4.1) 与 (4.2) 的映射 (仅当 $n=3$ 和 $D=\mathbb{F}_2$ 时) 均为粘切性保持双射.

证明 当 $n=2$ 时, 定理 4.1 是定理 3.11. 现在开始我们假设 $n \geq 3$. 当 $F=D$ 时, $D=Z$ 是域, $-$ 是恒等映射和 $\mathcal{H}_n(D) = \mathcal{S}_n(F)$, 因此定理 3.4 推出定理 4.1. 以下我们假设 $F \neq D$.

若 D 是域, 则 $D=Z$, F 是 D 的真子域且 $F \subseteq Z$. 因此引理 3.3 推出定理 4.1. 若 $|F| \leq 2$, $F \neq D$, 则 $|F|=2$ 和引理 3.2 推出 D 是域.

现在开始假设 $n \geq 3$, $|F| \geq 3$ 以及 D 不是域. 由 $\text{char}(D)=2$, 有 $F=K$, $D \neq \left(\frac{a,b}{Z}\right)$. 因此引理 3.7 与定理 3.8 均成立.

步骤 1 由引理 1.1, φ 保持算术距离不变, 因此 φ 分别将秩 1 和秩 2 极大集映射为秩 1 和秩 2 极大集. 由引理 2.5 和引理 2.9, 置换 φ 由双射

$$\varphi \mapsto {}^t\overline{P^{-1}}(\varphi - \varphi(0))P^{-1}, \quad (4.3)$$

其中 $P \in GL_n(D)$ 是固定的, 我们可假设 $\varphi(0) = 0$,

$$\varphi(\mathcal{M}_i) = \mathcal{M}_i, \quad \varphi(\mathcal{L}_i) = \mathcal{L}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

$$\varphi(\mathcal{M}_{1j}) = \mathcal{M}_{1j}, \quad \varphi(\mathcal{L}_{1j}) = \mathcal{L}_{1j}, \quad j = 2, \dots, n, \quad (4.5)$$

$$\varphi(\mathcal{H}_n[\alpha]) = \mathcal{H}_n[\alpha], \quad \forall \alpha \subseteq \langle n \rangle. \quad (4.6)$$

因此

$$\varphi(\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j) = \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j = \{D_{ij}(x) : x \in D\}, \quad i \neq j; \quad (4.7)$$

$$\varphi(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_{1j}) = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_{1j} = \{(x + \bar{x})E_{11} + D_{1j}(x) : x \in D\}, \quad j = 2, \dots, n; \quad (4.8)$$

$$\varphi(\mathcal{L}_j \cap \mathcal{L}_{1j}) = \mathcal{L}_j \cap \mathcal{L}_{1j} = \{(x + \bar{x})E_{jj} + D_{1j}(x) : x \in D\}, \quad j = 2, \dots, n; \quad (4.9)$$

$$\varphi(\mathcal{L}_i \cap \mathcal{H}_n[\{i, j\}]) = \mathcal{L}_i \cap \mathcal{H}_n[\{i, j\}] = \{xE_{ii} + D_{ij}(y) : x \in F, y \in D\}, \quad i \neq j. \quad (4.10)$$

由引理 2.13, 有

$$\varphi\left(\sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}(x_{ij})\right) = \sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}(x_{ij}^{\sigma_i} q_{ij}), \quad \forall x_{ij} \in D, 1 \leq i \leq n, \quad (4.11)$$

其中 σ_i 是 D 的自同构, $q_{ij} \in D^*$, $1 \leq i, j \leq n$, $j \neq i$. 并且所有的 q_{ij} 和 σ_i 是固定的. 故由 (4.11) 得到

$$\varphi(D_{1j}(x_{1j})) = D_{1j}(x_{1j}^{\sigma_1} q_{1j}), \quad \forall x_{1j} \in D, j = 2, \dots, n. \quad (4.12)$$

由 (4.6), 可设

$$\varphi(x_{11}E_{11} + D_{1j}(x_{1j}) + x_{jj}E_{jj}) = x_{11}^*E_{11} + D_{1j}(x_{1j}^*) + x_{jj}^*E_{jj}, \quad j = 2, \dots, n. \quad (4.13)$$

则 φ 诱导出从 $\mathcal{H}_2(D, -)$ 到它自身的粘切性保持双射 φ_j 为

$$\varphi_j \begin{pmatrix} x_{11} & x_{1j} \\ \overline{x_{1j}} & x_{jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{1j}^* \\ \overline{x_{1j}^*} & x_{jj}^* \end{pmatrix}, \quad \forall x_{11}, x_{jj} \in F, x_{1j} \in D, \quad (4.14)$$

这里所有的 $x_{11}^*, x_{jj}^*, x_{1j}^*$ ($j = 2, \dots, n$) 由 (4.13) 式决定. 显然 $\varphi_j(0) = 0$. 由 (4.4) 与 (4.5),

$$\varphi_j(\mathcal{M}_i^{(2)}) = \mathcal{M}_i^{(2)}, \quad \varphi_j(\mathcal{M}_{12}^{(2)}) = \mathcal{M}_{12}^{(2)}, \quad i = 1, 2, j = 2, \dots, n, \quad (4.15)$$

其中 $\mathcal{M}_i^{(2)} = \{xE_{ii}^{(2)} : x \in F\}$, $i = 1, 2$, 并且 $\mathcal{M}_{12}^{(2)}$ 由 (3.4) 式定义. 由推论 3.10, 我们得到

$$\varphi_j(X) = X^{\mu_j}, \quad \forall X \in \mathcal{H}_2(D), \quad (4.16)$$

其中 μ_j 是 D 的拟自同构, $j = 2, \dots, n$. 因此

$$\varphi(x_{11}E_{11} + D_{1j}(x_{1j}) + x_{jj}E_{jj}) = x_{11}^{\mu_j}E_{11} + D_{1j}(x_{1j}^{\mu_j}) + x_{jj}^{\mu_j}E_{jj},$$

$\forall x_{11}, x_{jj} \in F, x_{1j} \in D, j = 2, \dots, n$.

由 (4.12),

$$x_{1j}^{\mu_j} = x_{1j}^{\sigma_1} q_{1j}, \quad \forall x_{1j} \in D, j = 2, \dots, n. \quad (4.17)$$

任取 $j \geq 3$ 及 $x_{11}, x_{22}, x_{jj} \in F^*$, 由

$$\text{ad}(x_{11}E_{11} + x_{jj}E_{jj}, x_{11}E_{11} + x_{22}E_{22}) = 2$$

可知

$$\text{ad}(x_{11}^{\mu_j}E_{11} + x_{jj}^{\mu_j}E_{jj}, x_{11}^{\mu_2}E_{11} + x_{22}^{\mu_2}E_{22}) = 2.$$

因此 $x_{11}^{\mu_j} = x_{11}^{\mu_2}$, $\forall x_{11} \in F$, $j = 2, \dots, n$. 在 (4.17) 中取 $x_{1j} = 1$, 知 $q_{12} = \dots = q_{1n} = 1^{\mu_2} \in R^*$. 再一次应用 (4.17) 可知 $\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_n$. 令 $\sigma = \mu_2$, 则 σ 是 D 的拟自同构, 并且有

$$x^\sigma = x^{\sigma_1} 1^\sigma, \quad \forall x \in D, \quad (4.18)$$

$$\varphi(x_{11}E_{11} + D_{1j}(x_{1j}) + x_{jj}E_{jj}) = x_{11}^\sigma E_{11} + D_{1j}(x_{1j}^\sigma) + x_{jj}^\sigma E_{jj} \quad (4.19)$$

对所有的 $x_{11}, x_{jj} \in F$, $x_{1j} \in D$, $j = 2, \dots, n$. 都成立由 (4.11) 与 (4.18) 得

$$\varphi(X) = X^\sigma, \quad \forall X \in \mathcal{L}_1^{(0)}. \quad (4.20)$$

步骤 2 任取 $i \geq 2$, 由 (4.11), (4.20) 及 $(\bar{y})^\sigma = \overline{y^\sigma}$, $y \in D$,

$$\varphi(D_{i1}(x_{i1})) = D_{i1}(x_{i1}^{\sigma_i} q_{i1}) = \varphi(D_{1i}(\overline{x_{i1}})) = D_{1i}((\overline{x_{i1}})^\sigma) = D_{i1}(x_{i1}^\sigma), \quad \forall x_{i1} \in D.$$

因此

$$x_{i1}^\sigma = x_{i1}^{\sigma_i} q_{i1}, \quad \forall x_{i1} \in D, \quad (4.21)$$

$$q_{i1} = 1^\sigma, \quad i = 2, \dots, n, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n. \quad (4.22)$$

对任意的 $i \geq 2$, 因为 $\text{ad}(\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n D_{ij}(1), \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n D_{1j}(1)) = 2$, 有

$$\text{rank} \left(\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n D_{ij}(q_{ij}) - \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n D_{1j}(1^\sigma) \right) = 2.$$

从而有 $q_{i2} = \dots = q_{i,i-1} = q_{i,i+1} = \dots = q_{in}$, $i = 2, \dots, n$. 令 $d_i = (1^\sigma)^{-1} q_{i2}$, $i = 2, \dots, n$. 由 (4.18)-(4.22), (4.11) 式成为

$$\varphi \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}(x_{ij}) \right) = D_{i1}(x_{i1}^\sigma) + \sum_{j=2, j \neq i}^n D_{ij}(x_{ij}^\sigma d_i), \quad i = 2, \dots, n. \quad (4.23)$$

当 $j \geq 3$ 时, 由 (4.23),

$$\varphi(D_{2j}(1)) = D_{2j}(1^\sigma d_2),$$

$$\varphi(D_{2j}(1)) = \varphi(D_{j2}(1)) = D_{j2}(1^\sigma d_j) = D_{2j}(\overline{1^\sigma d_j}), \quad j = 3, \dots, n.$$

因此

$$\varphi(D_{2j}(1)) = D_{2j}(1^\sigma d_2) = D_{2j}(\overline{1^\sigma d_j}), \quad 1^\sigma d_2 = \overline{1^\sigma d_j} = \overline{d_j} 1^\sigma, \quad j = 3, \dots, n.$$

则

$$d := 1^\sigma d_2 (1^\sigma)^{-1} = \overline{d_3} = \dots = \overline{d_n}. \quad (4.24)$$

类似地,

$$\begin{aligned}\varphi(D_{23}(x)) &= D_{23}(x^\sigma d_2), \\ \varphi(D_{23}(x)) &= \varphi(D_{32}(\bar{x})) = D_{32}(\bar{x}^\sigma d_3) = D_{32}(\overline{x^\sigma} d_3) = D_{23}(dx^\sigma), \quad \forall x \in D.\end{aligned}$$

因此 $D_{23}(x^\sigma d_2) = D_{23}(dx^\sigma)$, $x \in D$. 则 $x^\sigma d_2 = dx^\sigma$, $x \in D$. 因此 $[(1^\sigma)^{-1}x^\sigma]d_2 = d_2[(1^\sigma)^{-1}x^\sigma]$, $x \in D$, 从而可推出 $yd_2 = d_2y$, $y \in D$. 因此 $d_2 = d \in Z^*$. 任取 $x_{i1}, \dots, x_{i,i-1}, x_{i,i+1}, \dots, x_{in} \in D$, 由 (4.23),

$$\varphi\left(\sum_{j=1, j \neq 2}^n D_{2j}(x_{2j})\right) = D_{21}(x_{21}^\sigma) + \sum_{j=3}^n D_{2j}(x_{2j}^\sigma d). \quad (4.25)$$

因为 $\text{ad}(D_{12}(1) + D_{13}(1), D_{23}(x)) = 2$, $x \in F$, 由 (4.20) 和 (4.25) 知

$$\text{ad}(D_{12}(1^\sigma) + D_{13}(1^\sigma), D_{23}(x^\sigma d)) = 2, \quad x \in F.$$

因此

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1^\sigma & 1^\sigma \\ 1^\sigma & 0 & x^\sigma d \\ 1^\sigma & \overline{x^\sigma d} & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad \forall x \in F.$$

从而有 $x^\sigma d = \overline{x^\sigma d}$, $x \in F$. 由 $d \in Z$ 和 $\overline{x^\sigma} = x^\sigma$, 我们得到 $dx^\sigma = \bar{d}x^\sigma$, $x \in F$, 因此 $d = \bar{d}$, 从而有 $d \in Z^* \cap F$. 则 (4.24) 式成为 $d = d_2 = \dots = d_n$, (4.23) 式成为

$$\varphi\left(\sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}(x_{ij})\right) = D_{i1}(x_{i1}^\sigma) + d \sum_{j=2, j \neq i}^n D_{ij}(x_{ij}^\sigma), \quad i = 2, \dots, n. \quad (4.26)$$

对任意的 $x_{ii} \in F$, $x_{ij} \in D$ ($j \neq i$), 由 $\varphi(\mathcal{L}_i) = \mathcal{L}_i$ 和 (4.26), 可以假设

$$\varphi\left(x_{ii}E_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}(x_{ij})\right) = x_{ii}^*E_{ii} + D_{i1}(x_{i1}^\sigma) + d \sum_{j=2, j \neq i}^n D_{ij}(x_{ij}^\sigma), \quad 2 \leq i \leq n. \quad (4.27)$$

对于 $i \neq 1$ 和 $j \neq i$, 由 (4.27) 式, 可设 $\varphi(xE_{ii} + D_{ij}(y)) = x^{\tau_i}E_{ii} + dD_{ij}(y^\sigma)$, $x \in F$, $y \in D$. 因为 σ 是 D 的拟自同构, 由 (4.19) 推出

$$\varphi(\bar{y}x^{-1}yE_{jj}) = (\bar{y}x^{-1}y)^\sigma E_{jj} = \overline{y^\sigma}(x^\sigma)^{-1}y^\sigma E_{jj}, \quad \forall x \in F^*, y \in D.$$

由 $1 = -1$ 知 $xE_{ii} + D_{ij}(y) \sim \bar{y}x^{-1}yE_{jj}$, $\forall x \in F^*, y \in D$. 不妨设 $j \notin \{i, 1\}$, 则由此粘切性可推出

$$\text{rank}(x^{\tau_i}E_{ii} + dD_{ij}(y^\sigma) + \overline{y^\sigma}(x^\sigma)^{-1}y^\sigma E_{jj}) = 1, \quad \forall x \in F^*, y \in D.$$

因此 $x^{\tau_i} = d^2x^\sigma$, $\forall x \in F^*$. 则我们证明了

$$\varphi(xE_{ii} + D_{ij}(y)) = d^2x^\sigma E_{ii} + dD_{ij}(y^\sigma), \quad \forall x \in F, y \in D, i \neq 1, j \neq i. \quad (4.28)$$

由 $|F| \geq 3$, 存在 $x, y \in F^*$ 使得 $x + y \neq 0$. 因为 $(x + y)E_{22} + D_{23}(y)$ 与 $(x + y)E_{33} + D_{32}(x)$ 是粘切的, 因此

$$d^2(x + y)^\sigma E_{22} + dD_{23}(y^\sigma) \sim d^2(x + y)^\sigma E_{33} + dD_{32}(x^\sigma).$$

由 $(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$, 我们有

$$\text{rank} \begin{pmatrix} d^2(x^\sigma + y^\sigma) & dx^\sigma + dy^\sigma \\ dx^\sigma + dy^\sigma & d^2(x^\sigma + y^\sigma) \end{pmatrix} = 1.$$

由此可知 $d^2 = 1$, 从而由 $\text{char}(D) = 2$ 知 $d = 1$. 则由 (4.19), (4.26) 和 (4.28), 得到

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= X^\sigma, \quad \forall X \in \mathcal{L}_j^{(0)}, \quad j = 1, \dots, n, \\ \varphi(xE_{ii} + D_{ij}(y)) &= x^\sigma E_{ii} + D_{ij}(y^\sigma), \quad \forall x \in F, y \in D, i \neq j. \end{aligned}$$

因为 σ 是 D 的拟自同构, 故有 $\overline{x^\sigma} = (\overline{x})^\sigma, x \in D$. 因此

$$X \in \mathcal{H}_n(D) \Leftrightarrow X^\sigma \in \mathcal{H}_n(D) \Leftrightarrow X^{\sigma^{-1}} \in \mathcal{H}_n(D).$$

置换 φ 应用下列双射

$$\varphi(X) \mapsto (\varphi(X))^{\sigma^{-1}}, \quad (4.29)$$

(4.4) 和 (4.6) 式保持不变, 进一步有

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= X, \quad \forall X \in \mathcal{L}_j^{(0)}, \quad j = 1, \dots, n, \\ \varphi(xE_{ii} + D_{ij}(y)) &= xE_{ii} + D_{ij}(y), \quad \forall x \in F, y \in D, j \neq i. \end{aligned}$$

步骤 3 类似于 [13] 中定理 1.1 的证明中的步骤 4 和 5, 我们能证明下列结果:

$$\begin{aligned} \varphi(x_{ii}E_{ii} + D_{ij}(x_{ij}) + x_{jj}E_{jj}) &= x_{ii}E_{ii} + D_{ij}(x_{ij}) + x_{jj}E_{jj}, \quad j \neq i; \\ \varphi(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F; \\ \varphi\left(\sum_{1 \leq i, j \leq r} a_{ij}E_{ij}\right) &= \sum_{1 \leq i, j \leq r} a_{ij}E_{ij}, \quad a_{ij} = \overline{a_{ji}} \in D, \quad 1 \leq i, j \leq r. \end{aligned} \quad (4.30)$$

在 (4.30) 中取 $r = n$, 有 $\varphi(X) = X, \forall X \in \mathcal{H}_n(D)$. 回忆我们已经作的变换 (4.3) 和 (4.29), 原始的 φ 必形如

$$\varphi(X) = {}^t\overline{P}X^\sigma P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_n(D). \quad (4.31)$$

令 $h = 1^\sigma \in F^*, x^\tau = h^{-1}x^\sigma, x \in D$. 由引理 3.7, τ 是 D 的自同构. 故 (4.31) 式可写成

$$\varphi(X) = {}^t\overline{P}hX^\tau P + \varphi(0) = {}^t\overline{(hP)}X^\tau P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_n(D).$$

由 $\overline{x^\sigma} = (\overline{x})^\sigma, x \in D$, 有 $\overline{x^\tau} = h(\overline{x})^\tau h^{-1}, \forall x \in D$. 因此 (4.1) 式成立.

定理 4.1 的反之部分的证明是平凡的. 证毕.

5 任意带对合的除环上 Hermitian 矩阵几何的基本定理

结合定理 4.1 和文献 [13] 中的定理 1.1, 我们有以下任意带对合的除环上 $n \times n$ ($n \geq 3$) Hermitian 矩阵几何的基本定理.

定理 5.1 设 D 是任意带对合 $-$ 的除环, $F = \{a \in D : a = \bar{a}\}$, n 是 ≥ 3 的整数. 设 φ 是从 $\mathcal{H}_n(D)$ 到它自身的粘切性保持双射, 则有

(i) 若 $\mathcal{H}_n(D) \neq \mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$, 则 φ 形如

$$\varphi(X) = {}^t(\overline{hP})X^\tau P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_n(D), \quad (5.1)$$

其中 $h \in F^*$, $P \in GL_n(D)$ 是固定的, τ 是 D 的自同构且满足条件 $\overline{x^\tau} = h(\overline{x})^\tau h^{-1}$, $x \in D$.

(ii) 若 $\mathcal{H}_n(D) = \mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$, 则 φ 是形如 (5.1) 与形如 (4.2) 的双射之积.

反之, 形如 (5.1) 和形如 (4.2) (仅当 $n = 3$ 和 $D = \mathbb{F}_2$ 时) 的双射均为粘切性保持双射.

综合定理 3.12 和 5.1, 我们有以下任意带对合的除环上 Hermitian 矩阵几何的基本定理.

定理 5.2 设 D 是任意带对合 $-$ 的除环, $F = \{a \in D : a = \bar{a}\}$, Z 是 D 的中心域, n 是 ≥ 2 的整数. 设 $\varphi : \mathcal{H}_n(D) \rightarrow \mathcal{H}_n(D)$ 是粘切性保持双射, 则有

(i) 若 $n \geq 3$ 且 $\mathcal{H}_n(D, -) \neq \mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$, 或 $n = 2$ 且 $D \neq (\frac{a, b}{Z})$, 其中 $Z = F$, 则 φ 形如

$$\varphi(X) = {}^t(\overline{hP})X^\tau P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_n(D), \quad (5.2)$$

其中 $h \in F^*$, $P \in GL_n(D)$ 是固定的, τ 是 D 的自同构且满足条件 $\overline{x^\tau} = h(\overline{x})^\tau h^{-1}$, $x \in D$.

(ii) 若 $n = 2$ 且 $D = (\frac{a, b}{Z})$, 其中 $Z = F$, 则 φ 形如 (5.2), 或形如

$$\varphi(X) = h {}^t \overline{P} \overline{X}^\rho P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_2(D), \quad (5.3)$$

其中 $0 \neq h \in Z$, $P \in GL_2(D)$ 是固定的, ρ 是 D 的自同构且 ρ 与对合 $-$ 可交换.

(iii) 若 $n = 3$ 且 $\mathcal{H}_3(D) = \mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$, 则 φ 是形如 (5.2) 与形如 (4.2) 的双射之积.

反之, 形如 (5.2), (5.3) 和 (4.2) (仅当 $n = 3$ 和 $D = \mathbb{F}_2$ 时) 的映射均为粘切性保持双射.

没有本质的困难, 定理 5.2 可推广到以下任意两个带对合的除环上 Hermitian 矩阵几何的基本定理.

定理 5.3 设 D' 与 D 分别为带对合 $*$ 与 $-$ 的除环, $F' = \{x \in D' : x = x^*\}$, $F = \{x \in D : x = \bar{x}\}$. 假设 Z' 是 D' 的中心域, Z 是 D 的中心域, m, n 是 ≥ 2 的整数. 设 $\varphi : \mathcal{H}_m(D', *) \rightarrow \mathcal{H}_n(D, -)$ 是粘切性保持双射, 则 $m = n$, D' 和 D 是同构的除环, 并且有

(i) 若 $n \geq 3$ 且 $\mathcal{H}_n(D', *) \neq \mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$, 或 $n = 2$ 且 $D' \neq (\frac{a, b}{Z'})$, 其中 $Z' = F'$, 则 φ 形如

$$\varphi(X) = {}^t(\overline{hP})X^\tau P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_n(D', *), \quad (5.4)$$

其中 $0 \neq h \in F$, $P \in GL_n(D)$ 是固定的, τ 是从 D' 到 D 的环同构且满足条件 $\overline{x^\tau} = h(x^*)^\tau h^{-1}$, $x \in D'$.

(ii) 若 $n = 2$ 且 $D' = (\frac{a, b}{Z'})$, 其中 $Z' = F'$, 则 φ 形如 (5.4), 或形如

$$\varphi(X) = h {}^t \overline{P} \overline{X}^\rho P + \varphi(0), \quad \forall X \in \mathcal{H}_2(D', *), \quad (5.5)$$

其中 $0 \neq h \in Z$, $P \in GL_2(D)$ 是固定的, ρ 是从 D' 到 D 的环同构且 $\overline{x^\rho} = (x^*)^\rho$, $x \in D'$.

(iii) 若 $n = 3$ 且 $\mathcal{H}_3(D', *) = \mathcal{S}_3(\mathbb{F}_2)$, 则 φ 是形如 (5.4) 与形如 (4.2) 的双射之积.

反之, 形如 (5.4), (5.5) 和 (4.2) (仅当 $n = 3$ 且 $D = \mathbb{F}_2$ 时) 的映射均为粘切性保持双射.

致谢 作者对审稿人的意见表示衷心感谢.

参考文献

- 1 Hua L K. Geometries of matrices I, generalizations of von Staudt's theorem. *Trans Amer Math Soc*, 1945, 57: 441-448
- 2 华罗庚, 万哲先. 典型群. 上海: 上海科学技术出版社, 1963
- 3 Wan Z X. Geometry of Matrices: In Memory of Professor L K Hua (1910-1985). Singapore: World Scientific, 1996
- 4 万哲先. 中国科学院在代数方面的工作. *中国科学 A 辑*, 2000, 30: 481-488
- 5 Šemrl P. On Hua's fundamental theorem of the geometry of matrices. *J. Algebra*, 2004, 272: 801-837
- 6 Wan Z X. Geometries of symmetric matrices and its applications I. *Algebra Colloq*, 1994, 1: 97-120
- 7 Wan Z X. Geometries of symmetric matrices and its applications II. *Algebra Colloq*, 1994, 1: 201-224
- 8 Wan Z X. Geometry of Hamiltonian matrices and its applications I. *Algebra Colloq*, 1995, 2: 167-192
- 9 Wan Z X. Geometry of Hamiltonian matrices and its applications II. *Algebra Colloq*, 1996, 3: 107-116
- 10 万哲先, 黄礼平. 2×2 Hermitian 矩阵几何. *中国科学 A 辑*, 2002, 32: 39-50
- 11 Huang L P, Wan Z X. Geometry of 2×2 Hermitian matrices II. *Linear Multilinear Algebra*, 2006, 54: 37-54
- 12 Huang L P. Adjacency preserving bijection maps of Hermitian matrices over any division ring with an involution. *Acta Math Sin, Engl Ser*, 2007, 23: 95-102
- 13 Huang L P. Geometry of $n \times n$ ($n \geq 3$) Hermitian matrices over any division ring with an involution and its applications. *Comm Algebra*, 2008, 36: 2410-2438
- 14 黄礼平. 任意除环上 2×2 Hermitian 矩阵几何. *中国科学 A 辑*, 2009, 39: 1072-1084
- 15 Huang W L, Šemrl P. Adjacency preserving maps on hermitian matrices. *Canada J Math*, 2008, 60: 1050-1066
- 16 Huang L P. Geometry of Matrices over Ring. Beijing: Science Press, 2006
- 17 Gao J F, Wan Z X, Feng R Q, et al. Geometry of symmetric matrices and its applications III. *Algebra Colloq*, 1996, 3: 135-146
- 18 Huang L P. Diameter preserving surjection on alternate matrices. *Acta Math Sin, Engl Ser*, 2009, 25: 1517-1528
- 19 Huang L P. Geometry of rectangular block triangular matrices. *Acta Math Sin, Engl Ser*, 2009, 25: 2035-2054
- 20 Huang W L, Höfer R, Wan Z X. Adjacency preserving mappings of symmetric and hermitian matrices. *Aequations Math*, 2004, 67: 132-139
- 21 刘木兰. 交错矩阵几何. *数学学报*, 1966, 16: 104-135

Geometry of Hermitian matrices over a division ring of characteristic 2

HUANG LiPing

Abstract Let D be any division ring with an involution. When $\text{char}(D) \neq 2$, the fundamental theorem of the geometry of Hermitian matrices over D has been proved recently. This paper proves further the fundamental theorem of the geometry of Hermitian matrices over D of $\text{char}(D) = 2$. Thus the fundamental theorem of the geometry of Hermitian matrices over any division ring with an involution is obtained.

Keywords: division ring with an involution, geometry of matrices, Hermitian matrix

MSC(2000): 15A57, 51D20

doi: 10.1360/012010-661