



整 Chebyshev 问题及其应用

献给陆洪文教授 85 寿辰

王聪^{1,2}, 吴强^{1*}

1. 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715;

2. 重庆医科大学医学信息学院, 重庆 400016

E-mail: cong.wang@cqmu.edu.cn, qiangwu@swu.edu.cn

收稿日期: 2023-10-30; 接受日期: 2024-01-02; 网络出版日期: 2024-02-29; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12071375) 资助项目

摘要 整 Chebyshev 问题是要寻找一个次数不超过 n 的非零整系数多项式, 使其在给定区间上的绝对值的最大值 (即上确界范数) 最小, 并分析当 n 趋于无穷时, 该最小上确界范数的变化趋势. 本文概述了该问题的研究历史、方法及其推广和应用, 并讨论了两类长度小于 4 的区间上的整 Chebyshev 问题. 我们发现上述区间上具有最小上确界范数的 n (当 n 足够大时) 次整系数多项式的部分因子都具有一种特定的性质, 并猜测该性质对任意同类区间都成立.

关键词 整 Chebyshev 问题 整超限直径 整 Chebyshev 多项式 关键多项式 必需因子 辅助函数

MSC (2020) 主题分类 11C08, 11J54, 11Y40

1 引言

设 E 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的紧子集, 定义多项式 $p(x)$ 在 E 上的上确界范数为

$$\|p\|_E = \sup_{x \in E} |p(x)|.$$

令 $\mathbb{C}_n[x]$ 表示次数不超过 n 的复系数多项式的集合. Chebyshev 问题是要找到一个首一的多项式 $Q_n \in \mathbb{C}_n[x]$, 使其在给定区域 E 上的上确界范数 $\|Q_n\|_E^{1/n}$ 最小, 并分析当 n 趋于无穷时 $\|Q_n\|_E^{1/n}$ 的变化趋势.

定义 1.1 如果一个首一的复系数多项式 $Q_n(x) \in \mathbb{C}_n[x]$ 满足

$$\|Q_n\|_E = \min_{\substack{p \in \mathbb{C}_n[x] \setminus \{0\}, \\ p \text{ 为首一的, } \deg p \geq 1}} \|p\|_E,$$

英文引用格式: Wang C, Wu Q. The integer Chebyshev problem and its applications (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1365–1390, doi: 10.1360/SSM-2023-0293

则称它为紧集 E 上的 n 次 Chebyshev 多项式.

$$t(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{Q_n} \|Q_n\|_E^{1/n}$$

称为 E 上的超限直径, 或 Chebyshev 常数.

超限直径的等价定义

$$t(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x_1, \dots, x_n \in E} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i| \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

源于位势论中 E 上的对数容量的研究 (参见文献 [18, 32]). 任意实区间 $E = [a, b]$ 上的 n 次 Chebyshev 多项式

$$Q_n(x) = 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^n \cos \left(n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a} \right)$$

是一个首一的 n 次实系数多项式. 因此,

$$t([a, b]) = \frac{b-a}{4}.$$

Chebyshev 多项式在逼近理论、复分析和计算数论等领域都有重要应用 (参见文献 [36]). 在代数整数性质的研究中, 文献 [42] 曾利用实区间上的 Chebyshev 多项式与辅助函数方法 [39] 相结合, 改进了完全搜寻某种全实代数整数的算法, 使得相关计算效率提高了 500 多倍.

令 $\mathbb{Z}_n[x]$ 表示次数不超过 n 的整系数多项式的集合. 整 Chebyshev 问题是要找到一个非零多项式 $q_n \in \mathbb{Z}_n[x]$, 使其在给定区域 E 上的上确界范数 $\|q_n\|_E^{1/n}$ 最小, 并分析当 n 趋于无穷时 $\|q_n\|_E^{1/n}$ 的变化趋势.

定义 1.2 如果一个整系数多项式 $q_n(x)$ 满足

$$\|q_n\|_E = \min_{\substack{p \in \mathbb{Z}_n[x] \setminus \{0\} \\ \deg p \geq 1}} \|p\|_E,$$

则称它为紧集 E 上的 n 次整 Chebyshev 多项式.

$$t_{\mathbb{Z}}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{q_n} \|q_n\|_E^{1/n}$$

称为 E 上的整超限直径, 或整 Chebyshev 常数.

注 1.1 对于 $n \in \mathbb{N}^+$, 整 Chebyshev 多项式 $q_n(x)$ 的次数可能小于 n , $q_n(x)$ 不一定唯一, 且不要求是首一多项式. 首一的情形涉及另一个重要的问题, 即首一的整 Chebyshev 问题 (参见文献 [4, 6, 22]).

对于任意 n 次整系数多项式 $p(x)$, 易知 $\|p\|_E = \|p\|_{E^*}$, 其中 $E^* = E \cup \{z \mid \bar{z} \in E\}$. 因此, E 和 E^* 上的整 Chebyshev 问题等价. 不失一般性, 可以假设 E 关于实轴对称. 目前, 关于整 Chebyshev 多项式和整超限直径的研究主要针对 E 为实区间的情形. 令 $E = [a, b]$. 若 $b-a \geq 4$, 则有

$$t_{\mathbb{Z}}([a, b]) = t([a, b]) = \frac{b-a}{4}$$

(若不要求 $q_n(x)$ 的次数为正, 则当 $b-a \geq 4$ 时有 $q_n(x) \equiv 1$, 即 $t_{\mathbb{Z}}([a, b]) = 1$) [18]. 若 $0 < b-a < 4$, 则根据 Hilbert [23] 和 Fekete [9] 的结论, 有

$$\frac{b-a}{4} \leq t_{\mathbb{Z}}([a, b]) \leq \sqrt{\frac{b-a}{4}}.$$

对于所有长度小于 4 的区间 $[a, b]$, $t_{\mathbb{Z}}([a, b])$ 的值目前都是未知的.

整 Chebyshev 问题最初主要针对区间 $[0, 1]$, 该问题源于研究素数分布的 Gelfond-Shnirelman-Nair 方法 [7, 29, 30]. 令 $\pi(n)$ 表示不超过 n 的素数的个数, Gelfond-Shnirelman-Nair 方法就是应用了 $[0, 1]$ 上的整超限直径来研究 $\pi(n)$ 的下界.

设 $q_n(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的整 Chebyshev 多项式, 显然,

$$\text{lcm}(1, 2, \dots, 2n+1) \int_0^1 q_n^2(x) dx \geq 1.$$

对于 $\varepsilon > 0$, 当 n 足够大时,

$$\int_0^1 q_n^2(x) dx \leq \max_{x \in [0, 1]} |q_n(x)|^2 \leq (t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) + \varepsilon)^{2n}.$$

若 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 表示不超过 n 的素数, 其中 $m = \pi(n)$, 则有

$$\text{lcm}(1, 2, \dots, n) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m} \leq n^m = n^{\pi(n)}.$$

因此,

$$(2n+1)^{\pi(2n+1)} (t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) + \varepsilon)^{2n} \geq 1.$$

两边取对数, 可得

$$\pi(2n+1) \log(2n+1) \geq 2n \log(t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) + \varepsilon)^{-1}.$$

因而,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(2n+1) \log(2n+1)}{(2n+1)} \geq \log \left(\frac{1}{t_{\mathbb{Z}}([0, 1])} \right).$$

于是, 若 $t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) = 1/e$, 则可证得素数定理. 然而, 根据最新研究结果, 可得

$$0.4213^{[31]} \leq t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \leq 0.422685^{[13]}.$$

因此, 上述方法并不能证明素数定理, 但整 Chebyshev 问题本身仍然是一个值得研究的问题.

区间 $[a, b]$ 上的整 Chebyshev 问题可以看作是常数函数 $f \equiv 0$ 在 $[a, b]$ 上的一致逼近问题, 这对于用整系数多项式逼近连续函数的理论至关重要 (参见文献 [10, 40]). 此外, 区间 $[a, b]$ 上的整超限直径在数论中也有重要应用. 例如, 设 n 和 m 为正整数, $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 上的整超限直径在研究有理数的对数 $\log(n/m)$ 的有理逼近问题中有重要应用 (参见文献 [3, 44]), 而 Farey 区间上的整超限直径与数论中著名的 Schur-Siegel-Smyth 迹问题 [4] 密切相关 (参见文献 [1, 5]).

定义 1.3 如果区间

$$I_{q,s} = \left[\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \right]$$

满足 $p, q, r, s \in \mathbb{Z}^+$ 两两互素, 且 $qr - ps = 1$, 则称它为 Farey 区间.

注 1.2 对于任意两个互素的整数 q 和 s , 其中 $1 \leq q \leq s$ ($q = s = 1$ 的情形对应区间 $[0, 1]$), 存在唯一一对整数 p 和 r , 使得 $I_{q,s} \subseteq [0, 1]$ 是一个 Farey 区间. $[0, 1]$ 是特殊的 Farey 区间. 关于 Farey 区间上整 Chebyshev 问题的研究可参见文献 [1, 2, 15, 17, 20].

人们对整 Chebyshev 问题的研究主要从两方面展开: 一是搜寻长度小于 4 的区间 $[a, b]$ 上的整 Chebyshev 多项式, 二是计算长度小于 4 的区间 $[a, b]$ 上整超限直径的上下界. 这两个方面的研究是相辅相成的. 设 $q_n(x)$ 为 $[a, b]$ 上的 n 次整 Chebyshev 多项式. 一方面, 不等式

$$t_{\mathbb{Z}}([a, b]) \leq \|q_n\|_{[a, b]}^{1/n} \quad (1.1)$$

提供了一种估计 $t_{\mathbb{Z}}([a, b])$ 上界的方法, 这种方法需要搜寻高次的上确界范数尽可能小的整系数多项式. 另一方面, $t_{\mathbb{Z}}([a, b])$ 上界的精确估计对研究高次整 Chebyshev 多项式的因子的构成起着重要作用 (参见文献 [5, 19, 26, 43]).

本文余下内容的结构如下. 第 2 节详细介绍整 Chebyshev 问题的研究方法, 包括估计整超限直径上下界的方法和搜寻整 Chebyshev 多项式的方法. 第 3 节介绍整超限直径在研究代数整数的性质以及有理数的对数的有理逼近问题中的重要应用. 第 4 节介绍如何利用辅助函数方法, 结合文献 [41] 中计算辅助函数最大最小值的改进算法, 研究 Farey 区间以及 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 上的整 Chebyshev 问题, 并给出上述问题的新结果.

2 整 Chebyshev 问题

本节详细介绍长度小于 4 的区间 $[a, b]$ 上的整超限直径上下界和整 Chebyshev 多项式的研究方法.

2.1 整超限直径

引言中提到, 任意长度小于 4 的区间 $[a, b]$ 上的整超限直径都是未知的, 目前, 人们的主要工作是优化其上下界.

2.1.1 整超限直径的下界

目前, 对长度小于 4 的区间 $[a, b]$ 上整超限直径下界的估计主要基于如下引理和推论.

引理 2.1 ^[4] 设 $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 的次数为 n , $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ 的 k 个零点都在区间 $[a, b]$ 上. 若 $\gcd(p(x), q(x)) = 1$, 则有

$$\|q\|_{[a, b]}^{1/n} \geq |a_k|^{-1/k}.$$

根据上述引理, 若 $p(x)$ 的零点都在 $[a, b]$ 上, 且满足 $|a_k|^{-1/k} > t_{\mathbb{Z}}([a, b])$, 则对于足够大的 n , $p(x)$ 应是 $[a, b]$ 上的一个 n 次整 Chebyshev 多项式的因子. 因此, 作如下定义.

定义 2.1 如果一个不可约多项式 $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ 的所有零点都在区间 $[a, b]$ 上, 且满足

$$|a_k|^{-1/k} > t_{\mathbb{Z}}([a, b]),$$

则称它为 $[a, b]$ 上的关键多项式.

推论 2.1 ^[20] 如果存在一个无穷多项式序列 $\{p_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, 其中 $p_i(x) = a_{k_i} x^{k_i} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ 的所有零点都在区间 $[a, b]$ 上, 则有

$$t_{\mathbb{Z}}([a, b]) \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} |a_{k_i}|^{-1/k_i}.$$

对于区间 $[0, 1]$, 存在一组 Gorshkov-Wirsing 多项式^[4, 27] 满足推论 2.1 的条件, 即

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 2x - 1, \\ p_1(x) &= 5x^2 - 5x + 1, \\ &\vdots \\ p_{n+1}(x) &= p_n^2(x) + p_n(x)p_{n-1}^2(x) - p_n^4(x), \end{aligned}$$

其中 $p_i(x)$ 是次数为 2^i 的不可约多项式, 其所有零点都在区间 $[0, 1]$ 上. 令 a_{k_i} 表示 $p_i(x)$ 的首项系数, 则有

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} |a_{k_i}|^{-1/2^i} = \frac{1}{2.3768417062 \dots} \approx 0.420726.$$

根据推论 2.1, 可得

$$t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \geq 0.420726.$$

Borwein 和 Erdélyi^[5] 证明了存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \geq \frac{1}{2.3768417062 \dots} + \varepsilon. \quad (2.1)$$

Pritsker^[31] 应用加权位势论证明了

$$t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \geq \frac{1}{2.3736} \approx 0.4213.$$

对于 Farey 区间 $I_{q,s}$, Flammang^[11] 利用 Chudnovsky^[8] 的一个引理将 $[0, 1]$ 上的 Gorshkov-Wirsing 多项式推广到了任意 Farey 区间, 从而给出了 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的下界.

定理 2.1 设 $I_{q,s}$ 为 Farey 区间, 则有

$$t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s}) \geq \frac{1}{q+s} \prod_{i=0}^{\infty} (1 + \lambda_i)^{-1/2^{i+1}},$$

其中,

$$\lambda_0 = \frac{qs}{q+s}, \quad \lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{(1 + \lambda_i)^2}.$$

Flammang 等^[17] 重新构造了一组满足推论 2.1 的多项式序列 (该序列和 Farey 区间上的 Gorshkov-Wirsing 多项式的序列非常接近), 从而优化了 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的下界.

定理 2.2 设 $I_{q,s}$ 为 Farey 区间, 令 $U_0 = z$, $V_0 = 1$, $U_{k+1} = U_k^2 + V_k^2$, $V_{k+1} = U_k V_k$, $x_k = U_k/V_k$, 则有

$$t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s}) \geq \frac{1}{\sqrt{qs}} g_{-} \left(\sqrt{\frac{q}{s}} \right),$$

其中 $g_{-}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} x_k^{-1/2^k}$.

Aguirre 和 Peral^[1] 通过分析 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 与 Schur-Siegel-Smyth 迹问题的关系, 利用后者的最新结果, 改进了当 $s/q > 23$ 时 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的下界.

对于区间 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$, 可以找到一个满足 $[0, 1/h] \subset [0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 的最小正整数 h , 先利用定理 2.1 给出 $t_{\mathbb{Z}}([0, 1/h])$ 的下界, 再由 $t_{\mathbb{Z}}([0, 1/h]) \leq t_{\mathbb{Z}}([0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2])$ 即可得到 $t_{\mathbb{Z}}([0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2])$ 的下界.

Hare^[20] 通过分析 $[0, 1]$ 上的 Gorshkov-Wirsing 多项式的性质, 构造了任意实区间 $[a, b]$ 上的广义 Gorshkov-Wirsing 多项式, 用于估计 $t_{\mathbb{Z}}([a, b])$ 的下界. 这种方法对区间长度接近 1 的一些小区间上的结果有一定改进.

2.1.2 整超限直径的上界

由不等式 (1.1), 对于任意 n 次整系数多项式 $p(x)$, 都有

$$t_{\mathbb{Z}}([a, b]) \leq \|p\|_{[a, b]}^{1/n}.$$

这个性质可用于估计 $t_{\mathbb{Z}}([a, b])$ 的上界. 例如, 对于区间 $[0, 1]$, 令

$$\begin{aligned} p_0(x) &= x, \\ p_1(x) &= 1 - x, \\ p_2(x) &= 2x - 1, \\ p_3(x) &= 5x^2 - 5x + 1, \\ p_4(x) &= 13x^3 - 19x^2 + 8x - 1, \\ p_5(x) &= 13x^3 - 20x^2 + 9x - 1, \\ p_6(x) &= 29x^4 - 58x^3 + 40x^2 - 11x + 1, \\ p_7(x) &= 31x^4 - 61x^3 + 41x^2 - 11x + 1, \\ p_8(x) &= 31x^4 - 63x^3 + 44x^2 - 12x + 1, \\ p_9(x) &= 941x^8 - 3764x^7 + 6349x^6 - 5873x^5 + 3243x^4 - 1089x^3 + 216x^2 - 23x + 1. \end{aligned}$$

定理 2.3 ^[5] 令

$$P_{210}(x) = p_0^{67}(x) \cdot p_1^{67}(x) \cdot p_2^{24}(x) \cdot p_3^9(x) \cdot p_4(x) \cdot p_5(x) \cdot p_6^3(x) \cdot p_7(x) \cdot p_8(x) \cdot p_9(x),$$

则有

$$t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \leq \|P_{210}\|^{1/210} = \frac{1}{2.3543\dots} \approx 0.424755.$$

上述结果的改进首先需要找到一组上确界范数尽可能小的整系数多项式 $\{p_i(x)\}$ (它们往往是高次整 Chebyshev 多项式的因子), 然后选取合适的整数 γ_i , 使得 $P(x) = \prod p_i(x)^{\gamma_i}$ 满足 $\|P\|_{[0, 1]}^{1/\deg P}$ 尽可能小, 即利用线性规划方法最小化 l , 使得

$$\sum r_i \frac{\log(|p_i(x)|)}{\deg(p_i)} \leq l, \quad x \in [0, 1],$$

其中 r_i 为非负实数且 $\sum r_i = 1$. 将 r_i 乘以一个足够大的数 (如 10^{10}), 即得 $t_{\mathbb{Z}}([0, 1])$ 的新的上界.

Borwein 和 Erdélyi^[5] 由此对 $P_{210}(x)$ 的因子 $p_i(x)$ 的指数 γ_i 进行了优化, 证明了

$$t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \leq \frac{1}{2.3605\dots} \approx 0.4236391.$$

之后, 通过对区间 $[0, 1]$ 上的上确界范数尽可能小的整系数多项式 $p_i(x)$ 进行不断搜寻, $t_{\mathbb{Z}}([0, 1])$ 的上界不断被改进, 以下是近几年的一些研究结果:

- $t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \leq 0.4234794$ (Habsieger 和 Salvy^[19]);
- $t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \leq 0.4232$ (Pritsker^[31]);
- $t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \leq 0.4231642$ (Wu^[43]);
- $t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \leq 0.42291334$ (Flammang^[12]);
- $t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \leq 0.42286386$ (Meichsner^[26]);
- $t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \leq 0.422685$ (Flammang^[13]).

对于一些给定的 Farey 区间 $I_{q,s}$, Flammang 等^[17] 以及 Aguirre 和 Peral^[1] 分别用辅助函数方法估计了 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的上界. 对于区间 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$, Flammang^[15] 使用辅助函数方法给出了当 $n = 2$, $m = 1$ 及 $n = 3$, $m = 1$ 时 $t_{\mathbb{Z}}([0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2])$ 的上界. 第 4.1 小节详细介绍了关于利用辅助函数估计整超限直径上界的方法.

2.2 整 Chebyshev 多项式

令 $q_n(x)$ 表示 $[a, b]$ 上的 n 次整 Chebyshev 多项式. 对于足够大的正整数 n , 尽管 $q_n(x)$ 的结构尚未明确, 但它通常含有某些与区间 $[a, b]$ 密切相关的因子, 并且这些因子往往具有较高的重数.

定义 2.2 对于一个不可约多项式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 如果存在一个常数 $C(f)$, 使得当 $k \geq C(f)$ 时, 对于足够大的正整数 n , 有

$$f^k(x) \mid q_n(x),$$

则称 $f(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上的 n 次整 Chebyshev 多项式 $q_n(x)$ 的必需因子.

根据引理 2.1, 当 n 足够大时, $[a, b]$ 上的关键多项式具有较小的上确界范数, 它们往往是 n 次整 Chebyshev 多项式的必需因子.

对于给定的次数 n , 搜寻 $[a, b]$ 上的 n 次整 Chebyshev 多项式的主流算法主要有以下步骤 (参见文献 [27]):

- (1) 确定最小上确界范数的上界. 对于给定的次数 n , 给出 $\|q_n\|_{[a,b]}$ 的一个初始上界 c_n . 例如, 取

$$c_n = \min_{0 < k < n} \|q_k q_{n-k}\|_{[a,b]}.$$

事实上, 这种方法经常可以给出一个具有最小上确界范数的 n 次整系数多项式.

- (2) 搜寻必需因子. 利用上述上界 c_n , 确定 $q_n(x)$ 的必需因子 f_i ($i = 1, \dots, k$, $k \leq n$), 并计算其重数的下界 β_i . 令 $F(x) = \prod_{i=1}^k f_i^{\beta_i}$ 表示 $q_n(x)$ 的已知因子.

- (3) 计算未知因子. 令 $G(x) = \sum_{j=1}^g b_j x^j \in \mathbb{Z}[x]$ ($g = n - \sum_{i=1}^k \beta_i \deg f_i$, $b_g \neq 0$) 表示 $q_n(x)$ 的未知因子. 由

$$|F(x)| \cdot |G(x)| \leq c_n, \quad x \in [a, b], \quad (2.2)$$

通过求解以 b_j 为变量的不等式组

$$|G(x_i)| \leq \frac{c_n}{|F(x_i)|} \quad (2.3)$$

的整数解 (其中 x_i 是 $[a, b]$ 上的至少 $g + 1$ 个控制点, 且满足 $F(x_i) \neq 0$), 即可实现对 $G(x)$ 的完全搜寻, 其中给出最小上确界范数 $\|F(x)G(x)\|_{[a,b]}$ 的 $G(x)$ 即为所求.

显然, 在上述算法中, 确定更多的必需因子并给出其尽可能大的重数对高次整 Chebyshev 多项式的搜寻工作显得特别重要. 对于给定的上界 c_n , 利用不等式 (2.2) 可以确定形如 $qx - p$ ($p, q \in \mathbb{Z}$, $a \leq p/q \leq b$, $F(p/q) \neq 0$) 的必需因子. 令 $g = \deg G(x)$, 若

$$c_n < \frac{F(p/q)}{q^g},$$

则有

$$\text{Res}(G(x), qx - p) = q^g \left| G\left(\frac{p}{q}\right) \right| < 1,$$

其中 $\text{Res}(P, Q)$ 表示多项式 P 和 Q 的结式. 根据结式的性质, 有 $q^g |G(p/q)| = 0$, 故 $(qx - p) \mid G(x)$. 此时用 $F(x)(qx - p)$ 替换 $F(x)$, $G(x)$ 依然表示未知因子. 对于高次必需因子的确定, 可利用不等式 (2.2) 和 Markov 不等式^[19]

$$\|P^{(r)}(x)\|_{[a,b]} \leq \frac{2^r}{(b-a)^r} \cdot \frac{n^2(n^2-1^2)^2(n^2-2^2)^2 \cdots (n^2-(r-1)^2)^2}{(2r-1)!!} \|P(x)\|_{[a,b]},$$

其中, $P^{(r)}(x)$ 表示多项式 $P(x)$ 的 r 阶导数, $(2r-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)$. Habsieger 和 Salvy^[19] 还曾使用 Lagrange 插值多项式

$$G(x) = \sum_{i=0}^g G(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

确定次数大于 1 的必需因子, 其中 $x_0, \dots, x_g$ 为 $[a, b]$ 上的 $g+1$ 个不同点. 设 $A(x) = a_d x^d + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}_d[x]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ 为 $A(x)$ 的零点. 若 $F(x_i) \neq 0$, $i = 0, \dots, g$, 则有 $|G(x_i)| \leq c_n / |F(x_i)|$, 因而

$$|G(\alpha_k)| \leq c_n \sum_{i=0}^g \frac{1}{F(x_i)} \prod_{i \neq j} \left| \frac{\alpha_k - x_j}{x_i - x_j} \right|, \quad 1 \leq k \leq d.$$

根据整系数多项式结式的性质, $A(x) \mid G(x)$ 当且仅当

$$|a_d|^g |G(\alpha_1)| \cdots |G(\alpha_d)| < 1.$$

此时可用 $F(x)A(x)$ 替换 $F(x)$. 当步骤 (2) 不再产生新的必需因子时, 即可对未知因子 $G(x)$ 进行完全搜索.

基于以上算法思路, Montgomery^[27] 最早给出了 $[0, 1]$ 上的 $n = 1, \dots, 5$ 次整 Chebyshev 多项式的例子. Borwein 和 Erdélyi^[5] 利用 Müntz-Legendre 多项式对整 Chebyshev 多项式必需因子指数的下界 β_i 进行了优化, 确定了 $[0, 1]$ 上的 $n = 6$ 次整 Chebyshev 多项式. 随着次数的增加, 整 Chebyshev 多项式的搜寻范围迅速扩大, 搜寻工作变得越来越困难. Habsieger 和 Salvy^[19] 利用 $[0, 1]$ 上的整 Chebyshev 多项式的对称性 (参见文献 [19, 引理 1 和 2]) 使其未知因子的次数减半, 从而可以获得更高次的整 Chebyshev 多项式, 由此计算出了 $[0, 1]$ 上的 $n \leq 75$ 次整 Chebyshev 多项式. 对于给定的次数 n , 该方法可以保证至少能找到一个 $q_n(x)$, 但是不能保证所有的 $q_n(x)$ 都被找到. 文献 [43] 在 Habsieger 和 Salvy 算法的基础上, 引入了广义的 Müntz-Legendre (generalized Müntz-Legendre, GML) 多项式, 对整 Chebyshev 多项式必需因子指数的下界 β_i 进一步优化, 由此计算出了 $[0, 1]$ 上的 $76 \leq n \leq 100$ 次整 Chebyshev 多项式. Meichsner^[26] 将 GML 多项式应用于更多的必需因子, 进一步改进了其指数的下界, 由此计算出了 $[0, 1]$ 上的所有 $100 \leq n \leq 145$ 次整 Chebyshev 多项式以及部分 $146 \leq n \leq 230$ 次整 Chebyshev 多项式. Hare 和 Hodges^[21] 在步骤 (3) 中引入了半无限线性规划和分支定界法, 由此给出了 $[0, 1]$ 上的 $n = 147, 149, 152, 153, 154, 158, 175, 191, 194, 198, 202, 236, 238, 239, 241, 244$ 次整 Chebyshev 多项式.

3 整 Chebyshev 问题的应用

1993 年, Amoroso^[3] 定义了紧集 $E \subseteq \mathbb{C}$ 上的 f -整超限直径, 即

$$t_{\mathbb{Z},f}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\substack{Q \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}, \\ \deg Q \leq n}} \sup_{x \in E} |Q(x)|^{1/n} \cdot f(x),$$

其中 $f: E \mapsto \mathbb{R}^+$ 是一个上半连续函数. 显然, 当 $f \equiv 1$ 时, $t_{\mathbb{Z},f}(E) = t_{\mathbb{Z}}(E)$ ^[3]. f -整超限直径作为整超限直径的一种广义形式, 在研究代数整数性质及有理数的对数的有理逼近等问题中有重要应用.

3.1 整超限直径与代数整数

一个复数 α 称为代数整数, 如果存在一个首一的整系数多项式

$$P(x) = x^d + b_1 x^{d-1} + \cdots + b_{d-1} x + b_d = \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i)$$

使得 $P(\alpha) = 0$. 当 $P(x)$ 在有理数域上不可约时, 称其为 α 的极小多项式. $P(x)$ 的次数即为 α 的次数. $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ 称为 α 的共轭元. 如果 α 的共轭元都是实数, 则称 α 是全实代数整数; 若其共轭元都是正数, 则称 α 是全实正代数整数.

代数整数的性质是数论领域的重要研究内容, 其研究对象包括许多在数论中存在已久的重要问题, 如 Lehmer 问题^[25]、Schinzel-Zassenhaus 猜想^[37]、Schur-Siegel-Smyth 迹问题^[4] 和整 Chebyshev 问题等. 这些问题的研究涉及代数整数的一些重要测度, 如 Mahler 测度 $M(\alpha) = \prod_{i=1}^d \max(1, |\alpha_i|)$ 、直径 $\text{diam}(\alpha) = \max_{1 \leq i < j \leq d} |\alpha_i - \alpha_j|$ 、房子 $|\alpha| = \max_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i|$ 和迹 $\text{Tr}(\alpha) = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ 等. 显然, 整超限直径也是描述代数整数性质的重要测度之一.

辅助函数在上述问题的研究中发挥了重要作用, 该方法最早由 Smyth^[39] 引入数论领域. 文献 [44] 首次将辅助函数与整超限直径建立了联系, 该理论在代数整数性质的研究中有广泛应用, 可用于解决如下问题: 对于给定的区域 $E \subseteq \mathbb{C}$ 和一个连续函数 $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, 描述集合

$$\Psi = \left\{ \psi(P) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \psi(\alpha_i) \mid P(x) = \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i) \ (\alpha_i \in E) \text{ 为代数整数 } \alpha \text{ 的极小多项式} \right\}$$

中元素的分布情形. 具体而言, 可计算集合 Ψ 中元素的下界, 或讨论 Ψ 中最小的几个元素是否离散, 并将它们明确找出来. 对于此类问题, 只需构造辅助函数

$$g(x, \mathbf{e}) = \psi(x) - \log |R(x)|, \quad x \in E, \quad (3.1)$$

其中, $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_j\}$ ($e_j \in \mathbb{R}^+$), $R(x) = \prod_{j=1}^J R_j^{e_j}(x)$ ($R_j(x) \in \mathbb{Z}[x]$).

设 d 次代数整数 α 的极小多项式为 $P(x)$, 它的共轭元 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ 都位于区域 E 内. 对于 $1 \leq i \leq d$, 有

$$\psi(\alpha_i) - \log |R(\alpha_i)| \geq m(\mathbf{e}),$$

其中 $m(\mathbf{e})$ 表示 $g(x, \mathbf{e})$ 在 E 内的最小值. 当 $i = 1, \dots, d$ 时, 对以上不等式两边求均值, 可得

$$\psi(P) - \frac{1}{d} \log |\text{Res}(P, R)| \geq m(\mathbf{e}),$$

其中 $\text{Res}(P, R)$ 是 $P(x)$ 和 $R(x)$ 的结式. 当 $R(\alpha) \neq 0$ 时, $\text{Res}(P, R)$ 是一个非零整数. 因此,

$$\psi(P) \geq m(\mathbf{e}). \quad (3.2)$$

反言之, 若 α 不满足 (3.2), 则 α 必为 $R(x)$ 的零点, 此时称 α 为例外, 称此 α 的极小多项式 $P(x)$ 为例外多项式, $\psi(P)$ 为集合 $(0, m(\mathbf{e})) \cap \Psi$ 内的离散点.

计算辅助函数 $g(x, \mathbf{e})$ 在 E 上的最小值 $m(\mathbf{e})$ 是一个优化问题, 即确定

$$m(\mathbf{e}) = \max_{\mathbf{e}} \min_{x \in E} g(x, \mathbf{e}).$$

文献 [44] 首次将此优化问题与 f -整超限直径建立了联系. 在辅助函数 (3.1) 中, 用 $H(x)^{t/h}$ 代替 $R(x)$, 其中, $H(x)$ 是一个次数为 h 的整系数多项式, t 是一个正实数, 即

$$g(x, \mathbf{e}) = \psi(x) - \frac{t}{h} \log |H(x)|.$$

我们希望 $g(x, \mathbf{e})$ 在 E 上的最小值 $m(\mathbf{e})$ 尽可能地大. 这就需要寻找适当的 $H(x)$, 使得

$$\sup_{x \in E} |H(x)|^{t/h} e^{-\psi(x)} \leq e^{-m(\mathbf{e})}.$$

假设 t 为定值, 不妨设 $t = 1$. 显然, 上述问题等价于计算 f -整超限直径, 即

$$t_{\mathbb{Z}, f}(E) = \lim_{h \rightarrow \infty} \inf_{\substack{H \in \mathbb{Z}[x], h \geq 1 \\ \deg H = h}} \sup_{x \in E} (|H(x)|^{1/h} \cdot f(x)),$$

其中 $f(x) = e^{-\psi(x)}$.

基于以上理论, 本文以 Lehmer 问题和 Schur-Siegel-Smyth 迹问题为例来说明 f -整超限直径在代数整数性质研究中的应用. Lehmer 问题是要确定代数整数 α 的绝对 Mahler 测度 $\Omega(\alpha) = M(\alpha)^{1/d}$ 构成的集合 $\mathfrak{M}$ 的分布情形. 当 α 为全实正代数整数时, 令 (3.1) 中的 $E = (0, \infty)$, $\psi(x) = \log_+ x$, 其中 $\log_+ x = \log(\max\{1, x\})$, 即计算

$$\mathcal{K}_+ = \sup_{Q \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}, t > 0} \left\{ \inf_{x \in (0, \infty)} \left(\log_+ x - \frac{t}{\deg Q} \log |Q(x)| \right) \right\}. \quad (3.3)$$

这等价于计算 $(0, \infty)$ 上的 f -整超限直径 $e^{\mathcal{K}_+}$, 其中 $f(x) = e^{-\log_+ x}$ (参见文献 [28]).

设 α 为非全实代数整数, 其所有共轭元都在一个扇形区域 $S_\theta = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |\arg z| \leq \theta\}$ 内, 其中 $0 \leq \theta < \pi$. 根据 Langevin^[24] 的结论, 可知存在一个常数 $c(\theta) > 1$ 使得 $\Omega(\alpha) \geq c(\theta)$. 对于某些特殊的 θ , 可以试图获得一个尽可能大的值 $c(\theta)$. 为此, 需考虑 S_θ 上的 f -整超限直径 $e^{\mathcal{K}_{+, \theta}}$ (参见文献 [16, 34, 35]), 其中

$$\mathcal{K}_{+, \theta} = \sup_{Q \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}, t > 0} \left\{ \inf_{x \in S_\theta} \left(\log_+ |x| - \frac{t}{\deg Q} \log |Q(x)| \right) \right\}. \quad (3.4)$$

Schur-Siegel-Smyth 迹问题是要确定全实正代数整数绝对迹 $\text{tr}(\alpha) = \text{Tr}(\alpha)/d$ 构成的集合 $\mathfrak{T}$ 的分布情形. 令 (3.1) 中的 $E = (0, \infty)$, $\psi(x) = x$, 即计算

$$\mathcal{K} = \sup_{Q \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}, t > 0} \left\{ \inf_{x > 0} \left(x - \frac{t}{\deg Q} \log |Q(x)| \right) \right\}.$$

这等价于计算 $(0, \infty)$ 上的 f -整超限直径 $e^{\mathcal{K}}$, 其中 $f(x) = e^{-x}$. 目前, 关于 $\mathcal{K}$ 的最新结果为

$$1.793145^{[42]} \leq \mathcal{K} \leq 1.8984^{[38]}.$$

此外, Schur-Siegel-Smyth 迹问题与整超限直径本身也有密切联系, 具体有如下结论.

命题 3.1 ^[5] 设 m 是一个正整数, 且满足

$$1 < \delta < \frac{1}{t_{\mathbb{Z}}([0, 1/m])} - m.$$

则除有限个以外, 对所有全实正代数整数 α , 都有

$$\text{tr}(\alpha) \geq \delta.$$

定理 3.1 ^[1] 设 m 是一个正整数, 则有

$$\frac{1}{\mathcal{K} + m} < t_{\mathbb{Z}}\left(\left[0, \frac{1}{m}\right]\right) < \frac{1}{1 + m},$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t_{\mathbb{Z}}([0, 1/m])} - m \right) = \mathcal{K}.$$

推论 3.1 ^[1] Farey 区间 $I_{q,s}$ 的整超限直径满足

$$\frac{1}{\mathcal{K}q + s} \leq t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s}) \leq \frac{1}{q + s},$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})} - s \right) = q\mathcal{K}.$$

推论 3.1 给出了 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的一个下界, 当 $s/q \geq 32$ 时, 其优于 Flammang^[11] 给出的下界. 若能得到 $\mathcal{K}$ 更优的上界, 即可利用该推论给出 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 一个更优的下界.

Flammang 等^[17] 在研究小区间 $[\frac{r}{s} - \delta, \frac{r}{s}]$ (其中 $\frac{r}{s}$ 是一个有理数, δ 趋于 0) 上的整超限直径问题时, 曾用不等式

$$\text{tr}(\alpha) - \alpha_1 \geq c,$$

其中 α 为全实正代数整数, α_1 为 α 的最小共轭元, 来估计 $t_{\mathbb{Z}}([\frac{r}{s} - \delta, \frac{r}{s}])$ 的上下界. 上述不等式的研究对解决 Schur-Siegel-Smyth 迹问题也有重要意义. 他们证明了 $c \geq 1.6$, 除非 α 是已知的有限个不可约全实正整系数多项式的零点. Aguirre 和 Peral^[1] 将 c 的值提高到了 1.66, 并改进了关于 $t_{\mathbb{Z}}([\frac{r}{s} - \delta, \frac{r}{s}])$ 上下界的结果. Flammang^[14] 将 c 的值提高到了 1.68.

3.2 整超限直径与无理数的有理逼近

对于无理数 β , 实数 μ ($\mu > 0$) 称为 β 的无理测度, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $q_0 = q_0(\varepsilon) > 0$, 使得对于任意整数 p 和 $q > q_0$, 都有

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| \geq q^{-\mu-\varepsilon}.$$

β 的最小无理测度记作 $\mu(\beta)$.

无理测度用来刻画无理数的有理逼近程度, 它是研究实数的有理化表示的重要工具. Rhin 利用下面的定理 (参见文献 [3]), 将整超限直径与有理数的对数的无理测度建立了联系.

定理 3.2 设 m 和 n 为两个正整数, 令

$$\alpha = (\sqrt{n} + \sqrt{m})^2, \quad \beta = (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2.$$

对于 $c > 0$, 令 $f_c = \exp(-c\chi_{[\beta, \alpha]})$, $\varepsilon(c) = \log t_{\mathbb{Z}, f_c}([0, \alpha])$. 若 $\varepsilon(c) < -1$, 则实数 $\log(n/m)$ 是一个无理数, 它的无理测度以 $-c/(1 + \varepsilon(c))$ 为界.

根据上述定理, Amoroso^[3] 利用 f - 整超限直径研究了无理数 $\log(n/m)$ 的无理测度. 对此, 首先需要找到合适的整系数多项式, 使其在区间 $[0, \beta]$ 上的上确界范数接近于 0, 且在区间 $[\beta, \alpha]$ 上的上确界范数不大. 然后, 通过对 $t_{\mathbb{Z}, f_c}([0, \alpha])$ 的精确估计计算 $\log(n/m)$ 的无理测度, 其中

$$f_c(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \beta], \\ \exp(-c), & x \in [\beta, \alpha]. \end{cases}$$

他还证明了 $\mu(\log 2) \leq 3.991$, $\mu(\log 3) \leq 16.960$, $\mu(\log(5/3)) \leq 6.851$, $\mu(\log(2/3)) \leq 3.402$, $\mu(\log(3/4)) \leq 3.154$, $\mu(\log(4/5)) \leq 3.017$, $\mu(\log(7/5)) \leq 5.456$, 其中 $\log 2$ 和 $\log(5/3)$ 的结论改进了 Rhin^[33] 的结果 $\mu(\log 2) \leq 4.0765$ 及 $\mu(\log(5/3)) \leq 7.224$.

4 Farey 区间及 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 上的整 Chebyshev 问题

第 2.1 和 2.2 小节详细介绍了整 Chebyshev 问题的研究方法. 对于长度小于 4 的区间 $[a, b]$ 上的整 Chebyshev 问题, 一方面, 希望尽可能精确地估计 $t_{\mathbb{Z}}([a, b])$ 的上下界; 另一方面, 希望获得更高次的整 Chebyshev 多项式. 这两方面的研究是相辅相成的, 然而后者的计算要复杂得多. 本节主要利用辅助函数方法改进了 Farey 区间及 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 上整超限直径的上界. 此外, 虽然本文没有对这两类区间上的高次整 Chebyshev 多项式进行具体计算, 但在研究整超限直径上界用到的辅助函数中找到了这两类区间上的部分关键多项式, 并发现它们通过适当变换后具有某种特殊的性质. 于是, 本文提出了关于任意 Farey 区间和 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 型区间上关键多项式性质的猜想. 如果猜想成立, 则将对上述区间上整超限直径上界的估计以及整 Chebyshev 多项式的搜寻工作产生积极影响.

4.1 Farey 区间及 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 上整超限直径的上界

本小节通过构造更优的辅助函数, 给出了 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 和 $t_{\mathbb{Z}}([0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2])$ 上界的最新结果. 首先将研究区间 $I_{q,s}$ 和 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 进行适当变换, 使该区间上的整超限直径等价于 (η, ∞) ($\eta \geq 0$) 上的 f - 整超限直径 (其中 $f(x)$ 与区间及变换有关), 从而通过构造 (η, ∞) 上相应的辅助函数来研究上述区间上的整超限直径问题.

4.1.1 Farey 区间上的整超限直径

对于 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的上界, 首先构造变换

$$\phi(x) = \frac{px + r}{qx + s},$$

这是 $[0, \infty)$ 到 $I_{q,s}$ 的一个双射. 然后定义映射 $\Phi: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}[X]$:

$$(\Phi P)(x) = (qx + s)^{\deg P} P(\phi(x)),$$

其中 $P \in \mathbb{Z}[X]$, 则有

$$\sup_{x \in I_{q,s}} |P(x)|^{1/\deg P} = \sup_{x>0} (qx+s)^{-1} |(\Phi P)(x)|^{1/\deg P}, \quad \deg(\Phi P) \leq \deg P.$$

条件 $qr - ps = 1$ 保证了 Φ 是一个双射. 因此,

$$\begin{aligned} t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s}) &= \inf_{Q \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}, k \geq 0} \left\{ \sup_{x>0} (qx+s)^{-1} |Q(x)|^{1/(k+\deg Q)} \right\} \\ &= \frac{1}{q} \inf_{Q \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}, 0 < t < 1} \left\{ \sup_{x>0} \left(x + \frac{s}{q}\right)^{-1} |Q(x)|^{t/\deg Q} \right\}. \end{aligned}$$

令 $\sigma = s/q > 1$,

$$\lambda(\sigma) = \sup_{Q \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}, 0 < t < 1} \left\{ \inf_{x>0} \left(\log(x+\sigma) - \frac{t}{\deg Q} \log |Q(x)| \right) \right\},$$

则有

$$t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s}) = \frac{1}{q} e^{-\lambda(s/q)}.$$

因此, 考虑 $(0, \infty)$ 上的辅助函数

$$f_{\sigma}(x) = \log(x+\sigma) - \log |Q(x)|, \quad (4.1)$$

其中 $Q(x) = \prod_{j=1}^J Q_{\sigma,j}(x)^{e_{\sigma,j}}$ ($Q_{\sigma,j}(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $e_{\sigma,j} > 0$). 通过对辅助函数 (4.1) 的最小值进行优化, 使其尽可能大, 即可得到 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 更好的上界. 表 1 列出了部分 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的最新上界. 在此之前的上界及 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的下界参见文献 [1].

特别地, 对于 $[0, 1]$ 上整超限直径的上界, 有如下定理.

定理 4.1 区间 $[0, 1]$ 上的整超限直径满足

$$t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) \leq 0.42267800.$$

表 1 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的上界

σ	$I_{q,s}$	$t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的上界	σ	$I_{q,s}$	$t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的上界	σ	$I_{q,s}$	$t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的上界
5/4	[3/4, 4/5]	0.09417499	7	[0, 1/7]	0.11541537	20	[0, 1/20]	0.04599632
4/3	[2/3, 3/4]	0.12122688	8	[0, 1/8]	0.10333368	32	[0, 1/32]	0.02962139
3/2	[1/2, 2/3]	0.17020877	9	[0, 1/9]	0.09356257	64	[0, 1/64]	0.01520315
5/3	[1/3, 2/5]	0.10673170	10	[0, 1/10]	0.08549283	128	[0, 1/128]	0.00770509
2	[0, 1/2]	0.28666255	11	[0, 1/11]	0.07871316	200	[0, 1/200]	0.00495571
5/2	[1/2, 3/5]	0.12419567	12	[0, 1/12]	0.07293551	256	[0, 1/256]	0.00387915
3	[0, 1/3]	0.21953851	13	[0, 1/13]	0.06795198	512	[0, 1/512]	0.00194632
4	[0, 1/4]	0.17865669	14	[0, 1/14]	0.06360873	1024	[0, 1/1024]	0.00097486
5	[0, 1/5]	0.15090795	15	[0, 1/15]	0.05978937			
6	[0, 1/6]	0.13075401	16	[0, 1/16]	0.05640420			

事实上, 根据等式

$$t_{\mathbb{Z}}([0, 1]) = \left(t_{\mathbb{Z}}\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right) \right)^{1/2}, \quad (4.2)$$

可以将 $[0, 1]$ 上的整超限直径转换到 $[0, 1/4]$ 上去研究, 这样可以降低多项式的次数, 从而找到更多更优的辅助多项式, 进而改进计算结果. 于是, 首先通过以下辅助函数证明了 $t_{\mathbb{Z}}([0, 1/4]) \leq 0.17865669$:

$$f_4(x) = \log(x + 4) - \log |Q(x)|, \quad (4.3)$$

其中, $x > 0$, $Q(x) = \prod_{j=1}^J Q_{4,j}(x)^{e_{4,j}}$ ($Q_{4,j}(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $e_{4,j} \in \mathbb{R}^+$). 并由此证明了定理 4.1. 附录表 A1 列出了辅助函数 (4.3) 中的 $Q_{4,j}$ 和 $e_{4,j}$, 并以此作为辅助函数方法的一个例子.

4.1.2 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 上的整超限直径

对于 $t_{\mathbb{Z}}([0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2])$ 的上界, 首先对区间 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 进行如下变换. 令

$$\mu = \left\lfloor \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{m}}{n - m} \right)^2 \right\rfloor, \quad \omega = \left\{ \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{m}}{n - m} \right)^2 \right\},$$

其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分, $\{x\}$ 表示 x 的小数部分, 则变换

$$x(t) = \frac{\mu t - 1}{-t}$$

将 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 映射到 $[\omega, \infty)$.

考虑定义在 $[\omega, \infty)$ 上的辅助函数

$$f_{\mu}(x) = \log |\mu + x| - \log |Q(x)|, \quad (4.4)$$

其中, $Q(x) = \prod_{j=1}^J Q_{\mu,j}(x)^{e_{\mu,j}}$ ($Q_{\mu,j}(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $e_{\mu,j} > 0$). 令 $U(x) = \prod_{j=1}^J |Q_{\mu,j}(x)|^{b_{\mu,j}}$, 其中 $\{b_{\mu,j}\}$ ($j = 1, \dots, J$) 是一个正整数序列, 且满足 $\deg U \leq N$. 记 $f_{\mu}(x)$ 在 $[\omega, \infty)$ 上的最小值为 $m(\mu)$, 则有

$$|U(x)| \leq e^{-m(\mu)N} |\mu + x|^N, \quad x \in [\omega, \infty). \quad (4.5)$$

此时令 $y = \frac{1}{\mu+x}$. 由 $x \in [\omega, \infty)$ 可知 $y \in [0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$. 定义

$$V(y) = y^N U\left(\frac{1 - \mu y}{y}\right).$$

则有 $\deg V = \deg U + (N - \deg U) = N$, 且 (4.5) 等价于

$$|V(y)| \leq e^{-m(\mu)N}, \quad y \in [0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2].$$

因此,

$$\max_{y \in [0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]} |V(y)|^{\frac{1}{N}} \leq e^{-m(\mu)}.$$

而这里的 V 是明确给出的, 从而有

$$t_{\mathbb{Z}}([0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]) \leq e^{-m(\mu)}.$$

表 2 列出了 $t_{\mathbb{Z}}([0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2])$ 上界的最新结果. 在此之前的结果参见文献 [15]. 以 $n = 5$ 和 $m = 4$ 为例, 附录表 A2 列出了辅助函数 (4.4) 中的 $Q_{\mu,j}$ 和 $e_{\mu,j}$. 由于篇幅原因, 本文中其他辅助函数的相关数据可通过与本文作者联系获取.

4.2 Farey 区间及 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 上的关键多项式

文献 [44] 中的算法结合了整超限直径的理论和半无限线性规划方法, 在整超限直径的上界问题以及辅助函数的最小值优化等问题的研究中起到了重要的作用. 本文在该算法的基础上, 结合文献 [41] 中的优化算法, 找到了更多更优的辅助多项式, 用于构造辅助函数 (4.1) 和 (4.4), 改进了相关结果. 然而, 上述算法中备选辅助多项式的搜寻方法具有一定的偶然性, 且随着研究区间的变化而变化, 计算量非常大. 因此, 人们一直在研究这些备选辅助多项式的规律和结构, 期望改进和完善上述算法.

事实上, Borwein 和 Erdélyi^[5] 最早在计算 $t_{\mathbb{Z}}([0, 1])$ 的上界时主要用到了 $[0, 1]$ 上的关键多项式. 在辅助函数方法引入之后, 这些多项式经过相应的变换依然作为重要的辅助多项式出现在辅助函数中. 因此, 本文分析了辅助函数 (4.1) 和 (4.4) 中的辅助多项式与 $I_{q,s}$ 及 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 上的关键多项式之间的关系. 我们发现, 表 3 中的多项式 P_i ($i = 1, \dots, 7$) 在辅助函数 (4.1) 中都能作为重要的辅助多项式 (对应的指数 $e_{\sigma,j}$ 较大, 实例可参考附录表 A1 中带 * 的多项式), $P_i(x-1)$ ($i = 1, \dots, 6$) 在辅助函数 (4.4) 中也可以作为重要的辅助多项式 (实例可参考附录表 A2 中带 * 的多项式). 这些多项式通过相应的变换之后, 恰好是表 1 和 2 中的 Farey 区间或 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 型区间上的关键多项式.

定理 4.2 对于表 3 中的多项式 $P_i(x)$ ($i = 1, \dots, 7$), 令

$$B_i(x) = (qx - p)^{\deg P_i} P_i\left(\frac{r - sx}{qx - p}\right).$$

则对于表 1 中的 Farey 区间 $I_{q,s}$, 有如下结论:

- (1) 若 $q/s \leq 1/4$, 则 $B_i(x)$ ($i = 1, \dots, 6$) 是 $I_{q,s}$ 上的关键多项式;
- (2) 若 $q/s > 1/4$, 则 $B_i(x)$ ($i = 1, \dots, 7$) 是 $I_{q,s}$ 上的关键多项式.

上述定理中, 变换后的多项式 $B_i(x)$ 是所有零点都位于 Farey 区间 $I_{q,s}$ 的整系数多项式, 且满足

$$|a_k|^{-1/k} > m(\sigma) > t_{\mathbb{Z}}([a, b]),$$

其中, a_k 是 $B_i(x)$ 的首项系数, $m(\sigma)$ 是 $f_{\sigma}(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上的最小值. 根据引理 2.1, $B_i(x)$ 是 $I_{q,s}$ 上的关键多项式.

猜想 4.1 定理 4.2 的结论对所有 Farey 区间都成立.

表 2 $t_{\mathbb{Z}}([0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2])$ 的上界

n	m	$t_{\mathbb{Z}}([0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2])$ 的上界	n	m	$t_{\mathbb{Z}}([0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2])$ 的上界
2	1	0.133418	4	3	0.063763
3	1	0.295288	5	3	0.179397
3	2	0.086060	5	4	0.050736

表 3 部分重要辅助多项式

$P_1 = x$
$P_2 = x - 1$
$P_3 = x^2 - 3x + 1$
$P_4 = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$
$P_5 = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1$
$P_6 = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1$
$P_7 = x^8 - 15x^7 + 83x^6 - 220x^5 + 303x^4 - 220x^3 + 83x^2 - 15x + 1$

表 4 $t_{\mathbb{Z}}(I_{q,s})$ 的上界

σ	n_{σ}	$I_{q,s}$	上界	σ	n_{σ}	$I_{q,s}$	上界
2	100	$[0, 1/2]$	0.28778644	9	135	$[0, 1/9]$	0.09420540
5/2	114	$[1/2, 3/5]$	0.12477477	16	131	$[0, 1/16]$	0.05669801
3	126	$[0, 1/3]$	0.22076257	20	136	$[0, 1/20]$	0.04620371
7	131	$[0, 1/7]$	0.11625966	32	140	$[0, 1/32]$	0.02971549
8	132	$[0, 1/8]$	0.10406858				

如果上述猜想成立, 则对任意 Farey 区间, 都可以很容易给出整超限直径的一个上界. 事实上, 根据引理 2.1, 当 n 足够大时, 区间 $[a, b]$ 上的关键多项式往往是 n 次整 Chebyshev 多项式的必需因子, 并具有较小的上确界范数. 因此, 它们在整超限直径上界的估计中可以起到很好的作用. 例如, 当 $I_{q,s} = [0, 1]$ 时, 表 3 中的多项式 $P_i(x)$ ($i = 1, \dots, 7$) 经变换

$$B_i(x) = (qx - p)^{\deg P_i} P_i\left(\frac{r - sx}{qx - p}\right)$$

得到的多项式分别对应于定理 2.3 中的 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 、 p_6 、 p_7 和 p_9 .

为了进一步说明定理 4.2 中找到的关键多项式对研究整超限直径的意义, 本文仅使用定理 4.2 中可转化为关键多项式的 7 个多项式 P_i 作为辅助多项式, 对表 1 中的部分 Farey 区间的整超限直径上界进行计算 (计算结果见表 4, 为了突出关键多项式的重要作用, 我们还在表中列出了得到表 1 中结果所需要的辅助多项式的个数 n_{σ}). 尽管这些结果就某个 Farey 区间的整超限直径的上界估计而言不如表 1 中的结果精确, 但这些关键多项式对研究任意 Farey 区间上的整超限直径问题或将起到积极作用.

定理 4.3 对于表 3 中的多项式 $P_i(x)$ ($i = 1, \dots, 6$), 令 $Q_i(x) = P_i(x - 1)$, 且

$$C_i(x) = x^{\deg Q_i} Q_i\left(\frac{1 - \mu x}{x}\right).$$

则对于表 2 中的 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 型区间, 有如下结论:

- (1) 若 $\omega \geq \{(1/(\sqrt{2} - 1))^2\}$, 则 $C_i(x)$ ($i = 1, \dots, 3$) 是 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 上的关键多项式;
- (2) 若 $\omega \geq \{(1/(\sqrt{3} - \sqrt{2}))^2\}$, 则 $C_i(x)$ ($i = 1, \dots, 4$) 是 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 上的关键多项式;
- (3) 若 $\omega \geq \{(1/(2 - \sqrt{3}))^2\}$, 则 $C_i(x)$ ($i = 1, \dots, 6$) 是 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 上的关键多项式.

上述定理中, 变换后的多项式 $C_i(x)$ 是所有根位于 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 的整系数多项式, 且满足

$$|b_k|^{-1/k} > m(\mu) > t_{\mathbb{Z}}([0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]),$$

其中 b_k 是多项式 $C_i(x)$ 的首项系数. 根据引理 2.1, $C_i(x)$ 是 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 上的关键多项式.

猜想 4.2 定理 4.3 的结论对所有 $[0, (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2]$ 型区间都成立.

致谢 作者对审稿人的仔细审查和提出的宝贵意见表示衷心的感谢.

参考文献

- 1 Aguirre J, Peral J C. The integer Chebyshev constant of Farey intervals. Publ Mat, 2007, 51: 11–27
- 2 Amoroso F. Sur le diamètre transfini entier d'un intervalle réel. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1990, 40: 885–911
- 3 Amoroso F. f -transfinite diameter and number theoretic applications. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1993, 43: 1179–1198

- 4 Borwein P B. Computational Excursions in Analysis and Number Theory. CMS Books in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 2002
- 5 Borwein P B, Erdélyi T. The integer Chebyshev problem. *Math Comp*, 1996, 65: 661–681
- 6 Borwein P B, Pinner C G, Pritsker I E. Monic integer Chebyshev problem. *Math Comp*, 2003, 72: 1901–1916
- 7 Chebyshev P L. Collected works, vol. 1. In: *Theory of Numbers*. Moscow: Akad Nauk SSSR, 1944, 285–288
- 8 Chudnovsky G V. Number theoretic applications of polynomials with rational coefficients defined by extremality conditions. In: *Arithmetic and Geometry. Progress in Mathematics*, vol. 35. Boston: Birkhäuser, 1983, 61–105
- 9 Fekete M. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Math Z*, 1923, 17: 228–249
- 10 Ferguson L B O. Approximation by Polynomials with Integral Coefficients. Providence: Amer Math Soc, 1980
- 11 Flammang V. Sur le diamètre transfini entier d'un intervalle à extrémités rationnelles. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1995, 45: 779–793
- 12 Flammang V. Trace of totally positive algebraic integers and integer transfinite diameter. *Math Comp*, 2009, 78: 1119–1125
- 13 Flammang V. On the absolute length of polynomials having all zeros in a sector. *J Number Theory*, 2014, 143: 385–401
- 14 Flammang V. The absolute trace of totally positive algebraic integers. *Int J Number Theory*, 2019, 15: 173–181
- 15 Flammang V. On the integer transfinite diameter of intervals of the form $[\frac{c}{s}, u]$ or $[0, (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2]$ and of Farey intervals. *Rocky Mountain J Math*, 2019, 49: 1547–1562
- 16 Flammang V, Rhin G. On the absolute Mahler measure of polynomials having all zeros in a sector. III. *Math Comp*, 2015, 84: 2927–2938
- 17 Flammang V, Rhin G, Smyth C J. The integer transfinite diameter of intervals and totally real algebraic integers. *J Théor Nombres Bordeaux*, 1997, 9: 137–168
- 18 Goluzin G M. Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Translations of Mathematical Monographs, vol. 26. Providence: Amer Math Soc, 1969
- 19 Habsieger L, Salvy B. On integer Chebyshev polynomials. *Math Comp*, 1997, 66: 763–770
- 20 Hare K G. Generalized Gorshkov-Wirsing polynomials and the integer Chebyshev problem. *Exp Math*, 2011, 20: 189–200
- 21 Hare K G, Hodges P W. Applications of integer semi-infinite programming to the integer Chebyshev problem. *Exp Math*, 2022, 31: 694–700
- 22 Hare K G, Smyth C J. The monic integer transfinite diameter. *Math Comp*, 2006, 75: 1997–2019
- 23 Hilbert D. Ein beitrage zur theorie des Legendreschen polynoms. *Acta Arith*, 1894, 18: 155–159
- 24 Langevin M. Méthode de Fekete-Szegő et problème de Lehmer (in French, with English summary). *C R Acad Sci Paris Ser I Math*, 1985, 301: 463–466
- 25 Lehmer D H. Factorization of certain cyclotomic functions. *Ann of Math (2)*, 1933, 34: 461–479
- 26 Meichsner A. The integer Chebyshev problem: Computational explorations. PhD Thesis. Vancouve: Simon Fraser University, 2009
- 27 Montgomery H L. Ten Lectures on the Interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis. Providence: Amer Math Soc, 1994
- 28 Mu Q, Wu Q. The measure of totally positive algebraic integers. *J Number Theory*, 2013, 133: 12–19
- 29 Nair M. On Chebyshev-type inequalities for primes. *Amer Math Monthly*, 1982, 89: 126–129
- 30 Nair M. A new method in elementary prime number theory. *J Lond Math Soc (2)*, 1982, 25: 385–391
- 31 Pritsker I E. Small polynomials with integer coefficients. *J Anal Math*, 2005, 96: 151–190
- 32 Ransford T. Potential Theory in the Complex Plane. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1995
- 33 Rhin G. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité. *Séminaire de Théorie des Nombres. Progr Math*, 1987, 71: 155–164
- 34 Rhin G, Smyth C. On the absolute Mahler measure of polynomials having all zeros in a sector. *Math Comp*, 1995, 64: 295–304
- 35 Rhin G, Wu Q. On the absolute Mahler measure of polynomials having all zeros in a sector. II. *Math Comp*, 2005, 74: 383–388
- 36 Rivlin T J. Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and number Theory, 2nd ed. New York: Wiley, 1990
- 37 Schinzel A, Zassenhaus H. A refinement of two theorems of Kronecker. *Michigan Math J*, 1965, 12: 81–85
- 38 Smith A. Algebraic integers with conjugates in a prescribed distribution. *arXiv:2111.12660*, 2021
- 39 Smyth C J. Totally positive algebraic integers of small trace. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1984, 34: 1–28
- 40 Trigub R M. Approximation of functions with Diophantine conditions by polynomials with integral coefficients. In:

- Metric Questions of the Theory of Functions and Mappings (in Russian). Kiev: Naukova Dumka, 1971, 267–333
- 41 Wang C, Pang X, Wu Q. The absolute S_k -measure of totally positive algebraic integers. Bull Aust Math Soc, 2023, 107: 239–249
- 42 Wang C, Wu J, Wu Q. Totally positive algebraic integers with small trace. Math Comp, 2021, 90: 2317–2332
- 43 Wu Q. A new exceptional polynomial for the integer transfinite diameter of $[0, 1]$. J Théor Nombres Bordeaux, 2003, 15: 847–861
- 44 Wu Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers. Math Comp, 2003, 72: 901–911

附录 A

表 A1 辅助函数 (4.3) 中的 $Q_{4,j}$ 和 $e_{4,j}$

j	$e_{4,j}$	d	$Q_{4,j}$ 的系数 (按次数升序排列)
1	0.10981843527207	1	0 1 *
2	0.07165064308176	1	-1 1 *
3	0.00229586198639	1	-2 1
4	0.02455529541246	2	1 - 3 1 *
5	0.00059422049507	2	1 - 4 1
6	0.00021005376185	2	2 - 4 1
7	0.00571337010074	3	-1 6 - 5 1 *
8	0.00012477607378	3	-3 9 - 6 1
9	0.00000063152719	3	-1 8 - 6 1
10	0.00580356567919	4	1 - 7 13 - 7 1 *
11	0.00264622837719	4	1 - 8 14 - 7 1 *
12	0.00007443021409	5	-1 10 - 25 22 - 8 1
13	0.00046138300080	5	-1 11 - 29 26 - 9 1
14	0.00016828855685	6	1 - 12 45 - 67 42 - 11 1
15	0.00010050774067	6	1 - 13 47 - 68 42 - 11 1
16	0.00006765585687	7	-1 14 - 65 127 - 117 54 - 12 1
17	0.00015149991708	7	-1 14 - 65 129 - 120 55 - 12 1
18	0.00000651678181	7	-1 15 - 69 133 - 121 55 - 12 1
19	0.00005947682724	7	-1 15 - 71 142 - 133 61 - 13 1
20	0.00004462936655	7	-1 15 - 71 144 - 136 62 - 13 1
21	0.00037558730726	7	-1 15 - 73 147 - 137 62 - 13 1
22	0.00029225989412	7	-1 16 - 78 157 - 143 63 - 13 1
23	0.00010469144634	7	-1 16 - 80 160 - 144 63 - 13 1
24	0.00000459837691	7	-1 16 - 80 158 - 143 63 - 13 1
25	0.00001600917165	7	-1 16 - 75 148 - 137 62 - 13 1
26	0.00015346440620	7	-1 14 - 66 136 - 131 61 - 13 1
27	0.00000006143244	7	-1 14 - 67 140 - 135 62 - 13 1
28	0.00001107316775	8	1 - 17 102 - 283 402 - 304 123 - 25 2

(续表)

j	$e_{4,j}$	d	$Q_{4,j}$ 的系数 (按次数升序排列)
29	0.00000136574213	8	1 - 16 94 - 265 391 - 308 128 - 26 2
30	0.00012246338932	8	1 - 15 79 - 202 273 - 197 75 - 14 1 *
31	0.00002228651098	8	1 - 15 81 - 207 277 - 198 75 - 14 1
32	0.00013215096716	8	3 - 40 187 - 402 445 - 269 89 - 15 1
33	0.00039559669028	8	1 - 15 83 - 220 303 - 220 83 - 15 1
34	0.00006303280137	8	1 - 17 96 - 250 333 - 233 85 - 15 1
35	0.00002235092881	8	1 - 16 91 - 240 323 - 228 84 - 15 1
36	0.00001731580017	8	1 - 19 121 - 312 386 - 251 87 - 15 1
37	0.00002274790521	9	-1 18 - 117 368 - 625 598 - 328 101 - 16 1
38	0.00003293814441	9	-1 18 - 119 383 - 654 621 - 336 102 - 16 1
39	0.00002194253219	9	-1 20 - 132 409 - 676 629 - 337 102 - 16 1
40	0.00001561552698	9	-1 17 - 110 356 - 623 607 - 334 102 - 16 1
41	0.00002407143000	9	-1 18 - 123 399 - 681 643 - 344 103 - 16 1
42	0.00003091761742	9	-2 34 - 206 599 - 934 819 - 411 116 - 17 1
43	0.00001360309509	9	-2 33 - 197 570 - 892 790 - 402 115 - 17 1
44	0.00002582006739	9	-3 46 - 256 695 - 1027 865 - 422 117 - 17 1
45	0.00003525915048	10	1 - 24 200 - 766 1560 - 1822 1273 - 538 134 - 18 1
46	0.00004669472320	10	4 - 71 451 - 1412 2472 - 2573 1641 - 643 150 - 19 1
47	0.00003528841557	11	-1 23 - 209 981 - 2645 4320 - 4393 2814 - 1127 272 - 36 2
48	0.00000174029354	11	-1 21 - 178 798 - 2047 3147 - 2991 1788 - 670 152 - 19 1
49	0.00000645584412	11	-1 22 - 194 884 - 2290 3549 - 3389 2022 - 749 166 - 20 1
50	0.00010863344146	11	-1 23 - 200 891 - 2276 3513 - 3361 2013 - 748 166 - 20 1
51	0.00001055846656	12	1 - 24 232 - 1178 3488 - 6377 7458 - 5700 2862 - 930 187 - 21 1
52	0.00007369698983	12	1 - 25 248 - 1278 3808 - 6954 8068 - 6081 2999 - 956 189 - 21 1
53	0.00003416210573	12	1 - 26 263 - 1359 4017 - 7242 8291 - 6178 3021 - 958 189 - 21 1
54	0.00000821253650	12	1 - 27 279 - 1453 4292 - 7690 8719 - 6421 3101 - 972 190 - 21 1
55	0.00007305494024	12	3 - 64 539 - 2396 6295 - 10360 11044 - 7767 3615 - 1096 207 - 22 1
56	0.00011286413790	12	1 - 27 281 - 1480 4441 - 8104 9354 - 6988 3401 - 1064 205 - 22 1
57	0.00001750202627	12	1 - 26 267 - 1417 4329 - 8054 9432 - 7097 3455 - 1076 206 - 22 1
58	0.00005055356959	13	-1 26 - 275 1563 - 5346 11665 - 16753 16093 - 10403 4504 - 1280 228 - 23 1
59	0.00013136571507	13	-1 26 - 273 1554 - 5352 11746 - 16905 16222 - 10459 4516 - 1281 228 - 23 1
60	0.00011727675466	13	-1 26 - 277 1584 - 5432 11845 - 16966 16240 - 10461 4516 - 1281 228 - 23 1
61	0.00006989857224	13	-1 26 - 277 1590 - 5477 11974 - 17148 16378 - 10518 4528 - 1282 228 - 23 1
62	0.00002060363458	13	-1 28 - 310 1798 - 6143 13193 - 18505 17323 - 10930 4637 - 1298 229 - 23 1
63	0.00001355039387	13	-1 27 - 293 1692 - 5822 12663 - 18000 17041 - 10840 4622 - 1297 229 - 23 1
64	0.00000014261397	13	-1 26 - 275 1565 - 5373 11764 - 16912 16223 - 10459 4516 - 1281 228 - 23 1
65	0.00002225431057	13	-1 26 - 280 1641 - 5798 12982 - 18948 18323 - 11822 5069 - 1416 246 - 24 1

(续表)

j	$e_{4,j}$	d	$Q_{4,j}$ 的系数 (按次数升序排列)
66	0.00000333073775	13	-1 27 - 295 1726 - 6037 13360 - 19305 18528 - 11892 5082 - 1417 246 - 24 1
67	0.00001947696209	13	-1 29 - 330 1949 - 6758 14699 - 20816 19588 - 12353 5202 - 1434 247 - 24 1
68	0.00000845795878	13	-1 26 - 279 1625 - 5702 12694 - 18464 17848 - 11549 4980 - 1401 245 - 24 1
69	0.00019878868561	14	1 - 29 348 - 2273 8999 - 22835 38411 - 43792 34311 - 18564 6891 - 1716 273 - 25 1
70	0.00001906451605	14	1 - 30 369 - 2447 9743 - 24658 41129 - 46348 35850 - 19153 7029 - 1734 274 - 25 1
71	0.00001535768771	14	1 - 30 367 - 2416 9552 - 24046 39997 - 45069 34944 - 18751 6921 - 1718 273 - 25 1
72	0.00003964261929	14	1 - 32 406 - 2701 10625 - 26404 43221 - 47907 36573 - 19355 7060 - 1736 274 - 25 1
73	0.00000276981208	14	1 - 29 350 - 2302 9159 - 23270 39064 - 44366 34612 - 18656 6906 - 1717 273 - 25 1
74	0.00000292843266	14	1 - 31 383 - 2502 9747 - 24216 39951 - 44861 34773 - 18684 6908 - 1717 273 - 25 1
75	0.00000428821743	14	1 - 31 391 - 2648 10738 - 27596 46547 - 52761 40813 - 21679 7864 - 1906 294 - 26 1
76	0.00003422509550	14	1 - 31 389 - 2617 10563 - 27120 45843 - 52156 40503 - 21586 7849 - 1905 294 - 26 1
77	0.00000012394901	14	2 - 54 606 - 3718 13874 - 33294 53181 - 57821 43361 - 22516 8036 - 1926 295 - 26 1
78	0.00009842631994	15	-1 32 - 424 3092 - 13932 41264 - 83362 117498 - 117078 82944 - 41694 14694 -3535 551 - 50 2
79	0.00000441109409	15	-1 32 - 428 3170 - 14536 43753 - 89503 127147 - 127071 89878 - 44920 15683 -3726 572 - 51 2
80	0.00001150695357	15	-1 32 - 420 2990 - 12960 36437 - 69143 90976 - 84516 55969 - 26426 8797 -2010 299 - 26 1
81	0.00001324417838	15	-1 29 - 352 2377 - 10042 28263 - 54895 74995 - 72742 50235 - 24603 8434 -1969 297 - 26 1
82	0.00009636921373	15	-1 31 - 401 2859 - 12573 36204 - 70736 95876 - 91359 61579 - 29311 9737 -2198 320 - 27 1
83	0.00007526078089	15	-1 31 - 402 2882 - 12762 36991 - 72643 98741 - 94100 63256 - 29957 9887 -2217 321 - 27 1
84	0.00004419074520	15	-1 29 - 361 2537 - 11174 32524 - 64532 88970 - 86215 59017 - 28473 9565 -2178 319 - 27 1
85	0.00003549746176	15	-1 30 - 378 2651 - 11575 33350 - 65578 89796 - 86616 59131 - 28490 9566 -2178 319 - 27 1
86	0.00001787142690	15	-1 31 - 401 2862 - 12606 36354 - 71103 96406 - 91827 61832 - 29392 9751 -2199 320 - 27 1
87	0.00001245087751	15	-1 31 - 401 2865 - 12648 36594 - 71839 97743 - 93327 62886 - 29852 9871 -2216 321 - 27 1
88	0.00007457240625	15	-1 31 - 399 2834 - 12443 35837 - 70122 95252 - 90976 61442 - 29285 9735 -2198 320 - 27 1
89	0.00000049381670	15	-1 31 - 399 2830 - 12399 35644 - 69676 94646 - 90469 61179 - 29203 9721 -2197 320 - 27 1
90	0.00003104569478	15	-1 33 - 446 3281 - 14753 43110 - 84876 115123 - 109043 72613 - 33964 11036

(续表)

j	$e_{4,j}$	d	$Q_{4,j}$ 的系数 (按次数升序排列)
			-2427 343 - 28 1
91	0.00003693919722	15	-1 31 - 405 2945 - 13295 39394 - 79051 109395 - 105494 71246 - 33650 10997 -2425 343 - 28 1
92	0.00000185679757	15	-1 31 - 403 2904 - 12953 37883 - 75164 103309 - 99564 67617 - 32268 10682 -2386 341 - 28 1
93	0.00000044289502	15	-1 37 - 560 4521 - 21465 63478 - 122084 157932 - 140945 88169 - 38873 11998 -2533 348 - 28 1
94	0.00015866809621	15	-1 30 - 379 2676 - 11805 34443 - 68646 95232 - 92910 63969 - 30960 10389 -2349 339 - 28 1
95	0.00009115457982	16	1 - 34 483 - 3799 18575 - 60092 133572 - 208958 233622 - 188323 109721 -45975 13653 - 2791 372 - 29 1
96	0.00004027007773	16	1 - 34 485 - 3848 18977 - 61723 137373 - 214430 238670 - 191344 110881 -46249 13689 - 2793 372 - 29 1
97	0.00003462107793	16	1 - 35 511 - 4115 20422 - 66376 146920 - 227447 250765 - 199091 114292 -47260 13881 - 2814 373 - 29 1
98	0.00003580682755	16	1 - 35 514 - 4172 20860 - 68201 151556 - 235052 259051 - 205149 117251 -48205 14069 - 2835 374 - 29 1
99	0.00005635133278	16	1 - 38 577 - 4691 23144 - 74279 161957 - 246862 268064 - 209761 118802 -48532 14108 - 2837 374 - 29 1
100	0.00003553891551	16	1 - 35 506 - 4022 19771 - 64041 142056 - 221185 245626 - 196378 113382 -47074 13860 - 2813 373 - 29 1
101	0.00003784219172	16	1 - 36 536 - 4367 21786 - 70848 156375 - 240800 263597 - 207528 118059 -48375 14089 - 2836 374 - 29 1
102	0.00000315431652	16	1 - 37 554 - 4506 22457 - 73113 161704 - 249314 272717 - 214063 121177 -49348 14279 - 2857 375 - 29 1
103	0.00003236197532	16	1 - 33 466 - 3702 18395 - 60462 136073 - 214543 240660 - 193883 112557 -46903 13840 - 2812 373 - 29 1
104	0.00000131608144	16	1 - 35 509 - 4075 20143 - 65412 145025 - 225188 249089 - 198319 114079 -47228 13879 - 2814 373 - 29 1
105	0.00001983947909	16	1 - 35 506 - 4024 19792 - 64127 142236 - 221398 245773 - 196436 113394 -47075 13860 - 2813 373 - 29 1
106	0.00003818358097	16	3 - 89 1124 - 8000 35886 - 107570 223060 - 327015 343693 - 261067 143657 -57000 16079 - 3134 400 - 30 1
107	0.00000419675483	17	-1 36 - 550 4720 - 25501 92279 - 232337 417146 - 542667 516513 - 361326 185617 - 69504 18660 - 3484 428 - 31 1
108	0.00002640304650	17	-1 33 - 476 3966 - 21278 77689 - 199280 366246 - 488307 475865 - 340054 177916 - 67627 18368 - 3458 427 - 31 1

(续表)

j	$e_{4,j}$	d	$Q_{4,j}$ 的系数 (按次数升序排列)
109	0.00000088650992	17	-1 34 - 498 4169 - 22320 81010 - 206222 376051 - 497812 482220 - 342966 178811 - 67803 18388 - 3459 427 - 31 1
110	0.00002400655001	17	-5 156 - 2073 15572 - 74095 237312 - 531020 850909 - 993076 853586 -543489 256333 - 88928 22324 - 3933 460 - 32 1
111	0.00000678142195	18	1 - 39 657 - 6325 38883 - 161904 473426 - 995926 1532842 - 1746410 1483809 -942967 447310 - 157047 40104 - 7219 866 - 62 2
112	0.00000174546739	18	1 - 37 594 - 5470 32255 - 129070 363143 - 735590 1090639 - 1197345 980449 -600627 274720 - 93033 22926 - 3985 462 - 32 1
113	0.00007204787382	18	1 - 38 623 - 5826 34724 - 139977 395906 - 805202 1197812 - 1318544 1081680 -662976 302784 - 102098 24961 - 4285 488 - 33 1
114	0.00000722673661	18	1 - 39 645 - 6025 35706 - 142935 401669 - 812691 1204386 - 1322430 1083194 -663346 302835 - 102101 24961 - 4285 488 - 33 1
115	0.00000778326767	18	1 - 39 651 - 6162 37007 - 149764 423865 - 860090 1273211 - 1391779 1132202 -687670 311233 - 104068 25258 - 4311 489 - 33 1
116	0.00002676830990	19	-1 40 - 698 7041 - 45949 206041 - 658869 1540059 - 2676303 3497997 -3464122 2608759 - 1493587 646959 - 209732 49908 - 8435 956 - 65 2
117	0.00003328760048	19	-1 39 - 665 6565 - 41933 183734 - 572246 1297249 - 2176560 2735658 -2597283 1871508 - 1024179 423897 - 131315 29867 - 4826 523 - 34 1
118	0.00000507616946	19	-1 40 - 696 6979 - 45126 199810 - 628598 1439592 - 2439968 3094945 -2958789 2139300 - 1169532 481169 - 147419 33002 - 5226 553 - 35 1
119	0.00000004926597	19	-3 110 - 1752 16067 - 94989 384730 - 1108586 2331057 - 3641534 4280369 -3818070 2596382 - 1346610 530317 - 156900 34205 - 5316 556 - 35 1
120	0.00008868988214	20	1 - 41 740 - 7788 53468 - 254231 868513 - 2184378 4113718 - 5870574 6400782 -5358878 3451481 - 1707182 644533 - 183537 38627 - 5809 589 - 36 1
121	0.00008036352658	20	1 - 43 801 - 8586 59398 - 282236 957747 - 2383323 4431330 - 6238871 6713191 -5552808 3538958 - 1735380 650830 - 184458 38706 - 5812 589 - 36 1
122	0.00004095264372	20	1 - 44 832 - 8993 62426 - 296678 1005032 - 2494125 4622032 - 6483722 6949625 -5724867 3632970 - 1773549 662124 - 186814 39033 - 5839 590 - 36 1
123	0.00001547303246	20	1 - 42 770 - 8175 56308 - 267478 910159 - 2275829 4257248 - 6033891 6536463 -5441186 3487661 - 1718505 646976 - 183880 38655 - 5810 589 - 36 1
124	0.00001526900864	20	1 - 43 801 - 8588 59459 - 282970 962477 - 2401924 4479292 - 6323561 6818427 -5646333 3598831 - 1762939 659836 - 186490 39006 - 5838 590 - 36 1
125	0.00008504515804	21	-1 49 - 1018 12021 - 91010 471956 - 1747760 4755571 - 9703686 15072989 -18019925 16707028 - 12066219 6796491 - 2978253 1008299 - 260384 50215 -6986 661 - 38 1
126	0.00003625507489	22	1 - 46 927 - 10910 84345 - 456796 1804347 - 5340970 12072805 - 21117732 28851273 - 30978690 26237767 - 17549897 9257035 - 3832810 1234988 - 305331

(续表)

j	$e_{4,j}$	d	$Q_{4,j}$ 的系数 (按次数升序排列)
			56647 - 7612 698 - 39 1
127	0.00003387523639	22	1 - 46 937 - 11215 88389 - 487705 1956948 - 5858594 13326501 - 23342689 31796386 - 33920590 28470258 - 18839184 9821649 - 4018424 1279932 - 313088 57548 - 7675 700 - 39 1
128	0.00007269750425	22	1 - 46 939 - 11286 89482 - 497442 2013348 - 6084580 13976959 - 24721648 33987068 - 36559705 30899456 - 20553713 10749052 - 4400835 1398778 - 340375 62024 - 8170 733 - 40 1
129	0.00017998048738	22	1 - 46 939 - 11288 89523 - 497792 2015013 - 6089550 13986867 - 24735307 34000318 - 36568784 30903809 - 20555136 10749353 - 4400872 1398780 - 340375 62024 - 8170 733 - 40 1
130	0.00000557136015	22	1 - 46 936 - 11199 88389 - 489531 1976379 - 5966144 13707356 - 24275528 33442568 - 36065313 30564441 - 20384689 10686132 - 4383864 1395566 - 339972 61994 - 8169 733 - 40 1
131	0.00016840947348	25	-1 54 - 1301 18597 - 177078 1196145 - 5962946 22537951 - 65853957 150917647 -274245201 398454085 - 465722798 439788153 - 336364242 208503620 - 104608016 42320372 - 13714750 3523286 - 706312 107909 - 12112 940 - 45 1
132	0.00013448385380	27	-1 58 - 1523 24077 - 257193 1975976 - 11352038 50074340 - 172843774 473529933 - 1040904390 1851395810 - 2681889517 3179593165 - 3096012763 2481070858 - 1637403507 889070058 - 396065851 144038274 - 42431077 10009057 -1859292 265384 - 28034 2061 - 94 2
133	0.00001806526114	27	-1 56 - 1422 21769 - 225448 1680966 - 9380221 40219147 - 135027737 360006311 - 770526537 1335052037 - 1884794971 2178812264 - 2069556320 1618605701 - 1042997479 553197576 - 240828302 85620240 - 24665138 5691337 -1034402 144483 - 14938 1075 - 48 1
134	0.00000517250722	27	-1 58 - 1517 23802 - 251535 1906425 - 10778191 46688520 - 157977677 423615929 - 910204425 1580553943 - 2232784667 2578722726 - 2443423496 1903401744 - 1219739504 642366871 - 277240891 97568653 - 27781387 6326938 -1133374 155821 - 15837 1119 - 49 1
135	0.00011121762820	27	-1 58 - 1518 23849 - 252520 1918604 - 10877796 47262320 - 160400700 431323874 - 929041551 1616431613 - 2286604491 2642789421 - 2504242742 1949563308 - 1247756278 655930479 - 282449435 99140026 - 28148280 6391723 -1141718 156559 - 15877 1120 - 49 1
136	0.00007086541185	27	-1 58 - 1518 23850 - 252545 1918880 - 10879580 47269870 - 160422870 431370592 - 929113644 1616514023 - 2286674603 2642833746 - 2504263388 1949570269 - 1247757924 655930737 - 282449459 99140027 - 28148280 6391723 -1141718 156559 - 15877 1120 - 49 1
137	0.00000213707796	27	-1 58 - 1516 23762 - 250823 1898955 - 10726501 46437832 - 157092429

(续表)

j	$e_{4,j}$	d	$Q_{4,j}$ 的系数 (按次数升序排列)
			421279869 - 905511825 1573282098 - 2224008565 2570421456 - 2437247769 1899786210 - 1218078440 641772158 - 277077036 97534631 - 27776243 6326404 -1133340 155820 - 15837 1119 - 49 1
138	0.00002885334065	28	3 - 161 3958 - 59231 605132 - 4489439 25131606 - 108943520 372575386 -1019261685 2254415244 - 4064905561 6013604030 - 7335587039 7404980494 -6200572835 4311616441 - 2489120236 1190948071 - 470611356 152724174 -40364528 8584748 - 1444242 187454 - 18074 1217 - 51 1
139	0.00004375922666	29	-1 62 - 1751 29968 - 348944 2942849 - 18691245 91804121 - 355379878 1099752930 - 2750458715 5606972996 - 9379692086 12944384120 - 14796761356 14051203841 - 11104790410 7308783970 - 4003668414 1821648443 - 685865353 212443208 - 53674417 10927699 - 1762011 219432 - 20319 1315 - 53 1
140	0.00001272174263	33	-1 70 - 2259 44748 - 611241 6132854 - 47018045 282926149 - 1362289955 5325047308 - 17086788276 45401725430 - 100596179065 186902724248 - 292499902656 386957715358 - 433940201399 41333283742 - 334835723836 230808835296 -135343326016 67431698682 - 28481090769 10162331776 - 3047801233 762963840 -157907658 26669991 - 3610068 381669 - 30324 1701 - 60 1
141	0.00003372268379	35	-1 74 - 2534 53482 - 781909 8438538 - 69962439 457911229 - 2413036473 10390458922 - 36979113171 109759539367 - 273665878663 576518773273 -1030998038933 1571052436144 - 2046001856733 2282402215025 - 2184502597070 1795613418712 - 1267989979680 768961440419 - 400030425686 178164935816 -67732650363 21887890927 - 5978292201 1369716692 - 260608306 40623155 - 5092656 500185 - 37019 1939 - 64 1
142	0.00001881086249	37	1 - 73 2462 - 51101 733514 - 7756575 62841947 - 400450173 2044079898 -8465289728 28686133097 - 79910195616 183055849433 - 342875365050 516396994228 -598824231365 465343138020 - 65684322685 - 501561643898 1019724553509 -1285854138150 1236082880180 - 961736956429 621047278876 - 336886062097 154376206426 - 59866752424 19626301404 - 5420026088 1253245706 - 240452920 37795668 - 4780498 474166 - 35484 1882 - 63 1

表 A2 辅助函数 (4.4) 中的 $Q_{\mu,j}$ 和 $e_{\mu,j}$ ($n = 5, m = 4$)

j	$e_{\mu,j}$	d	$Q_{\mu,j}$ 的系数 (按次数升序排列)
1	0.03549616314229	1	-1 1 *
2	0.02445910477736	1	-2 1 *
3	0.00426265447052	1	-3 1
4	0.00874997994810	2	5 - 5 1 *
5	0.00066724594714	2	7 - 6 1

(续表)

j	$e_{\mu,j}$	d	$Q_{\mu,j}$ 的系数 (按次数升序排列)
6	0.00013458482019	2	6 - 6 1
7	0.00000261982091	2	11 - 7 1
8	0.00243695171229	3	-13 19 - 8 1 *
9	0.00075322582337	3	-19 24 - 9 1
10	0.00004546610638	3	-16 23 - 9 1
11	0.00000536480355	4	41 - 86 63 - 19 2
12	0.00002604973946	4	23 - 47 34 - 10 1
13	0.00104284976550	4	29 - 58 40 - 11 1 *
14	0.00055250881754	4	31 - 61 41 - 11 1 *
15	0.00025220415970	5	-67 163 - 149 64 - 13 1
16	0.00006487268593	5	-89 210 - 183 74 - 14 1
17	0.00005412347403	6	141 - 427 514 - 312 100 - 16 1
18	0.00019915463740	6	353 - 904 916 - 470 129 - 18 1
19	0.00005306195305	7	-223 872 - 1364 1110 - 509 132 - 18 1
20	0.00006984650936	7	-484 1673 - 2331 1698 - 699 163 - 20 1
21	0.00038167556473	8	1019 - 4024 6619 - 5931 3172 - 1039 204 - 22 1
22	0.00001510329824	8	941 - 3767 6284 - 5710 3094 - 1025 203 - 22 1
23	0.00003969084972	8	905 - 3671 6187 - 5663 3083 - 1024 203 - 22 1
24	0.00002035402742	8	1091 - 4192 6769 - 5995 3185 - 1040 204 - 22 1
25	0.00005272617147	8	2461 - 8431 12182 - 9689 4639 - 1370 244 - 24 1
26	0.00005522434485	8	2279 - 7918 11605 - 9358 4537 - 1354 243 - 24 1
27	0.00003163568292	9	-2677 12490 - 24974 28093 - 19595 8791 - 2538 455 - 46 2
28	0.00000876405989	9	-1727 7965 - 15669 17263 - 11742 5116 - 1429 247 - 24 1
29	0.00002089558898	9	-2306 10432 - 20072 21550 - 14227 5993 - 1613 268 - 25 1
30	0.00008656282145	9	-4439 18034 - 31423 30814 - 18748 7346 - 1856 292 - 26 1
31	0.00000026885355	10	9343 - 46287 99708 - 123104 96559 - 50324 17667 - 4130 616 - 53 2
32	0.00001819061803	10	4339 - 22173 49092 - 62007 49483 - 26080 9201 - 2148 318 - 27 1
33	0.00003443666305	10	7363 - 35097 72702 - 86217 64854 - 32355 10851 - 2418 343 - 28 1
34	0.00003563068607	10	6607 - 32055 67560 - 81450 62203 - 31449 10665 - 2397 342 - 28 1
35	0.00003567892530	10	6733 - 32562 68396 - 82181 62569 - 31554 10681 - 2398 342 - 28 1
36	0.00009204263896	10	6037 - 29720 63521 - 77597 59986 - 30661 10496 - 2377 341 - 28 1
37	0.00006072988319	10	6187 - 30295 64431 - 78367 60362 - 30767 10512 - 2378 341 - 28 1
38	0.00008674536648	10	7513 - 35522 73187 - 86502 64945 - 32370 10852 - 2418 343 - 28 1
39	0.00002048134701	10	6007 - 29635 63430 - 77551 59975 - 30660 10496 - 2377 341 - 28 1
40	0.00000838012577	10	5869 - 29100 62571 - 76812 59608 - 30555 10480 - 2376 341 - 28 1
41	0.00000229897757	10	6328 - 31047 66070 - 80284 61682 - 31316 10647 - 2396 342 - 28 1
42	0.00001085425923	10	5897 - 29180 62658 - 76857 59619 - 30556 10480 - 2376 341 - 28 1

(续表)

j	$e_{\mu,j}$	d	$Q_{\mu,j}$ 的系数 (按次数升序排列)
43	0.00007622560074	10	9437 - 43690 88296 - 102471 75561 - 36968 12148 - 2647 366 - 29 1
44	0.00003836090852	10	8461 - 40470 83848 - 99138 74099 - 36593 12096 - 2644 366 - 29 1
45	0.00002137152569	12	39361 - 239893 652380 - 1046597 1103070 - 804658 416632 - 154319 40597 -7401 888 - 63 2
46	0.00000040938214	12	40201 - 243833 660398 - 1055892 1109835 - 807863 417620 - 154510 40618 -7402 888 - 63 2
47	0.00006428354888	12	30423 - 181370 481141 - 750829 767527 - 541466 270370 - 96322 24315 -4245 487 - 33 1
48	0.00001096310862	12	31373 - 185895 490446 - 761659 775380 - 545141 271479 - 96530 24337 -4246 487 - 33 1
49	0.00012623690160	12	31313 - 185695 490179 - 761476 775312 - 545128 271478 - 96530 24337 -4246 487 - 33 1
50	0.00000094116633	12	35778 - 212840 562787 - 874142 887899 - 621162 306880 - 107896 26804 -4591 515 - 34 1

The integer Chebyshev problem and its applications

Cong Wang & Qiang Wu

Abstract The integer Chebyshev problem aims to find a nonzero polynomial of degree at most n , with integer coefficients, that has the smallest possible supremum norm on a given interval, and to analyze the behavior as n tends to infinity. In this paper, we summarize the research history and research methods of this problem and introduce its generalization and applications. Then we study this problem on two types of intervals with lengths less than 4. We find that for the polynomials with integer coefficients of degree n (when n is large enough), having small supremum norm on the above intervals, some of their factors have a certain property. We conjecture that this property holds for all intervals of these two types.

Keywords integer Chebyshev problem, integer transfinite diameter, integer Chebyshev polynomial, critical polynomial, necessary factor, auxiliary function

MSC(2020) 11C08, 11J54, 11Y40

doi: 10.1360/SSM-2023-0293