论文

矩形厚梁结构弯曲自由振动精确化方程新形式

胡超^{①②*}, 佟广清^①, 马兴瑞^③, 黄文虎^③

① 扬州大学建筑科学与工程学院, 扬州 225127;

② 同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092;

③ 哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001

*联系人, E-mail: chaohu@tongji.edu.cn

收稿日期: 2012-12-28; 接受日期: 2013-11-25

国家自然科学基金(批准号: 51378451, 51276129)和航天创新科学研究基金资助项目

摘要 本文基于厚板结构振动精确化方程, 应用算子代数及其谱分解理论, 采用适当的规范条件和满足板条两侧边界条件, 首次给出了更为精确化的厚梁结构弯曲振动支配方程. 支配方程的总阶数为 4 阶, 即关于横向位移函数的 4 阶偏微分方程以及相应的广义位移函数 F 和剪切变形函数 f 的表达式. 分别基于 Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁理论绘出了结构内存在的波模频散关系曲线, 并与本文得到的厚梁结构内的波模频散关系做了对比, 讨论了本文提出的矩形厚梁弯曲振动精确化方程的正确性和适用条件. 本文提出的梁结构振动方程可用于厚梁较高频动力学分析与振动控制以及评价现有工程梁理论的适用条件.

关键词 厚梁结构, 厚梁弯曲振动精确化方程, 算子代数与算子谱分解, 剪切变形和转动惯量影响, 频散关系

PACS: 46.40.Cd, 43.40.+s, 02.30.Em, 02.30.Tb, 46.15.Ff**doi:** 10.1360/132012-1023

在航空航天、土木建筑结构等工程中, 梁是以弯曲为主要变形的空间结构的典型构件. 经典梁振动理论具有局限性, 在处理厚梁或减缩频率较高的高阶振动模态时会使分析计算结果产生较大的误差. 随着现代科学技术和工程结构设计理论的发展, 迫切要求给出梁结构弯曲振动的精确化支配方程, 以便有理有据地采用新的结构设计形式和实现结构轻量化^[1–3].

经典 Euler-Bernoulli 梁理论采用了 Kirchhoff 假

设, 认为初始垂直于中性轴的截面在变形时仍保持垂直于中线^[4]. 由于 Euler-Bernoulli 梁理论忽略了横向剪切变形和转动惯量的影响, 在厚梁或减缩频率较高的情况下将产生较大的计算误差. Rayleigh 最早对经典梁结构理论做了修正, 1877 年他考虑了梁结构弯曲变形时的转动惯量影响, 给出了 Rayleigh 梁理论.

20 世纪 20 年代 Timoshenko 提出了一种梁理论, 此理论考虑了横向剪切变形和转动惯量的影响, 其

引用格式: 胡超, 佟广清, 马兴瑞, 等. 矩形厚梁结构弯曲自由振动精确化方程新形式. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2014, 44: 441–448
Hu C, Tong G Q, Ma X R, et al. Refined dynamic equations of thick beam bending (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2014, 44: 441–448, doi: 10.1360/132012-1023

分析结果更接近工程实际^[5]. 它的基本假设是, 中线的法平面仍保持平面, 但不一定再保持法向. 另外, 随着 Timoshenko 梁理论在工程上广泛应用, 也出现了一些争议问题, 例如 Timoshenko 梁理论的两个频谱分支问题. Stephen 就 Timoshenko 梁理论的两个频谱分支问题做了研究^[6]; Diaz-de-Anda 等人^[7]对 Timoshenko 梁理论做了实验研究. 随着现代工程结构设计技术的发展, 其结构变厚、减缩频率不断升高、气流与结构振动的耦合增强. 同时, 研究表明夹层结构的理论与厚梁结构的理论是同构的. 这些都迫切要求人们研究厚梁结构弯曲振动的精确化动力学方程.

本文将基于厚板弯曲振动精确化方程, 采用算子代数及其算子谱分解理论, 给出更为精确化的梁弯曲振动方程, 并对结构内的相关波导问题做分析讨论.

1 矩形梁弯曲振动的精确化方程

根据文献[8]的厚板结构振动的精确化理论, 无横向荷载时平板结构弯曲振动的支配方程为

$$D\nabla^2\nabla^2W - (2-\nu)DT_2^2\nabla^2W + CT_2^2W + \left(\frac{7}{8}-\nu\right)DT_2^4W = 0, \quad (1)$$

$$\left[1 - \frac{(2-\nu)}{8(1-\nu)}h^2\nabla^2 + \frac{1}{8}h^2T_2^2\right]F = \left[1 + \frac{\nu}{8(1-\nu)}h^2\nabla^2 - \frac{\nu}{8(1-\nu)}h^2T_2^2\right]W, \quad (2)$$

$$\nabla^2f - \left(\frac{\pi^2}{h^2} + T_2^2\right)f = 0. \quad (3)$$

式中, C, D 分别表示平板的剪切刚度和抗弯刚度, $C = \frac{Eh}{2(1+\nu)}, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; E, ν 分别为平板材料的弹性模量和 Poisson 比; T_j 是时间微分算子 $T_j^2 = \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, ($j=1, 2$); c_1, c_2 分别表示纵波和横波波速, $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $c_2^2 = \mu/\rho$; ρ, h 分别为材料的密度和平板的厚度; t 为时间; ∇^2 是二维 Laplace 算子, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

将平板结构振动微分方程写为如下形式^[8]

$$\prod_{j=1}^2 (\nabla^2 - \tau_j^2) W^j = 0, \quad (4)$$

$$(\nabla^2 - \tau_3^2) f = 0.$$

其中, $\tau_3^2 = T_2^2 + \frac{\pi^2}{h^2}$; τ_j^2 ($j=1, 2$) 是拟时间微分算子, 其满足算子代数方程

$$\tau^4 - (2-\nu)T_2^2\tau^2 + \frac{6(1-\nu)}{h^2}T_2^2 + \left(\frac{7}{8}-\nu\right)T_2^4 = 0 \quad (5)$$

以及

$$W = \sum_{j=1}^2 W^j; \quad F = \sum_{j=1}^2 F^j = \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) W^j;$$

$$\delta_j = \left\{ 8 - h^2 \left[(3 - 2\kappa) \tau_j^2 - T_2^2 \right] \right\}^{-1} \left[16 - 2h^2 (\tau_j^2 - \kappa T_2^2) \right],$$

$$j = 1, 2, ; \quad \kappa = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)};$$

算子的负指数表示算子的逆, 可用 Green 函数的积分表示, 例如 Reisz 位势或 Bessel 位势等.

设平板是宽度为 $2b$ 度的板条. 根据 Taylor 级数展开公式, 则板条中面内任意一点的广义位移可写为

$$W(x, y) = \cosh\left(y \frac{\partial}{\partial y}\right) W(x, 0), \quad (6)$$

$$f(x, y) = \sinh\left(y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, 0).$$

式中, $\sinh(\cdot), \cosh(\cdot)$ 分别为双曲正弦和余弦函数.

由式(5)和(6), 可有如下表达式^[7,8]

$$W(x, y) = \cosh\left(y \frac{\partial}{\partial y}\right) \sum_{j=1}^2 W^j(x, 0)$$

$$= \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \cos(y D_j) g^{jk}(x),$$

$$F(x, y) = \cosh\left(y \frac{\partial}{\partial y}\right) \sum_{j=1}^2 F^j(x, 0)$$

$$= \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (\delta_j - 1) \cos(y D_j) g^{jk}(x), \quad (7)$$

$$f(x, y) = \sinh\left(y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, 0)$$

$$= \sum_{k=1}^2 \frac{\sin(y D_3)}{D_3} g^{3k}(x).$$

其中

$$\left(D_j^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) g^j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$\left(iD_j - \frac{\partial}{\partial y}\right)g^{j1} = 0; \quad \left(iD_j + \frac{\partial}{\partial y}\right)g^{j2} = 0;$$

$$D_j^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \tau_j^2, \quad j=1, 2, 3.$$

采用如下两个规范条件^[8,9], 消除未知函数的不唯一性

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \cos(yD_j)g^{j2}(x) &= 0, \quad j=1, 2; \\ \frac{\sin(yD_3)}{D_3}g^{32}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

于是, 式(6)可变成如下形式

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{j=1}^2 \cos(yD_j)g^{j1}(x), \\ F(x, y) &= \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \cos(yD_j)g^{j1}(x), \\ f(x, y) &= \frac{\sin(yD_3)}{D_3}g^{31}(x). \end{aligned} \quad (9)$$

根据文献[8], 板条振动时的广义内力表达式为

$$\begin{aligned} M_x &= -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} D \nu \left[(\nabla^2 - T_2^2)W + \nabla^2 F \right]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_y &= -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} D \nu \left[(\nabla^2 - T_2^2)W + \nabla^2 F \right]; \end{aligned} \quad (11)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right]; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Q_x &= C \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{1}{4} D \left\{ \nu (\nabla^2 - T_2^2) \frac{\partial W}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + [(2-\nu)\nabla^2 - (1-\nu)T_2^2] \frac{\partial F}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu)(\nabla^2 - T_2^2) \frac{\partial f}{\partial y} \right\}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} Q_y &= C \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{1}{4} D \left\{ \nu (\nabla^2 - T_2^2) \frac{\partial W}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + [(2-\nu)\nabla^2 - (1-\nu)T_2^2] \frac{\partial F}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. - (1-\nu)(\nabla^2 - T_2^2) \frac{\partial f}{\partial x} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

梁(板条)的两侧为自由边界条件, 其表达式为^[10,11]

$$M_y|_{y=\pm b} = 0; \quad M_{xy}|_{\pm b} = 0; \quad Q_y|_{\pm b} = 0. \quad (15)$$

设板条的长度为 L , 取无量纲坐标 $\tilde{x} = x/L$, $\tilde{y} = y/L$. 于是, 根据式(7)可有表达式

$$b^2 D_j^2 = \left(\frac{b}{L}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - \left(\frac{b}{h}\right)^2 h^2 \tau_j^2, \quad j=1, 2, 3.$$

其中, 根据结构工程设计规范要求 $h/b = 3.5-5.0$, $L/h \geq 5.0$; 研究低频情况 $\tau_j h \leq 0.50$. 因此, 假设算子范数 $\|b^2 D_j^2\| \ll 1.0$, 可得如下量级分析

$$\left\| \frac{\sin(bD_j)}{bD_j} \right\| = \left\| 1 - \frac{1}{6} b^2 D_j^2 \right\| \rightarrow 1.0; \quad (16)$$

$$\|\cos(bD_j)\| = \left\| 1 - \frac{1}{2} b^2 D_j^2 \right\| \rightarrow 1.0. \quad (17)$$

将式(11), (12)和(14)代入到式(15)中, 并将方程组中算子级数截断, 考虑到式(16), (17)中的量级分析, 于是梁的广义位移函数应满足如下渐近方程

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{11} \\ g^{21} \\ g^{31} \end{bmatrix} = 0; \quad (18)$$

其中各算符的表达式为

$$D_{1j} = 2(\delta_j - 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - [(3-2\kappa)\delta_j - 2]\tau_j^2 + (1-2\kappa)T_2^2;$$

$$D_{2j} = 2 \frac{\partial}{\partial x} (\delta_j - 1) D_j^2, \quad j=1, 2;$$

$$\begin{aligned} D_{3j} &= \left\{ (\delta_j - 2) - \frac{h^2}{24} \left\{ [(3-2\kappa)\delta_j - 2]\tau_j^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\delta_j - 2\kappa)T_2^2 \right\} \right\} D_j^2, \quad j=1, 2; \end{aligned}$$

$$D_{13} = 2 \frac{\partial}{\partial x}; \quad D_{23} = \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \tau_3^2 \right); \quad D_{33} = \left(1 - \frac{\pi^2}{24} \right) \frac{\partial}{\partial x}.$$

根据方程式(5)和(18), 采用 Vieta 定理的根和系数的关系以及微分方程解的构造理论, 经推导化简可得如下偏微分方程^[12]

$$A_1 EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \Phi + A_2 EI T_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi + A_3 C (T_2^2 h^2 + \pi^2) T_2^2 \Phi = 0; \quad (19)$$

其中, C , EI 分别表示矩形截面梁结构的剪切刚度和抗弯刚度, $EI = Eh^3/12$; A_j ($j=1, 2, 3$) 是关于时间的微分算子, 其表达式分别为

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1 + \frac{8 \left[(9 - 36\kappa + 44\kappa^2 - 16\kappa^3) \pi^2 - 8(35 - 52\kappa - 28\kappa^2 + 48\kappa^3) \right] h^2 T_2^2}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]} \\
 &\quad - \frac{(1 - 3\kappa + 2\kappa^2) \left[(2\kappa - 1) \pi^2 + 8(34\kappa - 21) \right] h^4 T_2^4}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]}; \\
 A_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{256 \left[72(1 - 3\kappa + 2\kappa^2) + (31 - 61\kappa + 30\kappa^2) \pi^2 \right]}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]} \right. \\
 &\quad + \frac{8 \left[8(143 - 268\kappa + 56\kappa^2 + 72\kappa^3) - (53 - 220\kappa + 288\kappa^2 - 120\kappa^3) \pi^2 \right] h^2 T_2^2}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]} \\
 &\quad \left. - \frac{(1 - 3\kappa + 2\kappa^2) \left[8(69 - 98\kappa) + (1 - 2\kappa) \pi^2 \right] h^4 T_2^4}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]} \right\}; \\
 A_3 &= \frac{4(3 - 4\kappa)}{3} \frac{768(\kappa - 1) - 8(7 + 6\kappa - 12\kappa^2) h^2 T_2^2 + 5(1 - 3\kappa + 2\kappa^2) h^4 T_2^4}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]}.
 \end{aligned}$$

于是, 广义位移函数的表达式为

$$g^{j1} = \sum_{k=1}^3 B_{jk} \Phi^k = \sum_{k=1}^2 B_{jk} \Phi^k, \quad j=1, 2; \quad (20)$$

$$g^{31} = \sum_{k=1}^3 B_{3k} \Phi^k = \sum_{k=1}^2 B_{3k} \Phi^k. \quad (21)$$

$$W(x, y) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \cos(yD_j) B_{jk} \Phi^k; \quad (22)$$

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (\delta_j - 1) \cos(yD_j) B_{jk} \Phi^k; \quad (23)$$

$$f(x, y) = \frac{\sin(yD_3)}{D_3} \sum_{k=1}^3 B_{3k} \Phi^k. \quad (24)$$

式中, 算符 B_{ij} ($i = j = 1, 2, 3$)

$$B_{11} = D_{22}D_{33} - D_{23}D_{32}; \quad B_{12} = D_{13}D_{32} - D_{12}D_{33};$$

$$B_{21} = D_{23}D_{31} - D_{21}D_{33}; \quad B_{22} = D_{11}D_{33} - D_{13}D_{31};$$

$$B_{31} = D_{21}D_{32} - D_{22}D_{31}; \quad B_{32} = D_{12}D_{31} - D_{11}D_{32}.$$

根据偏微分方程规范型理论, 由方程(18)和(19)可得矩形梁关于横向位移函数的动力学方程

$$\begin{aligned}
 &A_1 EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} W(x, t) + A_2 EI T_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) \\
 &+ A_3 C (T_2^2 h^2 + \pi^2) T_2^2 W(x, t) = 0, \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$F(x, t) = \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) W^j(x, t), \quad (26)$$

$$f(x, t) = \sum_{j=1}^2 \gamma_j (\delta_j - 1) \frac{\partial}{\partial x} W^j(x, t). \quad (27)$$

其中,

$$W(x, t) = W^1(x, t) + W^2(x, t),$$

$$\gamma_j = -2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \tau_j^2 \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \tau_j^2 \right).$$

由式(8)和式(10)–(14), 可得沿板条宽度方向的广义内力平均值的表达式为

$$\begin{aligned}
 M_x(x) &= \frac{1}{2b} \int_{-b}^b M_x(x, y, t) dy, \\
 Q_x(x) &= \frac{1}{2b} \int_{-b}^b Q_x(x, y, t) dy.
 \end{aligned} \quad (28)$$

于是, 可得如下广义内力表达式

$$\begin{aligned}
 M_x &= -\frac{1}{2(1+\nu)} EI \left[\frac{\nu}{(1-\nu)} \sum_{j=1}^2 (\delta_j \tau_j^2 - T_2^2) W^j \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{j=1}^2 (1+\gamma_j) (\delta_j - 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} W^j \right], \quad (29) \\
 Q_x &= C \left[(2 - \delta_j) - \gamma_j (\delta_j - 1) \right] \frac{\partial}{\partial x} W^j \\
 &\quad - \frac{1}{4} D \left\{ [2(1-\nu) - (2-\nu)\delta_j] \tau_j^2 \right. \\
 &\quad \left. - [(1-2\nu) - (1-\nu)\delta_j] T_2^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$-(1-\nu)(\tau_3^2 - T_2^2)\gamma_j(\delta_j - 1)\left\{\frac{\partial}{\partial x}W^j.\right. \quad (30)$$

当时间微分算子的范数 $\|T_2^2\| \rightarrow 0$ 时, 方程式 (25)–(27) 可退化为梁弯曲的经典静力学支配方程^[13]

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} W(x) = 0, \quad (31)$$

$$F(x) = W(x), \quad (32)$$

$$f(x) = 0. \quad (33)$$

此时即静力情况下梁结构内相应的广义内力的表达式 (29) 和 (30), 可改写为如下表达式

$$M_x = -\frac{1}{(1-\nu^2)} EI \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{8} \frac{(2-\nu)}{(1-\nu)} h^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right] W, \quad (34)$$

$$Q_x = -\frac{1}{(1-\nu^2)} EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} W. \quad (35)$$

2 矩形截面梁精确化方程的考量与讨论

本文分别采用经典梁理论即 Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁理论, 以及本文给出的矩形截面梁振动精确化方程, 绘出了各种矩形梁弯曲波动的频散曲线. 具体工作如下

$$\frac{(1+\nu)}{6} h^2 k^4 - k_2^2 = 0, \quad (36)$$

此式是基于经典 Euler-Bernoulli 梁理论^[13].

$$\left(k^2 - \frac{1}{\sigma} k_2^2 \right) \left[1 + \frac{(1+\nu)}{6\sigma} k^2 h^2 - \frac{1}{12\sigma} k_2^2 h^2 \right] - k^2 = 0, \quad (37)$$

此式是基于 Timoshenko 梁理论^[11].

$$A_1 E I k^4 + A_2 E I k_2^2 k^2 + A_3 C (k^2 h^2 - \pi^2) k_2^2 = 0, \quad (38)$$

此式是基于本文给出的梁结构精确化理论. 其中, $k_2^2 = \omega^2/c_2^2$, $\sigma = 5/6$ 是剪切折算系数; A_j ($j=1, 2, 3$) 分别为

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 + \frac{8 \left[8(35 - 52\kappa - 28\kappa^2 + 48\kappa^3) - (9 - 36\kappa + 44\kappa^2 - 16\kappa^3) \pi^2 \right] k_2^2 h^2}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]} \\ &\quad - \frac{(1 - 3\kappa + 2\kappa^2) \left[(2\kappa - 1) \pi^2 + 8(34\kappa - 21) \right] k_2^4 h^4}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]}; \\ A_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{256 \left[72(1 - 3\kappa + 2\kappa^2) + (31 - 61\kappa + 30\kappa^2) \pi^2 \right]}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]} \right. \\ &\quad - \frac{8 \left[8(143 - 268\kappa + 56\kappa^2 + 72\kappa^3) - (53 - 220\kappa + 288\kappa^2 - 120\kappa^3) \pi^2 \right] k_2^2 h^2}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]} \\ &\quad \left. - \frac{(1 - 3\kappa + 2\kappa^2) \left[8(69 - 98\kappa) + (1 - 2\kappa) \pi^2 \right] k_2^4 h^4}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]} \right\}; \\ A_3 &= \frac{4(3 - 4\kappa)}{3} \left\{ \frac{768(\kappa - 1) + 8(7 + 6\kappa - 12\kappa^2) k_2^2 h^2}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]} + \frac{5(1 - 3\kappa + 2\kappa^2) T_2^4 h^4}{512(\kappa - 1) \left[24(1 - 2\kappa) - (2\kappa - 3) \pi^2 \right]} \right\}. \end{aligned}$$

根据各种梁结构振动的理论, 图 1–4 分别绘出了 Poisson 比分别为 0.25, 0.30, 0.40 和 0.50 的色散关系曲线. 考虑前两阶振动模式 ($c/c_2 \leq 1.40$). 由图可以看到: (1) 基于本文给出的梁振动精确化方程确定的频谱是结构中存在两个振动模式, 当弹性波波

数比较小 ($h/\lambda \leq 0.5$) 时, 第一阶振动模式接近于经典 Euler-Bernoulli 梁理论确定的模式或称接近于经典 Timoshenko 梁理论确定的第一阶振动模式; (2) 当弹性波波数比较大 ($h/\lambda > 0.5$) 时, 本文的第二阶振动模式接近于经典 Timoshenko 梁理论确定的第一阶振

图 1 (网络版彩图) 基于不同梁理论得到的频散关系曲线
Figure 1 (Color online) Dispersion relation by different theories of beams.

图 3 (网络版彩图) 基于不同梁理论得到的频散关系曲线
Figure 3 (Color online) Dispersion relation by different theories of beams.

图 2 (网络版彩图) 基于不同梁理论得到的频散关系曲线
Figure 2 (Color online) Dispersion relation by different theories of beams.

图 4 (网络版彩图) 基于不同梁理论得到的频散关系曲线
Figure 4 (Color online) Dispersion relation by different theories of beams.

动模式. 随着弹性波数的增加, 本文的第一阶振动模式的相速度逐渐减少, 而最终变为截止振动模式; (3) 当弹性波数较小时, 结构中存在两种振动模式, 而在弹性波数很大时(高频), 结构中只存在一种振动模式.

3 结论

本文没有采用工程假设, 直接基于厚板振动精确化方程, 应用算子谱分解和规范场理论, 首次给出

了更为精确化的矩形梁结构弯曲振动支配方程, 其支配方程的总阶数为 4 阶, 即关于横向位移 w 的 4 阶偏微分方程. 与平板结构中存在的振动模式不同, 此时结构中存在的描述剪切运动模式的函数不是独立的. 即此时不仅广义位移函数 F 是与位移函数 w 相关的, 而且剪切运动函数 f 也是与位移函数 w 相关的. 可以给出用位移函数 w 描述的广义位移函数 F 和剪切运动变形函数 f 的表达式.

在振动方程中不仅含有关于时间的 2 阶导数, 而且还含有关于时间的 4 阶导数. 由于振动方程中含有关于时间的 4 阶导数, 因此在梁结构中出现了两个频谱分支. 需要指出的是: 在低频振动情况下, 梁结构中存在的两个振动模式的相速度都在考虑范围内; 在高频振动情况下, 梁结构中的第一阶振动模式的相速度随着波数的增加而迅速减少, 梁结构内逐渐呈现出单一频谱特点. 也就是说, 在低频振动情况下梁结构中存在的两个弯曲波模都是属于扩展形式的传播模, 而在高频振动情况下梁结构中只存在的一个扩展形式的传播模.

一个扩展形式的传播模.

本论文的主要创新之处在于: (1) 首次给出了更为精确化的矩形梁结构弯曲振动支配方程; (2) 频散关系曲线很好地描述了当梁结构比较细长或者说导波波数较小时, 结构内存在着两种振动模式; (3) 当梁结构比较短粗或者说导波波数较大时, 结构内将只存在一个振动模式; (4) 与基于经典 Timoshenko 梁理论的分析结果不同, 当导波波数趋于无穷大时结构内将只存在单一的振动模式, 并且是梁的第二阶振动模式的极限, 而不是第一阶振动模式的极限.

由于本文没有工程假设, 直接基于弹性动力学的数学理论推导得到的厚梁振动的支配方程, 因此, 它不仅适用于分析厚梁结构低频振动模式情况, 而且还适用于较高频振动模式情况. 本文提出的厚梁结构振动理论可望能够在航空航天和土木建筑结构的动力学分析与振动控制中得到应用^[14], 以及确定梁结构振动理论在结构尺寸和振动频率等方面的限制性适用条件.

参考文献

- 1 黄文虎, 邵成勋. 多柔体系统动力学. 北京: 科学出版社, 1996
- 2 Ma X R, Gou X Y, Li T S, et al. Development generalization of spacecraft dynamics (in Chinese). J Astronaut, 2000, 21(3): 1-5 [马兴瑞, 苟兴宇, 李铁寿, 等. 航天器动力学发展概况. 宇航学报, 2000, 21(3): 1-5]
- 3 Karnovsky I A, Lebed O I. Non-classical Vibrations of Aches and Beams. New York, Chicago, San Francisco: McGraw-Hill, 2003
- 4 Ballarini R. The Da Vinci-Euler-Bernoulli beam theory. Mechanical Engineering Magazine Online. <http://www.memagazine.org/contents/current/webonly/webex418.html>. 2003, Retrieved, 2006-07-22
- 5 Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill Press, 1970
- 6 Stephen N G, Puchegger S. On the valid frequency range of Timoshenko beam theory. J Sound Vib, 2006, 297: 1082-1087
- 7 Diaz-de-Anda A, Flores J, Gutierrez L, et al. Experimental study of the Timoshenko beam theory predictions. J Sound Vib, 2012, 331: 5732-5744
- 8 Hu C, Ma F, Ma X R, et al. Refined dynamic equations of the plate bending without any assumptions (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2011, 41(6): 781-790 [胡超, MA Fai, 马兴瑞, 等. 平板弯曲自由振动的精确化动力学方程及其分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, 41(6): 781-790]
- 9 安世全, 孙佑民. 线性算子的谱理论. 北京: 科学出版社, 1995
- 10 鲍亦兴, 毛昭宙. 弹性波的衍射与动应力集中. 刘殿魁, 苏先樾, 译. 北京: 科学出版社, 1993. 230-231
- 11 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981
- 12 张鸿庆. 力学的代数化、机械化、辛化与几何化. 见: 第 7 届现代数学和力学(MMM-VII). 上海: 上海大学出版社, 1997
- 13 Clough R, Penzien J. 结构动力学. 王光远, 译. 北京: 高等教育出版社, 2006
- 14 Lasiecka I, Triggiani R. Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories. Cambridge: Cambridge University Press, 2000

Refined dynamic equations of thick beam bending

HU Chao^{1,2*}, TONG GuangQing¹, MA XingRui³ & HUANG WenHu³

¹ College of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225127, China;

² School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China;

³ School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China

In this paper, based on the theory of refined dynamic equations of thick plates bending, applied the differential operator algebra and decomposition of operator spectra, the refined dynamic equation of the beam flexural motion is first obtained by using proper gauge conditions and satisfying the boundary conditions. The refined equation of beams is a fourth-order equation, which governs the generalized displacement functions W , F and f . The dispersion relations, which are from the given beam theory, Euler-Bernoulli beam and Timoshenko beam, respectively, are compared. The refined equations of thick beams and applicable condition are investigated and discussed. Since derivation of the refined dynamic equation is conducted without any assumptions, so the proposed equation of thick beam bending is exact, that can be used to analyze vibration of thick beams at the high frequency and to evaluate the applicable condition of the engineering beam theory.

thick beam, refined dynamic equation of beam bending, operator algebra and decomposition of operator spectra, effect of shear deformation and rotational inertial moment, dispersion relation

PACS: 46.40.Cd, 43.40.+s, 02.30.Em, 02.30.Tb, 46.15.Ff

doi: 10.1360/132012-1023