

# 滑移楔流体动力学及其表面滑移特性优化

马国军, 吴承伟\*, 周平

大连理工大学工程力学系工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024

\* 联系人, E-mail: [cwwu@dlut.edu.cn](mailto:cwwu@dlut.edu.cn)

收稿日期: 2006-09-20; 接受日期: 2006-11-21

国家重大基础研究发展计划(编号: 2006CB601205)、国家自然科学基金创新团队基金(批准号: 10421002)、国家自然科学基金(批准号: 10332010, 10672035)和高等学校博士学科点专项科研基金(编号: 20030141013)资助项目

**摘要** 研究了具有滑移楔的滑块轴承的流体动压承载力. 根据界面所受剪力的分布情况, 优化固体表面滑移特性, 表面滑移特性是几何位置的函数. 提出了研究二维界面滑移问题的滑移本构方程的分段线性化方法, 研究了有限长滑块轴承具有任意界面极限剪应力的二维界面滑移问题及其流体动力学效应. 发现滑移楔的流体动力学效应要大于传统的几何收敛楔, 甚至当几何间隙为平行间隙或发散间隙时, 滑移楔仍然会产生很大的流体动压力. 滑移楔可以产生的最大流体动压力是几何收敛楔能够产生的最大流体动压力的两倍以上, 最大的达到 2.5 倍. 界面滑移使得界面摩擦阻力减小.

## 关键词

边界滑移  
滑移楔  
界面极限剪应力  
优化

流体流动的边界条件是决定流体动力学效应的主要因素之一. 经典流体力学和润滑力学均基于一个相同的重要假设: 在固体和液体的交界面上没有滑移, 即所谓的无滑移边界条件. 这个假设已被广泛用于各种工程和实验, 几乎所有宏观流体动力学计算和流变学实验都是基于这个假设. 基于界面无滑移假设, 1886 年著名的 Reynolds 方程问世<sup>[1]</sup>, 从此奠定了润滑力学基础. 经典 Reynolds 理论告诉我们, 几何收敛楔(收敛间隙)是流体稳态流动时形成流体动压力的首要条件, 平行或发散间隙都不可能产生承载的流体动压力. 数百年来, 几何收敛楔是一切流体动压轴承设计与制造的先决条件, 也是润滑力学的重要基石之一.

1958 年 Cameron<sup>[2]</sup>提出了温度-黏度楔的概念. 认为如果流体膜的温度在间隙方向有显著变化, 即使平行间隙也会有流体动压力产生, 但是一般情况下黏度楔承载力较小, 因而在工程设计中很少使用.

近年来随着纳米测试技术的不断进步, 对固液界面滑移问题的纳米尺度测试成为可能<sup>[3-8]</sup>, 并且被纳米力学和纳米材料界认为是新的研究热点和方向<sup>[9,10]</sup>. 实验表明界面滑移不但发生

在憎水表面, 而且也发生在亲水表面, 当表面剪力达到某个临界(极限)值时, 发生界面滑移, 否则没有滑移 [6-9]. 当表面湿润性很差时, 界面产生滑移的临界剪应力很小 [9,11], 接近理想滑移表面. 此外, 分子动力学数值模拟也证实固液界面存在滑移现象 [12,13]. 文献[14,15]采用极限剪应力模型分析了间隙流动的一维界面滑移问题, 文献[11]研究了球面挤压流体膜的界面滑移问题, 理论预报与实验测量吻合良好. Spikes [16,17]研究了半湿润滑动轴承的力学特性, 发现界面滑移能降低摩擦力, 但流体动压力也随之降低. 但是所有这些研究并没有离开经典 Reynolds 方程的基本框架——几何收敛楔, 并且发现界面滑移使得流体动力学效应大幅度减小, 因而从增加流体动力学效应的角度来看, 以前的研究认为界面滑移没有益处. Salant 和 Fortier [18]则使用修正的滑移长度模型 [19]发现具有不同滑移性质的滑块轴承的流体承载力获得提高, 但当极限剪应力非零时, 数值解不稳定.

本文提出了一个滑移楔概念. 根据界面所受剪力的分布情况, 优化固体表面滑移特性. 由于表面滑移特性是几何位置的函数, 使得二维界面滑移问题的研究要比一维滑移问题复杂的多. 由于滑移速度的方向和大小都是待定的, 使得滑移本构方程更为复杂, 本身又是一个很强的非线性问题. 本文提出了研究二维界面滑移问题的滑移本构方程的分段线性化方法, 研究了有限长滑块轴承具有任意界面极限剪应力的二维界面滑移问题. 我们发现, 滑移楔的流体动力学效应要大于几何收敛楔, 甚至当几何间隙为平行间隙时, 滑移楔可以产生的最大流体动压力是几何收敛楔能够产生的最大流体动压力的两倍以上.

## 1 滑移本构方程的分段线性化方法

以图 1 所示的滑块轴承为例, 为了简便起见假设下表面的极限剪应力很大, 足以抑制界面滑移, 上滑块是由无滑移区和理想滑移区( $\tau_L^* = 0$ )组成的复合表面, 相对于传统无滑移的几何收敛楔, 我们定义这种具有复合滑移表面的几何楔为“滑移楔”. 下表面(表面 b)以速度  $U$  沿  $x$  轴运动, 上滑块(表面 a)静止. 设上表面任意一点( $x, y$ )在  $x$  和  $y$  方向的滑移速度分量为  $u_s$  和  $v_s$ , 其幅值和方向(符号)由表面剪力的大小和方向决定. 若表面上该点在  $x$  和  $y$  方向的剪应力用  $\tau_x$  和  $\tau_y$  表示, 则总剪应力为

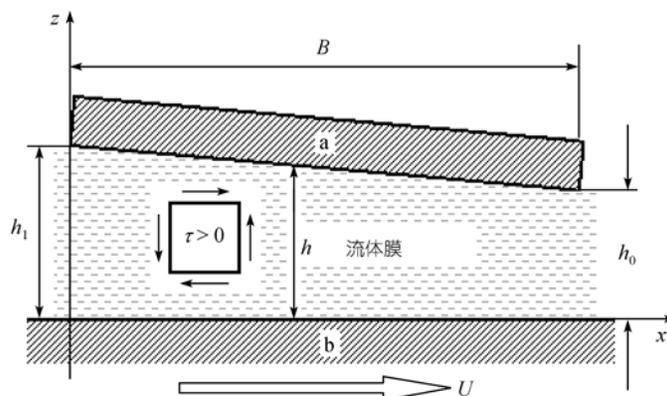


图 1 滑块间隙及流体膜几何示意图

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_x \mathbf{i} + \tau_y \mathbf{j}, \quad (1)$$

式中  $\mathbf{i}$  和  $\mathbf{j}$  表示  $x$  和  $y$  方向的单位矢量. 假设使得表面产生速度滑移的极限剪应力为  $\tau_L$ . 剪应力的取值范围可以表示为一个闭集:

$$C_\infty(\tau_L) = \{\boldsymbol{\tau} : f = |\boldsymbol{\tau}| - \tau_L \leq 0\}. \quad (2)$$

(2)式实际上是一个无限大的圆锥体, 如图 2(a). 在圆锥体内,  $|\boldsymbol{\tau}| = \tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} < \tau_L$ , 没有界面滑移; 在圆锥表面上,  $\tau = \tau_L$ , 发生了界面滑移. 在一维滑移分析中, 由于滑移方向或者沿  $x$  方向或者沿  $-x$  方向, 因而可以采用穷举的办法进行迭代求解 [20], 或者采用参数二次规划的方法求解 [21]. 但是对于二维滑移问题, 由于滑移方向有无穷多个, 穷举的办法已不可能, 二次规划的办法也无法实现. 若对(2)式分段线性化, 我们用一个  $N$  边正棱锥体(图 2(b))近似图 2(a)所示的圆锥体, 其闭集可表示为

$$C_N(\tau_L) = \{\boldsymbol{\tau} : f_i = \tau_x \cos \beta_i + \tau_y \sin \beta_i - \zeta \leq 0, i = 1, 2, \dots, N\}, \quad (3)$$

且有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N(\tau_L) = C_\infty(\tau_L), \quad (4)$$

其中

$$\beta_i = \frac{2\pi}{N}(i-1), (i = 1, 2, \dots, N), \quad (5)$$

$\zeta$  为圆点到多边形任一个边的距离. 正棱锥体可以采用外切正棱锥、内接正棱锥或者任何其他正棱锥体. 为了提高精度本文采用这样一个正棱锥体, 其横截面积恰好等于圆锥体的圆形横截面积 ( $\zeta = \sqrt{(\pi/N)/\tan(\pi/N)} \tau_L$ ). 因而滑移本构方程(又称滑移控制方程)的一般形式可以写成(见图 2(c)):

$$f_i = \tau_x \cos \beta_i + \tau_y \sin \beta_i - \zeta \leq 0, (i = 1, 2, \dots, N), \quad (6)$$

上表面的剪应力分量为 [14,15]

$$\tau_x = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u_s - U}{h} \eta, \quad (7a)$$

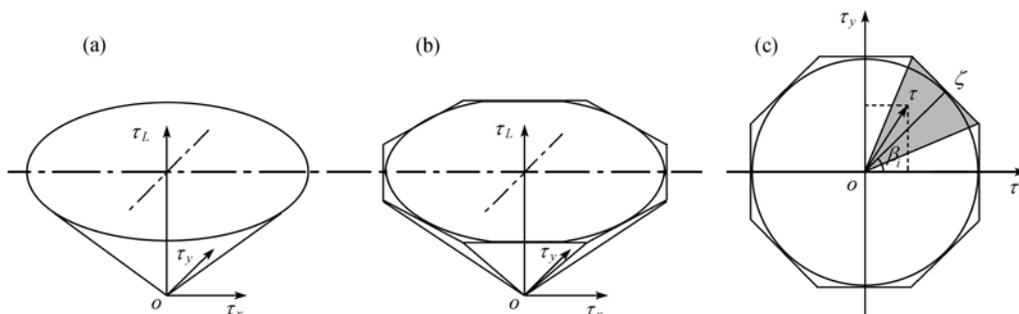


图 2 界面滑移本构模型

$$\tau_y = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_s}{h} \eta, \quad (7b)$$

由于在上表面滑移速度和流体剪力方向相反, 假设在 $\beta_i$ 方向的剪应力引起的滑移速度幅值为 $\lambda_i$ , 则滑移速度可以写成:

$$u_s = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cos(\pi + \beta_i), \quad v_s = \sum_{i=1}^N \lambda_i \sin(\pi + \beta_i), \quad (i=1, 2, \dots, N), \quad (8)$$

将(7)和(8)式代入(6)式并引入松弛变量 $\mu_i$ , 得到滑移控制方程的一般表达式:

$$f_a^{(i)}(p, \partial p / \partial x, h, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) + \mu_i = 0, \quad (9a)$$

$$\lambda_i \cdot \mu_i = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (9b)$$

## 2 二维滑移问题的变分原理

对于图1所示的滑块轴承, 等温等黏状态下修正的Reynolds方程为<sup>[14,15,22]</sup>

$$\nabla \cdot \left( \frac{h^3}{12\eta} \nabla p \right) = \nabla \cdot \left[ \frac{h}{2} (u_s + U) \mathbf{i} + \frac{h}{2} v_s \mathbf{j} \right] + \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (10)$$

对于稳态流动 $\partial h / \partial t = 0$ , (10)式的变分泛函为

$$J(p) = \int_A \left\{ \left[ \frac{h^3}{24\eta} \nabla p - \frac{h}{2} ((U + u_s) \mathbf{i} + v_s \mathbf{j}) \right] \cdot \nabla p \right\} dA + \int_{S_q} q_s p_s ds, \quad (11)$$

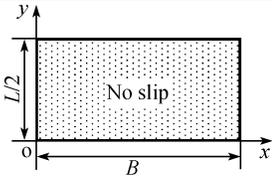
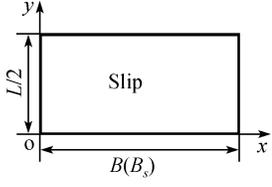
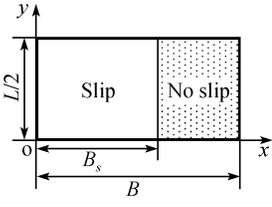
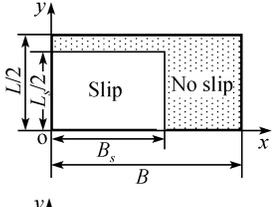
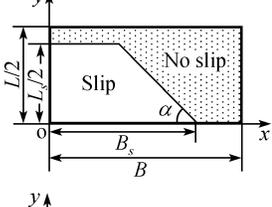
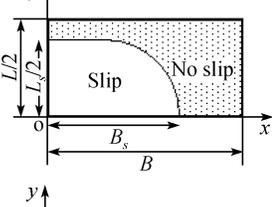
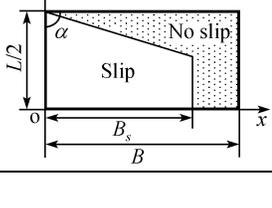
其中 $A$ 为滑块面积,  $q_s$ 为边界已知法向流量,  $p_s$ 为相应的边界未知压力. 将变分方程(11)在(9)式控制下进行变分, 并采用有限元技术和二次规划求解技术, 即可同时得到流体压力分布和滑移速度场<sup>[21]</sup>.

## 3 主要计算和优化结果

如图1所示有限长滑块轴承, 长度记为 $L$ , 宽度为 $B$ , 本文取 $L/B=1$ . 以最大流体动压承载力为目标函数, 滑块表面(表面a)控制滑移区域的几何尺寸为优化参数. 本文首先确定几种简单的初始滑移区域形状, 然后对相应的几何尺寸加以优化, 以此来获得一系列局部意义上的最优解. 采用线性三角形单元对区域进行划分, 利用结构对 $x$ 坐标轴的对称性, 只分析其二分之一区域. 此外, 为了便于分析对比, 采用无量纲参数: 无量纲极限剪应力 $\tau_L^* = (h_0 / U\eta) \tau_L$ ; 无量纲流体动压承载力 $W^* = (h_0^2 / U\eta B^2 L) W$ ; 沿 $x$ 轴向无量纲摩擦力 $F^* = (h_0 / U\eta BL) F$ ; 无量纲摩擦系数 $\mu^* = F^* / W^* = \mu \frac{B}{h}$ , 其中没有上标“\*”的为对应的有量纲量, 滑块收敛率 $\xi$ 定义为 $\xi = h_1 / h_0 - 1$ .

表1分别给出了几种滑移区的几何形状示意图、承载力优化结果以及优化后的相应的几何尺寸参数、摩擦力和摩擦系数, 并与经典无滑移承载力最优解及其他相应的变量进行了比较. 滑移区的优化几何参数是在 $\xi=1$ 情况下得到的. 表1示意图中“*No slip*”和“*Slip*”区域分别表示

表 1 滑移楔表面滑移区域几何尺寸、承载力优化结果和相应的摩擦力和摩擦系数与经典无滑移最优解的比较

序号	表面 a 的滑移区几何示意图	滑移区几何尺寸参数优化	滑块收敛率优化结果	承载力、摩擦力、摩擦系数优化结果	与经典无滑移最优解的对比
I		-	$\xi = 1.3$	$W_c^* = 0.0698$ $F_c^* = 0.663$ $\mu_c^* = 9.504$	$W_r^* = 1$ $F_r^* = 1$ $\mu_r^* = 1$
II		-	$\xi = 1.3$	$W_s^* = 0.035$ $F_s^* = 0.034$ $\mu_s^* = 0.97$	$W_r^* = 0.5$ $F_r^* = 0.05$ $\mu_r^* = 0.1$
III		$B_s / B \approx 0.55$	$\xi = 0$	$W_s^* = 0.122$ $F_s^* = 0.5998$ $\mu_s^* = 4.92$	$W_r^* = 1.74$ $F_r^* = 0.9$ $\mu_r^* = 0.52$
IV		$B_s / B \approx 0.65$ $L_s / L \approx 0.8$	$\xi = 0$	$W_s^* = 0.1588$ $F_s^* = 0.6470$ $\mu_s^* = 4.074$	$W_r^* = 2.28$ $F_r^* = 0.98$ $\mu_r^* = 0.43$
V		$\alpha \approx 45^\circ$ $B_s / B \approx 0.8$ $L_s / L \approx 0.9$	$\xi = 0$	$W_s^* = 0.1691$ $F_s^* = 0.6563$ $\mu_s^* = 3.881$	$W_r^* = 2.42$ $F_r^* = 0.99$ $\mu_r^* = 0.41$
VI		$B_s / B \approx 0.65$ $L_s / L \approx 0.9$	$\xi = 0$	$W_s^* = 0.1699$ $F_s^* = 0.6758$ $\mu_s^* = 3.978$	$W_r^* = 2.43$ $F_r^* = 1.02$ $\mu_r^* = 0.42$
VII		$\alpha \approx 70^\circ$ $B_s / B \approx 0.7$	$\xi = 0$	$W_s^* = 0.1743$ $F_s^* = 0.6469$ $\mu_s^* = 3.711$	$W_r^* = 2.50$ $F_r^* = 0.98$ $\mu_r^* = 0.41$

无滑移和理想滑移( $\tau_L^* = 0$ )两种状态, 下标 $c$ 表示经典无滑移解, 下标 $s$ 表示滑移楔的滑移解, 下标 $\max$ 表示最优解, 下标 $r$ 表示滑移最优解与无滑移最优解的比值. 由表 1 可以发现, 经典无滑移有限长滑块( $L/B = 1$ )在收敛率  $\xi = 1.3$  时获得最大承载力  $W_{c-\max}^* = 0.0698$  (I 号滑块), 而当整个表面 $a$ 上的流体发生理想滑移时, 其最大承载力  $W_{s-\max}^* = 0.0349$  (II 号滑块), 仅为经典无滑移滑块最大承载力的一半. 这与Spikes<sup>[16]</sup>研究的一维流动半湿润滑块轴承的结论一致. 通过优化滑移楔滑移区域的形状和几何尺寸, 可以获得的滑移楔最大承载力是经典几何收敛楔最大承载力的两倍以上, 而相应的摩擦力却相差无几, 反映在摩擦系数上则降低到经典几何收敛楔摩擦系数的约 41%~42%. 例如表中 VII 号滑移楔的最大承载力  $W_{s-\max}^* = 0.1743$ , 是  $W_{c-\max}^*$  的 2.5 倍, 而相应的摩擦系数则仅为几何收敛楔的 41%. 也就是说, 滑移楔可以获得较大的承载力, 但摩擦系数却很小. 此外, 滑移楔在  $\xi = 0$ , 即上下表面平行时, 获得最大承载力, 而传统几何收敛楔在  $\xi = 0$  时, 没有承载力<sup>[23]</sup>.

为了进一步说明传统几何收敛楔和滑移楔中收敛率  $\xi$  对承载力  $W^*$  和摩擦力  $F^*$  的不同影响, 图 3 给出了表 1 中 I, II, III 和 VII 号滑块的承载力、摩擦力与  $\xi$  的关系. 显而易见, 当滑块表面具有单一滑移特性时(液体在整个表面上无滑移或理想滑移), 滑块无量纲承载力  $W^*$  在  $\xi \approx 1.3$  时最大, 在  $\xi = 0$  时,  $W^* = 0$ . 对于具有复合滑移表面的滑移楔而言, 无量纲承载力  $W^*$  在  $\xi \approx 0$  时获得最大值. 另一方面, 当  $\xi$  在  $-0.5 \sim 1.5$  之间变化时, 承载力都始终能保持一个较高的水平, 从这个意义上来说滑移楔的承载力随  $\xi$  的变化并不十分敏感, 这一点对于系统的运行稳定性和安全性都是很有益处的. 但传统几何收敛楔对  $\xi$  却非常敏感, 尤其当  $\xi$  很小时, 其承载力也很小, 因而系统的稳定性较差. 由图 3(b) 可见, 表面液体完全无滑移的几何收敛楔和具有复合滑移表面的滑移楔, 摩擦力  $F^*$  随  $\xi$  的减小而增加. 但相对而言, 滑移楔摩擦力的变化趋势较为平缓, 而且处在一个较低的水平. 对于具有理想滑移表面, 摩擦力随  $\xi$  减小而减小,

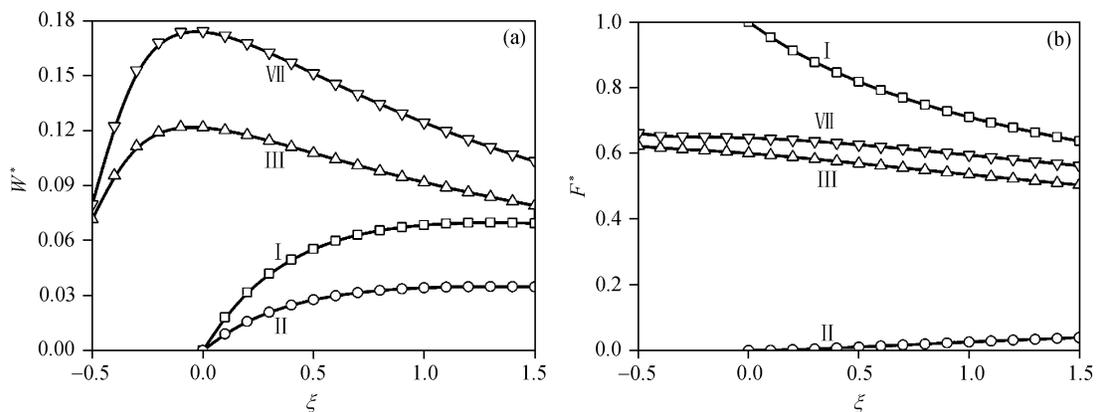


图 3 滑移楔和非滑移楔的性能比较

(a) 无量纲承载力; (b) 无量纲摩擦力

总体上也处于一个非常低的水平, 但流体动力效应却也同时减小.

为了分析滑移楔的流体动力学效应, 图 4(a)和(b)分别给出了 VII 号滑移楔获得最大承载力 ( $\xi = 0$ ) 时的压力分布及与其对应的无滑移楔在  $\xi = 1.3$  时的压力分布. 显然, 滑移楔和无滑移几何收敛楔的压力分布有着明显的差别, 实际上, 滑移楔的压力分布与阶梯轴承的压力分布非常相似. 此外, 在滑移和不滑移区域的交界处, 压力梯度发生突变, 而最大压力也发生在该交界线上. 图 5(a)给出了上滑块表面滑移速度场, 在滑块入口处滑移速度沿  $x$  轴正方向, 即与下表面运动方向一致. 图 5(b)是滑移楔间隙流动的流量随间隙收敛率的变化, 插图是对应的传统无滑移间隙流动的流量随间隙收敛率的变化. 由图 5 可以看出, 由于上表面存在滑移速度, 使得流入滑块间隙的流体流量增加. 但在滑块出口和两则边界附近, 由于没有界面滑移, 不存在加速流体流出间隙的外在机制, 为了保证流体流量守恒条件, 系统必然要提高压力来加速流体流出滑块间隙, 从而最终使滑移楔流体动压力提高. 这一点也解释了为什么 III 号滑移楔相对其他滑移楔来说最大承载力要小的多. 这是因为 III 号楔块在入口处两侧没有无滑移区域, 从而无法有效拟制流体从两侧泄漏, 最终使得流体动压力提高的程度在本文所有滑移楔中最小. 这也说明滑移楔的设计一方面要利用界面滑移来提高流体流入量, 另一方面又要利用无滑移边界来拟制流体从间隙中的流出, 在这两种趋势的作用下最终使滑移楔获得优异的流体动力学性能. 此外, 理想滑移区的存在, 又使得摩擦力整体上保持一个较低的水平, 实际上, 如果上下表面绝对平行时, 即  $\xi = 0$ , 则在理想滑移区域的摩擦力为零. 从而一定程度上解释了为何滑移楔在获得很高的承载力的同时却有非常低的摩擦系数.

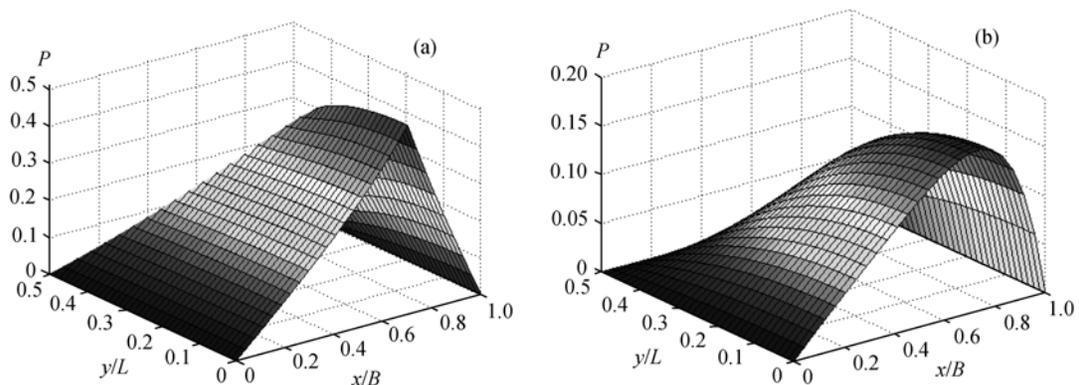


图 4 VII 号滑块在获得最大承载力时的压力分布(a)和相应无滑移几何收敛楔在  $\xi = 1.3$  时的压力分布(b)

## 4 讨论

本文主要研究了当静止表面为具有复合滑移特性的滑移楔的流体动力学效应, 滑移区为理想滑移表面(极限剪应力为零). 我们同时也研究了当滑移区表面极限剪应力为任意值时的流体动力学效应, 发现随着滑移区表面极限剪应力的增大, 流体动力学效应减弱, 最后与无滑移解相同. 固-液界面滑移特性受多种因素的影响, 如表面湿润性、粗糙度、流体黏度以及界面上可能存在的纳米气泡等, 其中表面湿润性和粗糙度目前被认为是最重要的两个影响因素.

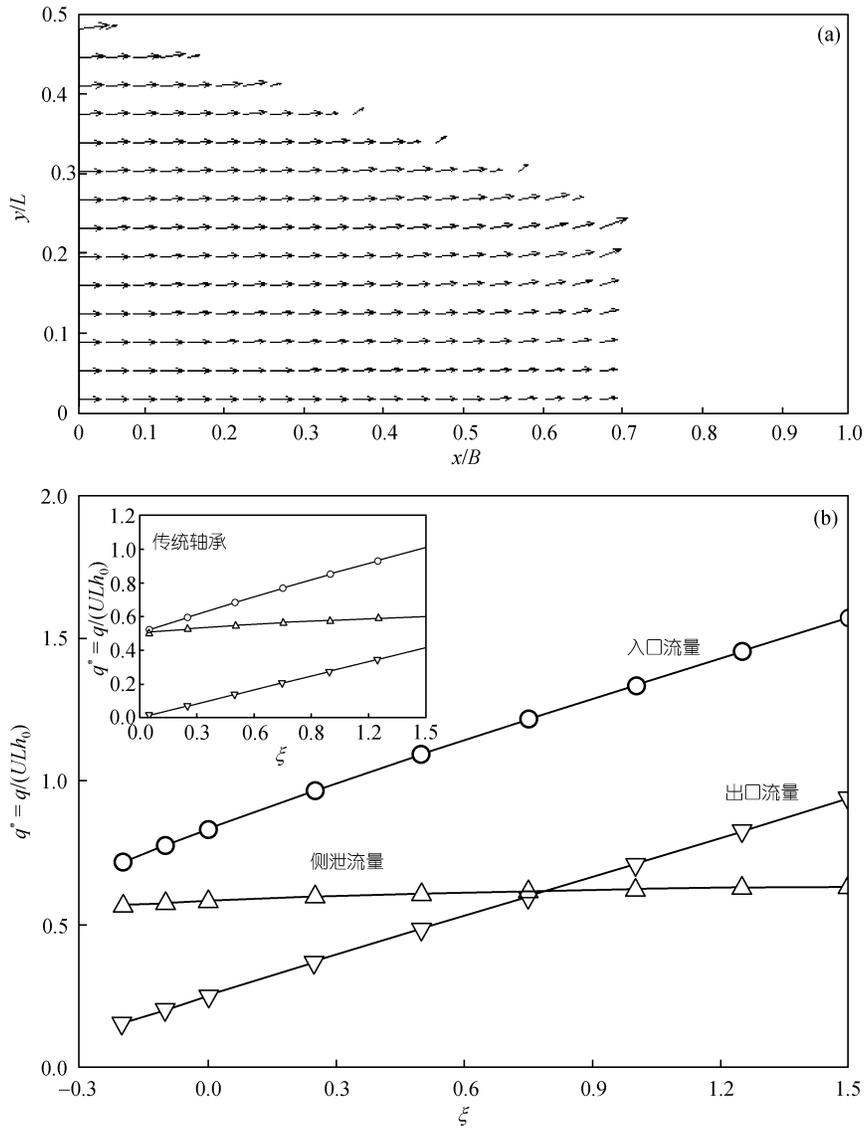


图5 VII号滑块在获得最大承载力时的滑移速度场(a)和流量随楔块收敛率的变化(b)

湿润性反映的是界面上固液分子间相互作用的强弱, 湿润性好, 则意味着相互作用强; 湿润性差, 意味着相互作用弱. 如果用表面极限剪应力来描述, 则前者表面极限剪应力大, 后者较小. 从已有的实验结果来看, 极限剪应力介于  $0.1 \text{ Pa} \sim 1 \text{ MPa}$  这个量级之间, 亲水性表面该值较大, 如油-钢界面上的极限剪应力在  $0.16 \sim 8 \text{ MPa}$  之间 [15]. 而超级憎水性表面该值很小, 目前测得的最小值达到  $0.33 \text{ Pa}$  [7-9,11], 可以近似为理想滑移表面. 总之, 湿润性越差, 界面滑移越容易发生. 至于粗糙度的影响, 目前存在着两种截然不同观点, Pit等人 [3]和Zhu等人 [6]认为粗糙度抑制界面滑移, 而Bonaccorso等人 [24]和Craig等人 [5]则认为粗糙度促进界面滑移. 需要指出的是,

这些影响因素之间并不是孤立的, 而是互相耦合的, 界面滑移特性的设计需要综合考虑上述各因素. 表面极限剪切应力可以采用多种办法控制, 目前主要采用化学(控制表面湿润性)和机械加工(控制表面粗糙度)的办法.

我们也可以改变运动表面的滑移特性来改变滑移间隙的流体动力学效应. 但是我们发现如果降低运动表面的表面极限剪切应力, 使得产生一定的界面滑移, 流体动力学效应会大为减小. 如果把运动表面设计为复合滑移表面, 系统处于非稳态状态, 工程应用价值不大.

## 5 结论

本文提出了滑移楔的概念. 分析结果表明, 通过调整滑移楔复合表面滑移区域的几何形状和尺寸, 可以使滑移楔具有较传统几何收敛楔优越许多的动力学性能, 主要有以下几点:

- (i) 经过对滑移区域的优化, 滑移楔可以获得是传统几何收敛楔两倍以上最大流体动压承载力;
- (ii) 滑移楔在获得高承载力的同时, 却具有较低的摩擦力和摩擦系数;
- (iii) 一般来说, 滑移楔在滑块收敛率  $\xi = 0$  时获得最大流体承载力. 当  $\xi$  处在一个较大范围变化时, 系统流体动压力始终处在一个很高的水平, 这有利于提高系统的运行稳定性.

## 参考文献

- 1 Reynolds O. On the theory of lubrication and its application to Mr Beauchamp Tomer's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Phil Trans Roy Soc*, 1886, 177: 157—167
- 2 Cameron A. The viscosity wedge. *ASLE Trans*, 1958, 1: 248—253
- 3 Pit R, Hervet H, Leger L. Direct experimental evidence of slip in hexadecane: Solid interfaces. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 980—983 [\[DOI\]](#)
- 4 Hervet H, Leger L. Flow with slip at wall: From simple to complex fluids. *C R Phys*, 2003, 4: 241—249 [\[DOI\]](#)
- 5 Craig V S J, Neto C, Williams R M. Shear-dependent boundary slip in an aqueous Newtonian liquid. *Phys Rev Lett*, 2000, 87: 054504 [\[DOI\]](#)
- 6 Zhu Y X, Granick S. Rate-dependence slip of Newtonian liquid at smooth surfaces. *Phys Rev Lett*, 2001, 87: 096105 [\[DOI\]](#)
- 7 Zhu Y X, Granick S. Limits of the hydrodynamic no-slip boundary condition. *Phys Rev Lett*, 2002, 88: 106102 [\[DOI\]](#)
- 8 Zhu Y X, Granick S. No-slip boundary condition switches to partial slip when fluid contains surfactant. *Langmuir*, 2002, 18: 10058—10063
- 9 Granick S, Zhu Y, Lee H. Slippery questions about complex fluids flowing past solids. *Nat Mater*, 2003, 2: 221—227 [\[DOI\]](#)
- 10 Kassner M E, Nemat-Nasser S, Suo Z, et al. New directions in mechanics. *Mech Mater*, 2005, 37: 231—259 [\[DOI\]](#)
- 11 吴承伟, 马国军. 关于流体流动的边界滑移. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2004, 34(6): 681—690
- 12 Thompson P R, Troian S M. A general boundary condition for fluid flow at solid surfaces. *Nature*, 1997, 389: 360—362
- 13 王惠, 胡元中, 邹鲲, 等. 纳米摩擦学的分子动力学模拟研究. *中国科学 A 辑: 数学 物理学 天文学*, 2001, 31(3): 261—266
- 14 Wu C W, Ma G J. Abnormal behavior of a hydrodynamic lubrication journal bearing caused by wall slip. *Tribol Int*, 2005, 38: 492—499 [\[DOI\]](#)
- 15 Wu C W, Ma G J, Sun H S. Viscoplastic lubrication analysis in a metal-rolling inlet zone using parametric quad-

- matic programming. *ASME J Tribol*, 2005, 127: 605—610[[DOI](#)]
- 16 Spikes H A. The half-wetted bearing. Part 1: Extended Reynolds equation. *Proc Instn Mech Eng Part J-J Eng Tribol*, 2003, 217: 1—14
- 17 Spikes H A. The half-wetted bearing. Part 2: Potential application in low load contacts. *Proc Instn Mech Eng Part J-J Eng Tribol*, 2003, 217: 15—26
- 18 Salant R F, Fortier A E. Numerical analysis of a slider bearing with a heterogeneous slip/no-slip surface. *Tribol Trans*, 2004, 47: 328—334[[DOI](#)]
- 19 Spikes H A, Granick S. Equation for slip of simple liquids at smooth solid surfaces. *Langmuir*, 2003, 19: 5065—5071[[DOI](#)]
- 20 Stahl J, Jacobson B O. A lubricant model considering wall-slip in EHL line contacts. *ASME J Tribol*, 2003, 125: 523—532[[DOI](#)]
- 21 钟万勰, 张洪武, 吴承伟. 参变量变分原理及其工程应用. 北京: 科学出版社, 1997
- 22 Huebner K H. *The Finite Element Method for Engineers*. New York: Wiley, 1975
- 23 Cameron A. *Basic Lubrication Theory*. 3rd ed. Chichester: Ellis Horwood Ltd, 1981
- 24 Bonaccorso E, Kappl M, Butt H J. Hydrodynamic force measurements: Boundary slip of hydrophilic surfaces and electrokinetic effects. *Phys Rev Lett*, 2002, 88: 076103[[DOI](#)]