

Bombieri 定理的一个推广及其应用*

林家发 展 涛

(山东大学数学系, 济南 250100)

摘要 利用 Hooley-Huxley 围道, 证明生成函数满足一定条件的一类数论函数均具有 Bombieri 均值估计性质. 同时给出这一结论在“Dirichlet L -函数的倒数均值估计”、“可表为两个平方和的自然数在算术级数中分布均匀性”等问题中的应用.

关键词 Bombieri 定理 Dirichlet L -函数 均值估计

1965 年, Bombieri^[1] 和 Vinogradov^[2] 分别独立地证明了下面的均值定理: 任给 $A > 0$ 有

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a, q)=1} \max_{y \leq x} \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n) - \frac{y}{\varphi(q)} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A}, \quad (1)$$

其中 $Q = x^{1/2}(\log x)^{-B}$, $B = B(A) > 0$ (Bombieri 的结论比 Vinogradov 的稍强些). 由于这一均值估计在解析数论的许多经典课题中有着广泛的应用, 不少学者对此进行了各种推广和深化: 1975 年潘承洞和丁夏畦^[3] 给出了加权形式的 Bombieri 均值定理; 1986 年 Bombieri, Iwaniec 和 Friedlander 等人证明满足一定条件的数论函数具有 Bombieri 均值性质, 并讨论了大模的 Bombieri 定理^[4]. 在本文中, 我们证明了满足一定条件的一类数论函数均具有 Bombieri 均值估计性质, 同时给出这一结论的两个应用.

定理 1 设数论函数 $f(n) \ll n$ 满足条件: 对任意的 m , $q \leq x$, $\chi \pmod{q}$, 及 $\operatorname{Re} s > 1$, $f(n)$ 所对应的 Dirichlet 级数

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n, m)=1}}^{\infty} f(n) \chi(n) n^{-s} = G_0(m, s, \chi) L^{\alpha_1}(s, \chi) (L'(s, \chi))^{\alpha_2} + G_1(m, s, \chi), \quad (2)$$

其中 α_1 为任意复数, $\alpha_2 \geq 0$; 而 $G_0(m, s, \chi)$ 和 $G_1(m, s, \chi)$ 在 $\operatorname{Re} s > 1/2 + \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 > 0$ 为任意实数) 上解析, 且对 m , $q \leq x$, 有 $\lambda_1 > 0$, 使

$$G_0(m, s, \chi) \ll (\log x)^{\lambda_1} \quad (\operatorname{Re} s > 1/2 + \varepsilon_1),$$

$$G_1(m, s, \chi) \ll (\log x)^{\lambda_1} \quad (\operatorname{Re} s > 1/2 + \varepsilon_1),$$

在上述条件成立下, 我们有: 任给 $0 < \varepsilon < 1/2$ 及实数 $A > 0$,

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a, q)=1} \max_{y \leq x} \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \pmod{q}}} f(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq y \\ (n, q)=1}} f(n) \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A} \quad (3)$$

成立, 其中 $Q = x^{1/2-\varepsilon}$.

定理 1 的条件与文献[4] 中给出的具有 Bombieri 均值性质的函数之条件是互不包含的. 另外, 定理 1 包含了 Bombieri 定理. 因为取 $f(n) = \Lambda(n)$, 定理 1 的条件是满足的, 只是结论中模 q 的范围稍弱. 定理 1 的证明借助于一个改进了的 Hooley-Huxley 围道, 将问题转化成可以利用大筛法型零点密度估计等解析工具来处理的形式, 这一证明的思想源于文献[5].

作为定理 1 的第一个应用, 我们讨论了 Dirichlet L -函数在 $s=1$ 上的幂次均值估计. 这一问题最近由张文鹏^[6~8]作了研究, 给定实数 $\alpha > 0$, 令

$$r(n) = r(n, \alpha) = d_{-\alpha}(n) = \prod_{p^j | n} (-1)^j \binom{\alpha}{j}, \quad (4)$$

$$A(q) = A(q, \alpha) = \prod_{p|q} \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^2} + \cdots + \frac{r^2(p^n)}{p^{2n}} + \cdots \right), \quad (5)$$

对于均值估计

$$\sum_{q \leq x} \frac{A(q)}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \frac{1}{|L(1, \chi)|^{2\alpha}},$$

文献[6, 7] 分别对 α 为 $1/2$ 和自然数的情形, 得到了渐近公式, 证明了对 $\alpha=1$, 相应的误差项为 $O(\log^5 x)$; 对自然数 $\alpha \geq 2$, 相应的误差项则为 $O(\exp(c \log x / \log \log x))$; 对 $\alpha=1/2$, 相应的误差项为 $O(x^{1/2})$. 我们应用定理 1, 对上述的结果进行了大幅度改进, 一方面我们把幂次 α 扩充为任意正实数; 另一方面, 将误差项全部改进为对数幂次. 在证明中, 我们将利用定理 1 中 α_1 为任意实数的情形, 因此下面的定理 2 不能用原始的 Bombieri 定理得到.

定理 2 给定实数 $\alpha > 0$, $r(n)$ 及 $A(q)$ 由 (4) 和 (5) 式给定, 则对 $x \geq 2$, 有

$$\sum_{q \leq x} \frac{A(q)}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \frac{1}{|L(1, \chi)|^{2\alpha}} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2(n)}{n^2} + O((\log x)^{c(\alpha)}), \quad (6)$$

其中 $c(\alpha) = \alpha^2/2 + 3\alpha/2 + 7/2$.

另外, 文献[8] 对 $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, 得到

$$\sum_{q \leq x} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q \neq \chi_0} \frac{|L'(1, \chi)|^{2\alpha_2}}{|L(1, \chi)|^{\alpha_1}}$$

的渐近公式. 利用定理 2 的方法, 我们不难得到上述均值对任意 $\alpha_1 > 0$ 及 α_2 为自然数时的渐近公式.

作为定理 1 的第二个应用, 我们讨论了可表为两个平方和的自然数在算术级数中的分布均匀性. 设 $b(n)$ 为这类自然数的特征函数, 对于 $b(n)$ 在算术级数中的均值估计, 目前仅见的是 Iwaniec^[9] 给出的, 他得到: 当 $(4, d) = 1$, $(a, b) = 1$ 时,

$$\Delta(x; d, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{d}}} b(n) - \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{n \leq x \\ (a, d) = 1}} b(n) = o\left(\frac{x}{\varphi(d)(\log x)^{1/2}}\right)$$

对 $d < x^{\varepsilon(x)}$ 一致成立, $\varepsilon(x)$ 为任一趋于 0 的函数 ($x \rightarrow \infty$). 而作为定理 1 证明方法的直接应用, 我们得到

定理 3 对 $x \geq 2$, 任给实数 $A > 0$ 及 $1/2 > \varepsilon > 0$, 有

$$\sum_{\substack{d < x^{(1/2)-\varepsilon} \\ (d, d)=1}} \max_{(a, d)=1} \max_{y \leq x} |\Delta(y; d, a)| \ll x(\log x)^{-A},$$

其中 $\ll$ 隐含的常数仅与 ε, A 有关.

1 定理 1 的证明

首先我们给出一些记号: $\log_2 x = \log \log x$, $\log_m x = \log(\log_{m-1} x) (m \geq 2)$, $\sum_{m \sim M}$ 表示对 $M < m \leq M' \leq 2M$ 的 m 求和; 而 $R(\sigma_1, \sigma_2, T_1, T_2)$ 表示顶点为如下四点的矩形:

$$\sigma_1 + iT_1, \sigma_1 + iT_2, \sigma_2 + iT_1, \sigma_2 + iT_2,$$

此外, $c_i (i=1, 2, \dots)$ 表示绝对常数, $c > 0$ 为常数 (每次出现可能取值不同), $\varepsilon, \varepsilon'$ 为充分小的正常数, 且 $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

下面的这类围道是由 Ramachandra^[10] 首先给出的, 他称之为 Hooley-Huxley 围道. 我们这里给出一种改进的 Hooley-Huxley 围道 $\Gamma(\chi)$, 其定义如下:

令 $R_n (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 表示矩形 $R(1/2, 1+1/\log x, (40n+20)(\log x)^2, (40n-20)(\log x)^2)$, 其中 $|(40n \pm 20)(\log x)^2| \leq 2x^2$. 令 σ 为 $L(s, \chi_q) (\chi_q \neq \chi_0)$ 在 $R_{n-1} \cup R_n \cup R_{n+1}$ 中零点实部的最大值, B 为一待定常数, n_0 为 $|(40n \pm 20)(\log x)^2| \leq (\log x)^B$ 的最大整数解, 重新定义 R_n 的右边界如下:

(1) 若 $q \leq (\log x)^B, n \leq n_0$,

$$l_n: \operatorname{Re} s = \sigma_0, |\operatorname{Im} s - 40n(\log x)^2| \leq 20(\log x)^2,$$

σ_0 由下面的引理 1 给出;

(2) 若 $(\log x)^B < q \leq x^{1/2}$ 或者 $n > n_0$ 成立, 且 $1/2 \leq \sigma < \theta$,

$$l_n: \operatorname{Re} s = \sigma + \varepsilon'(1 - \sigma), |\operatorname{Im} s - 40n(\log x)^2| \leq 20(\log x)^2;$$

(3) 若 $(\log x)^B < q \leq x^{1/2}$ 或者 $n > n_0$ 成立, 且 $\sigma \geq \theta$,

$$l_n: \operatorname{Re} s = 1 + \frac{1}{\log x}, |\operatorname{Im} s - 40n(\log x)^2| \leq 20(\log x)^2,$$

上述的 $\theta = 19/20$.

用水平线 l_n 连接 l_n 及 $l_{n+1} (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. 于是得到包含所有的 l_n 及 l_n (或其中一部分) 组成的围道 $\Gamma_1(\chi) (|\operatorname{Im} s| \leq T_0, x^2 - 1 \leq T_0 \leq x^2, T_0$ 使 $L(s, \chi)$ 的所有零点虚部距 T_0 的距离 $\gg 1/\log x$). 用水平线连接 $1+1/\log x \pm iT_0$ 到 $\Gamma_1(\chi)$, 得到 $l(T_0)$ 及 $l(-T_0)$ (有可能不需用 $l(T_0)$ 及 $l(-T_0)$). 于是所求围道:

$$\Gamma(\chi) = \Gamma(x, \chi) = \Gamma_1(\chi) \cup \{l(T_0), l(-T_0)\}.$$

下面给出几个引理.

引理 1 若 $q \leq (\log x)^B, |\operatorname{Im} s| \leq (\log x)^B$, 则有 c_1 存在, 使

$$\operatorname{Re} s \geq 1 - \frac{c_1}{(\log x)^{1/2}} = \sigma_0$$

时 $L(s, \chi)$ 无零点, 且

$$\log|L(s, \chi)| \ll (\log_2 x)^2. \quad (7)$$

证 该引理由 Siegel 定理^[1] 和下面的公式即得:

$$\log L(s, \chi) = \log(s + \delta) + \sum_{|v-t| \leq 1} \log(s - \rho) + O(\log(q|t| + 2)),$$

其中 $\delta = (1 - \chi(-1))/2$, ρ 为 $L(s, \chi)$ 的零点, $v = \text{Im } \rho$.

引理 2^[9] 令

$$0 < \varepsilon' \leq d \leq 1, \chi \neq \chi_0(\text{mod } q), 1 \leq q \leq x^{1/2}, u = 0, \pm 40(\log x)^2, \pm 80(\log x)^2, \dots,$$

$$|u| \leq 2x^2.$$

设 σ 为在区域

$$R(1/2, 1 + 1/\log x, u + 60(\log x)^2, u - 60(\log x)^2)$$

内 $L(s, \chi)$ 所有零点实部的最大值. 则对 $u \neq 0$ 及

$$s \in R(\sigma + d(1 - \sigma), 1 + 1/\log x, u + 22(\log x)^2, u - 22(\log x)^2),$$

$$\log L(s, \chi) \ll (\log(q|t| + 1))^{1-d} \log_2(q|t| + 1).$$

在 $u = 0$ 条件下, 对 $\chi \neq \tilde{\chi}$ ($\tilde{\chi}$ 为可能的 Siegel 例外特征) 及

$$s \in R(\sigma + d(1 - \sigma), 1 + 1/\log x, 22(\log x)^2, -22(\log x)^2),$$

有

$$\log L(s, \chi) \ll (\log q + \log_2 x)^{1-d} \log_2 x. \quad (8)$$

下面给出定理 1 的证明.

记 $S(Q, f, x)$ 表示 (3) 式左边, 由特征性质不难得到

$$S(Q, f, x) \ll \log x \sum_{1 < q \leq Q} \frac{1}{\varphi(q)} \max_{y \leq x} \max_{m \leq Q} \sum_{\chi_q}^* \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ (n, m) = 1}} f(n) \chi(n) \right|,$$

这里 $\sum_{\chi_q}^*$ 表示对所有原特征求和. 由 Perron 公式及 (2) 式有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq y \\ (n, m) = 1}} f(n) \chi(n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1 + \frac{1}{\log x} - ix^2}^{1 + \frac{1}{\log x} + ix^2} \frac{y^s}{s} G_0(m, s, \chi) L^{\alpha_1}(s, \chi) (L'(s, \chi))^{\alpha_2} ds + O(x^{1/2+\varepsilon}) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\alpha)} \frac{y^s}{s} G_0(m, s, \chi) L^{\alpha_1}(s, \chi) (L'(s, \chi))^{\alpha_2} ds + O(x^{1/2+\varepsilon}) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1(\alpha)} \frac{y^s}{s} G_0(m, s, \chi) L^{\alpha_1}(s, \chi) (L'(s, \chi))^{\alpha_2} ds + O(x^{1/2+\varepsilon}), \end{aligned} \quad (9)$$

而由 $\Gamma_1(\chi)$ 的构造可见, 当 $s \in \Gamma_1(\chi)$ 时,

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{|t-\gamma_n| \leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\log q(|t|+1)) \ll \log^2 q(|t|+1),$$

从而有

$$S(Q, f, \chi) \ll (\log x)^{2\alpha_2 + \lambda_1 + 1} \sum_{1 < q \leq Q} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_q^* \int_{\Gamma_1(Q)} \frac{x^\sigma}{|s|} |L^{\alpha_1 + \alpha_2}(s, \chi)| |ds|,$$

于是定理 1 的证明归结于证明: 在

$$\begin{cases} 1/2 + \varepsilon'/2 \leq \operatorname{Re} s \leq 1 + 1/\log x, \\ q \sim Q_1 (1 < Q_1 \leq q \leq Q'_1 \leq 2Q_1 \leq Q), \\ 0 \leq T_1 < T'_1 = \max(T_1 + 1, 2T_1) \leq T_0 \end{cases} \quad (10)$$

条件下, 有

$$R = \sum_{q \sim Q_1} \sum_q^* \int_{T_1}^{T'_1} x^\sigma |L^{\alpha_1 + \alpha_2}(s, \chi)| |ds| \ll Q_1 T'_1 x (\log x)^{-A_1}, \quad (11)$$

其中 $A_1 = -A - 2\alpha_2 - \lambda_1 - 3$.

分两种情况证明 (11) 式在条件 (10) 下成立.

1. $Q_1 \geq (\log x)^B$. 同文献[5]中定理 1 的证明一样, 此时又将 $\sigma = \operatorname{Re} s$ 分为两种情形: 第一种情形, $1/2 + \varepsilon'/2 \leq \sigma \leq \theta + \varepsilon'(1 + \theta) = 19/20 + \varepsilon'/20 = \theta_1 < 1$; 第二种情形, $\theta_1 < \sigma \leq 1 + 1/\log x$. 对这两种情形, 利用 Ingham 的零点密度估计^[10]:

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq Q} \sum_q^* N(\sigma', T'_1, \chi) &\ll (Q_1^2 T'_1)^{3(1-\sigma')(2-\sigma')} (\log Q_1 T'_1)^{12} \ll \\ &Q_1^{10/3 - 8\sigma/3 + \varepsilon'} (T'_1)^{5/3 - 4(\sigma - \varepsilon')/3(1-\sigma)} (\log x)^{12}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\sigma = \sigma' + \varepsilon'(1 - \sigma')$, 完全类似文献[5]中定理 1 在 $Q_1 \geq (\log x)^B$ 下的证明, 可证得对某个可以选择出的 $B > 0$ 使 (11) 式在 (10) 式下成立, 详细过程见文献[5].

2. $Q_1 \leq (\log x)^B$ 首先假设 $T_1 > (40n_0 + 20)(\log x)^2$, 由 n_0 的选择有 $T_1 \gg (\log x)^B$. 而 (12) 式右边有一个关于 T_1 的因子

$$(T'_1)^{5/3 - 4(\sigma - \varepsilon')/3(1-\sigma)},$$

而

$$5/3 - 4(\sigma - \varepsilon')/3(1-\sigma) \leq 1, \quad \sigma \geq 1/2 + \varepsilon'/2,$$

$$5/3 - 4(\sigma - \varepsilon')/3(1-\sigma) \leq 1/2, \quad \sigma \geq \theta,$$

因此对 $T_1 > (40n_0 + 20)(\log x)^2$ 完全可照 $Q_1 > (\log x)^B$ 的情形证明 (11) 式成立. 对 $Q_1 \leq (\log x)^B$, $T_1 \leq (40n_0 + 20)(\log x)^2 \ll (\log x)^B$, 由引理 1, 得到: 当 $s \in \Gamma(\chi)$ 时,

$$x^s L^{\alpha_1 + \alpha_2}(s, \chi) \ll x^{1-c/(\log x)^{1/2}} \exp(c'(\log_2 x)^2) \ll x \exp(-c(\log x)^{1/2}).$$

从而这时 (11) 式亦成立. 至此, 定理 1 得到证明.

2 定理 2 的证明

引理 3 固定 $\alpha > 0$, 而 $x \geq 2$, 有

$$\sum_{n \leq x} \frac{|r(n)|}{n} \ll (\log x)^{\alpha+1}, \quad \sum_{n \leq x} \frac{r^2(n)}{n} \ll (\log x)^{(\alpha+1)^2}.$$

证 由 $r(n)$ 的定义可见, $r(n) \ll d_{[\alpha]+1}(n)$, 从而有第一个估计式. 至于第二个估计式, 由除数函数的可乘性, 只要证明 $d_{[\alpha]+1}^2(p^j) \ll d_{([\alpha]+1)^2}(p^j)$ (j 为自然数) 即可. 令 $k = [\alpha] + 1$, 这一估计由下面两式即得:

$$d_k(p^j) = \binom{k+j-1}{j},$$

$$(k^2 + j - 1)j \geq (k + 1 - j)^2, \quad j \geq 1.$$

引理 4 对 $x \geq 2$, $\alpha > 0$, 有

$$\sum_{q \leq x} \frac{A(q)}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \left| \sum_{n \leq x^4} \frac{r(n)\chi(n)}{n} \right|^2 = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2(n)}{n^2} + O((\log x)^{x^2/2 + 3\alpha/2 + 7/2}).$$

证 由特征的正交性得

$$\begin{aligned} \sum_{\chi_q} \left| \sum_{n \leq x^4} \frac{r(n)\chi(n)}{n} \right|^2 &= \varphi(q) \sum_{\substack{n \leq x^4 \\ (n, q)=1}} \frac{r^2(n)}{n^2} + 2\varphi(q) \sum_{\substack{n \leq x^4 \\ (n, q)=1}} \frac{r(n)}{n} \sum_{\substack{n < m \leq x^4 \\ m \equiv n \pmod{q}}} \frac{r(m)}{m} = \\ &= \varphi(q) \sum_{\substack{n=1 \\ (n, q)=1}}^{\infty} \frac{r^2(n)}{n^2} + O\left(\varphi(q) \sum_{n > x^4} \frac{d_{[\alpha]+1}^2(n)}{n^2}\right) + \\ &= O\left(\varphi(q) \sum_{n < x^4} \frac{|r(n)|}{n} \sum_{\substack{n < m \leq x^4 \\ m \equiv n \pmod{q}}} \frac{|r(m)|}{m}\right), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq x} \frac{A(q)}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \left| \sum_{n \leq x^4} \frac{r(n)\chi(n)}{n} \right|^2 &= \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2(n)}{n^2} + O(1) + O\left(\sum_{n < x^4} \frac{|r(n)|}{n} \times \left(\sum_{m \leq x^4} \frac{|r(m)|^2}{m} \sum_{n < m \leq x^4} \frac{d^2(n-m)}{m}\right)^{1/2}\right) = \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2(n)}{n^2} + O((\log x)^{\alpha^2/2 + 3\alpha/2 + 7/2}) \end{aligned}$$

(主项的计算利用了 $r(n)$ 可乘性).

引理 5 对 $x \geq 2$, $y \geq x^4$, 有

$$\sum_{q \leq x} \max_{(a, q)=1} \max_{x \leq y} \left| \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} r(n) \right| \ll_A y (\log y)^{-A},$$

证 由 $r(n)$ 的定义可见

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n, m)=1}}^{\infty} \frac{r(n)\chi(n)}{n^s} = L^{-\alpha}(s, \chi) \prod_{p|m} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{r(p^j)\chi^j(p)}{p^{js}} \right),$$

如果有下式, 由定理 1 显然即可得到引理 5:

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ (n, q)=1}} r(n) \ll y (\log y)^{-A-3}.$$

由 Perron 公式及 $\zeta^{-\alpha}(s)$ 的解析性, 得

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ (n, q)=1}} r(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\frac{c}{(\log y)^{3/4}} - iy^2}^{1-\frac{c}{(\log y)^{3/4}} + iy^2} \frac{y^s}{s} \zeta^{-\alpha}(s) \sum_{p|q} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r(p^j)}{p^{js}} \right) ds + O\left(\frac{1}{y}\right) \ll$$

$$y^{1-c/(\log y)^{3/4}} \times (\log y)^{c'} \ll y (\log y)^{-A-3},$$

于是引理 5 得到证明.

引理 6 对 $y > N = x^4$, 有

$$\sum_{q \leq x} \frac{A(q)}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \left(\sum_{n \leq N} \frac{r(n)\chi(n)}{n} \right) A(y, \bar{\chi}) \ll_A y (\log y)^{-A+\alpha+1},$$

其中

$$A(y, \chi) = \sum_{N < n \leq y} r(n)\chi(n).$$

证 由特征的性质, 得

$$\sum_{\chi_q} \left(\sum_{n \leq N} \frac{r(n)\chi(n)}{n} \right) A(y, \bar{\chi}) = \varphi(q) \sum_{n \leq N} \frac{r(n)}{n} \sum_{\substack{N < m \leq y \\ m \equiv n \pmod{q}}} r(m),$$

从而利用引理 5 及 $A(q) \ll 1$ 得

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq x} \frac{A(q)}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \left(\sum_{n \leq N} \frac{r(n)\chi(n)}{n} \right) A(y, \bar{\chi}) &\ll \\ \sum_{n \leq N} \frac{|r(n)|}{n} \sum_{q \leq x} \max_{(a, q)=1} \max_{z \leq y} \left| \sum_{\substack{m \leq z \\ m \equiv a \pmod{q}}} r(m) \right| &\ll y (\log y)^{-A+\alpha+1}. \end{aligned}$$

引理 7 对 $x > 2$, 有

$$\sum_{q \leq x} \frac{A(q)}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \left| \int_N^{\infty} \frac{A(y, \chi)}{y^2} dy \right|^2 \ll (\log x)^{-A+\alpha+2}.$$

证明的方法与引理 6 相同, 从略.

下面证明定理 2. 由于 $\operatorname{Re} s > 1$ 时,

$$L^{-\alpha}(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)\chi(n)}{n^s},$$

由 Abel 求和公式, 得

$$L^{-\alpha}(s, \chi) = \sum_{n \leq N} \frac{r(n)\chi(n)}{n^s} + s \int_N^{\infty} \frac{A(y, \chi)}{y^{s+1}} dy,$$

从而由引理 4, 6, 7, 取 $A = \alpha + 4$, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq x} \frac{A(q)}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \frac{1}{|L(s, \chi)|^{2\alpha}} &= \sum_{q \leq x} \frac{A(q)}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \left| \sum_{n \leq N} \frac{r(n)\chi(n)}{n^s} \right|^2 + \\ &2\operatorname{Re} \left(\sum_{q \leq x} \frac{A(q)}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \left(\sum_{n \leq N} \frac{r(n)\chi(n)}{n} \int_N^{\infty} \frac{A(y, \bar{\chi})}{y^2} dy \right) \right) + \\ &\sum_{q \leq x} \frac{A(q)}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \left| \int_N^{\infty} \frac{A(y, \chi)}{y^2} dy \right|^2 = \\ &x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2(n)}{n^2} + O((\log x)^{x^2/2+3\alpha/2+7/2}) + O \left(\int_N^{\infty} y^{-2} \times y \log^3 y dy \right) + \\ &O((\log x)^{-2}) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2(n)}{n^2} + O((\log x)^{x^2/2+3\alpha/2+7/2}). \end{aligned}$$

3 定理 3 的证明

定理 3 是下面的引理 9, 10 的直接推论, 而引理 8 是文献[11] 中的定理 13.2.4.

引理 8^[11] 若 $(q_1, q_2) = 1$, 则模 q_1, q_2 的特征 $\chi_{q_1 q_2} = \chi_{q_1} \chi_{q_2}$ 为原特征的充要条件为 χ_{q_1}, χ_{q_2} 分别是模 q_1, q_2 的原特征.

引理 9 设 $f(n)$ 为一给定的数论函数, $f(n) \ll n$, 且对任意自然数 m, q 和 $\chi \pmod{q}$,

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (m, n)=1}}^{\infty} \frac{f(n)\chi(n)}{n^s} = G_0(s, m, \chi) L^{A_1}(s, \chi) L^{A_2}(s, \chi \chi_{A_3}), \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

其中 A_1, A_2 为实数, A_3 为自然数, χ_{A_3} 为模 A_3 的原特征. 而当 $\operatorname{Re} s > 1/2 + \varepsilon$ 时, 对 $m \leq x, q \leq x$, 有 $c > 0$, 使

$$G_0(s, m, \chi) \ll \exp(c(\log x)^{1-\varepsilon}).$$

则对任给 $A > 0$ 及 $0 < \varepsilon < 1/2$, 有

$$\sum_{\substack{q < x^{1/2-\varepsilon} \\ (a, A_3)=1}} \max_{\substack{(a, q)=1 \\ y \leq x}} \max_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \pmod{q}}} \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \pmod{q}}} f(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq y \\ (n, q)=1}} f(n) \right| \ll x (\log x)^{-A},$$

其中 $\ll$ 隐含的常数依赖于 ε, A 和 A_1, A_2, A_3 .

引理的证明同定理 1 一样依靠 Hooley-Huxley 围道, 将问题转化为能够利用大筛法零点密度估计来处理. 由于引理 8 的存在, 可选择 c_1 使引理 1 的估计对 $L(s, \chi)$ 及 $L(s, \chi\chi_{A_3})$ 成立, 因此除了 Hooley-Huxley 的选择略有不同外, 其余证明完全相同, 我们从略, 只给出新的围道 $\Gamma'(\chi)$. $\Gamma'(\chi)$ 的构造同 $\Gamma(\chi)$ 差不多, 只是在构造 $\Gamma(\chi)$ 时, σ 为 $L(s, \chi)$ 在 $R_n \cup R_{n-1} \cup R_{n+1}$ 内的零点实部最大值. 此时, 我们令 σ 为 $L(s, \chi)L(s, \chi\chi_{A_3})$ 在 $R_n \cup R_{n-1} \cup R_{n+1}$ 内的零点实部最大值, 同样地重新构造 R_n 的右边界 l_n , 从而同构造 $\Gamma(\chi)$ 一样构造 $\Gamma'(\chi)$.

引理 10 $\chi \bmod q$, 令

$$F(s, \chi, m) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n, m)=1}} \frac{b(n)}{n^s} \chi(n), \operatorname{Re} s > 1,$$

则有, 对 $\operatorname{Re} s > 1$,

$$F(s, \chi, m) = g_0(s, \chi) \sqrt{L(s, \chi)L(s, \chi\chi_4)} G_2(s, \chi, m), \quad (13)$$

其中

$$g_0(s, \chi) = \prod_{p \equiv 3(\bmod 4)} \left(1 - \frac{\chi^2(p)}{p^{2s}} \right)^{1/2},$$

$$G_2(s, \chi, m) = \left(\prod_{\substack{p|m \\ p \equiv 1(\bmod 4)}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right) \prod_{\substack{p|m \\ p \equiv 3(\bmod 4)}} \left(1 - \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} \right) \right) \left(1 - \frac{\chi(2)}{2^s} \right)^{1/2 + \delta_m},$$

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & 2|m, \\ 0, & 2 \nmid m, \end{cases}$$

χ_4 为模 4 的非主特征. 显然 $F(s, \chi, m)$ 在 $\operatorname{Re} s > 1/2$ 上解析, 而对 $\operatorname{Re} s = \sigma \geq 1/2 + \varepsilon'$, $m \leq x$ 有常数 $c > 0$, 使

$$g_0(s, \chi) \ll 1,$$

$$G_2(s, \chi, m) \ll \exp(c(\log x)^{1-\sigma}).$$

证 $b(n)$ 是可乘函数, 且对自然数 l ,

$$b(p^l) = \begin{cases} 1, & p \equiv 1(\bmod 4), \\ 1, & p = 2, \\ 1, & p \equiv 3(\bmod 4), 2 \nmid l, \\ 0, & p \equiv 3(\bmod 4), 2 \mid l. \end{cases}$$

于是 $\operatorname{Re} s > 1$ 时,

$$F(s, \chi, m) = \prod_{p|m} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(p^n) \chi(p^n)}{p^{ns}} \right) =$$

$$\prod_{\substack{p|m \\ p \equiv 1(\bmod 4)}} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi(p^l)}{p^{ls}} \right) \prod_{\substack{p|m \\ p \equiv 3(\bmod 4)}} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi^2(p^l)}{p^{2ls}} \right) \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi^l(2)}{2^{ls}} \right)^{\delta_m} =$$

$$g_0(s, \chi, m) \left(1 - \frac{\chi(2)}{2^s}\right)^{-1/2} \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} \left(1 - \frac{\chi^2(p)}{p^{2s}}\right)^{-1}. \quad (14)$$

比较(13)及(14)式右边, 知(13)式成立.

致谢 作者对潘承洞教授的关心和指导表示衷心的感谢.

参 考 文 献

- 1 Bombieri E. On the large sieve. *Mathematica*, 1980, 12: 201 ~ 225
- 2 Vinogradov A I. On the density hypothesis for the Dirichlet L-function. *Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat*, 1966, 30: 719 ~ 720
- 3 潘承洞, 丁夏畦. 一个均值定理. *数学学报*, 1975, 18: 254 ~ 262
- 4 Bombieri E, Friedlander J B, Iwaniec H. Primes in arithmetic progressions to large moduli. *Acta Math*, 1986, 156: 203 ~ 251
- 5 Wolke D, Zhan T. On the distribution of integers with a fixed number of primes factors. *Math Z*, 1993, 149: 133 ~ 147
- 6 Zhang Wenpeng. On the average of inversion of Dirichlet's L-function. *Composition Math*, 1992, 84: 53 ~ 57
- 7 张文鹏. Dirichlet L 函数倒数的 $2k$ 次均值公式. *数学年刊*, 1993, 14A(1): 1 ~ 5
- 8 Zhang Wenpeng. A new mean-value formula of Dirichlet's L-function. *Sci Sin, Series A*, 1993, 36(10): 1173 ~ 1179
- 9 Iwaniec I. The half dimensional sieve. *Acta Math*, 1976, 29: 67 ~ 95
- 10 Ramachandra R. Some problems of analytic number theory. *Acta Arith*, 1976, 26: 313 ~ 324
- 11 潘承洞, 潘承彪. *解析数论基础*. 北京: 科学出版社, 1991