张量框架下刚体定点转动的运动学新描述

刘占芳^{1*}, 李俊峰²

1. 重庆大学航空航天学院, 重庆 400044;

2. 清华大学航天航空学院, 北京 100084

*联系人, E-mail: zhanfang@cqu.edu.cn

收稿日期: 2021-12-15; 接受日期: 2022-03-03; 网络出版日期: 2022-09-19

国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金(编号: U1830115)、国家自然科学基金(编号: 11772071)和中央高校基本科研业务费(编号: 2020CDXYHK6, 2020CDJQY-Z004)资助项目

摘要 现有理论力学没有给出完整的刚体定点转动的运动学描述, 譬如不能确定多次定点转动合成的转角, 只有关于欧拉角的角速度矢量公式, 而两次转动合成的角加速度矢量形式也存在问题. 本文论证了刚体定点转动的转角、角速度、角加速度本质上都不是矢量, 而是二阶反对称张量, 但可用对应的伪矢量来表达. 建立了连续转动的合成是绝对参考系下相应正交张量的有序内积表达式, 提出了角速度张量及角速度矢量、角加速度张量及角加速度矢量合成的一般形式. 欧拉角描述刚体姿态的方法是借助三次有序定轴转动来等效于定点转动, 利用一般的合成法则建立了关于欧拉角的角速度矢量和角加速度矢量的表达式, 并且发现角速度矢量和角加速度矢量在莱沙尔(Resal)坐标系下具有十分简洁的形式.

关键词 角张量, 角速度张量, 角加速度张量, 欧拉角, 合成法则

PACS: 06.30.GV, 45.40.Cc, 45.40.Ln

1 引言

刚体的定点转动是刚体围绕某个固定点的运动, 这时, 刚体各点都在以该固定点为中心的同心球面上运动. 定点转动的运动学及动力学在导航陀螺、齿轮传动、机器人运动控制、飞行控制等领域有极为重要的应用. 在连续介质力学中, 变形梯度分解为伸长张量和转动张量, 其中局部的转轴和转角在变形过程中不断变化, 且角速度和角加速度的方向和大小也在发生变化, 所以研究刚体定点转动的运动学是描述相对复

杂的连续介质运动学的理论基础.

在刚体上固连一个笛卡儿直角坐标系, 刚体定点转动可由固连的直角坐标系相对不动的直角坐标系的方位来表达, 不动的坐标系作为描述刚体姿态的参考坐标系. 刚体定点转动的姿态由3个独立参数来决定, 经典的表达方法是欧拉角, 借助3次顺序绕轴转动来确定进动角、章动角、自旋角^[1,2]. 以欧拉角表达的角速度矢量为欧拉运动学方程, 欧拉利用3次绕轴转动的角速度矢量分别向参考坐标系和连体坐标系投影, 通过运动合成得到角速度矢量的分量关于欧拉角的表达

引用格式: 刘占芳, 李俊峰. 张量框架下刚体定点转动的运动学新描述. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2022, 52: 114511

Liu Z F, Li J F. New kinematics description of the rigid-body fixed-point rotation in a tensor frame (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2022, 52: 114511, doi: 10.1360/SSPMA-2021-0349

式^[1,2]. 但是, 欧拉角方法遇到两个重要问题: 一是没有提及定点转动的瞬时转轴和瞬时转角, 二是没有确定与外力矩直接关联的角加速度矢量. 对于后者, 如果把绕轴转动的角速度视为矢量, 则求导后按照矢量加法法则应得到定点转动的角加速度矢量.

角速度本质上不是矢量而是二阶反对称张量^[2-4]. 观察二阶反对称张量对应的 3×3 矩阵, 其主对角线上的分量为零, 上三角与下三角的分量互为负数, 所以独立的分量只有3个. 因此, 二阶反对称张量可用对应的矢量来表达, 称这个矢量为轴矢量或伪矢量. 由于角速度不是矢量, 所以不能简单采用矢量的加法法则进行角速度的合成.

与角速度直接相关的是定点转动的转角问题, 迄今尚缺乏关于定点转动的转角为二阶反对称张量的广泛共识. 理论力学教材经常提到^[5], 有限转角既有大小也有方向, 但有限转角不是矢量, 与此同时, 认为小转角是矢量. 这里的冲突在于: 转角是否为矢量不应因其大小而改变矢量的性质. 有限转角不是矢量可以通过刚体绕两个正交轴作两次顺序转动的例子予以说明^[1,2,5]. 若假设转角为矢量, 转动的合成应为两个角矢量相加. 由于矢量之和满足加法交换律, 加法顺序不会改变合成结果, 但刚体实际姿态却与两次转动的次序有关, 表明刚体定点转动的合成与采用角矢量加法进行合成存在不可调和的矛盾. 从定轴转动可用转角相加进行合成, 到定点转动不能采用转角相加进行转动合成, 这是定点转动的运动学值得探讨的基本问题. 另外, 刚体定点转动的合成以正交张量的有序内积来表达^[6,7], 然而, 刚体定点转动总归为绕瞬时轴的转动过程, 为此应该考察合成过程中旋转轴和旋转角与正交张量内积表达的内在联系.

回顾欧拉角的方法, 实质是通过3次有序绕轴转动的合成等效一次定点转动. 连续转动过程必然出现多个坐标系之间的相对转动, 每次转动都涉及相对转动的两个坐标系以及相应的正交张量, 所以必须指出连续转动合成所依赖的绝对参考系以及在该坐标系下转动合成的顺序. 由于这些问题没有完全理清, 对比现有教材或文献的结果^[2,7,8], 往往会纠结于合成顺序以及合成正交张量不一致的情况.

本文从描述刚体定点转动的正交张量出发, 论证定点转动的角张量、角速度张量和角加速度张量及其对应的矢量, 澄清各种运动量关于不同坐标系的表征

与联系, 建立连续定点转动、角速度张量及其矢量、角加速度张量及其矢量的合成法则. 在此基础上, 作为应用实例, 进一步给出欧拉角表达的定点转动的正交张量以及角速度矢量和角加速度矢量的表达式.

2 刚体定点转动的正交张量

参照图1, 取观察刚体运动的参考系为不动的笛卡儿直角坐标系, 取定点为参考系的原点. 记参考系的基矢量为 $\mathbf{e}_i^1$ ($i=1, 2, 3$), 上标1代表参考系. 连体坐标系固连在刚体上, 为直角坐标系且与刚体共同运动, 记连体基为 $\mathbf{e}_i^0$ ($i=1, 2, 3$), 上标0来标识连体系. 考虑初始时刻两个坐标系完全重合, 当刚体绕坐标系原点作定点转动时, 连体基与参考基彼此分离. 在参考基与连体基之间进行基矢量的展开, 立即有两组标准正交基之间的转换关系:

$$\mathbf{e}_i^1 = (\mathbf{e}_i^1 \cdot \mathbf{e}_j^0) \mathbf{e}_j^0, \quad \mathbf{e}_i^0 = (\mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_j^1) \mathbf{e}_j^1. \quad (1)$$

在一个单项表达式中出现一次的下标为自由指标, 重复出现一次的下标为哑标, 重复下标满足爱因斯坦求和约定. 由于基矢量为单位矢量, 则有 $\mathbf{e}_i^1 \cdot \mathbf{e}_j^0 = \cos(\mathbf{e}_i^1, \mathbf{e}_j^0)$ 和 $\mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_j^1 = \cos(\mathbf{e}_i^0, \mathbf{e}_j^1)$, 表示两组基矢量的两两内积组成参考基与连体基夹角的方向余弦矩阵, 也是两组基矢量之间的正交转换系数, 共计9个分量. 注意到两个矢量点积的可交换性, 记转换矩阵为

$$R_{ij}^{10} = \mathbf{e}_i^1 \cdot \mathbf{e}_j^0. \quad (2)$$

图1 运动的连体基 $\mathbf{e}_i^0$ 相对不动的参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 作定点转动

Figure 1 The conjoined base $\mathbf{e}_i^0$ subject to fixed-point rotation relative to the reference base $\mathbf{e}_i^1$.

为便于识别转换矩阵 R_{ij}^{10} , 规定不动的上标1在前而运动的上标0在后, 因此, 两组基矢量之间的转换关系改写为

$$\mathbf{e}_i^1 = R_{ij}^{10} \mathbf{e}_j^0, \quad \mathbf{e}_i^0 = R_{ji}^{10} \mathbf{e}_j^1. \quad (3)$$

注意上面第二个矩阵为第一个矩阵的转置. 取转换系数 R_{ij}^{10} 的第一个下标为行, 而第二个下标为列, 有对应的正交矩阵:

$$[R_{ij}^{10}] = [\mathbf{e}_i^1 \cdot \mathbf{e}_j^0] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^1 \cdot \mathbf{e}_1^0 & \mathbf{e}_1^1 \cdot \mathbf{e}_2^0 & \mathbf{e}_1^1 \cdot \mathbf{e}_3^0 \\ \mathbf{e}_2^1 \cdot \mathbf{e}_1^0 & \mathbf{e}_2^1 \cdot \mathbf{e}_2^0 & \mathbf{e}_2^1 \cdot \mathbf{e}_3^0 \\ \mathbf{e}_3^1 \cdot \mathbf{e}_1^0 & \mathbf{e}_3^1 \cdot \mathbf{e}_2^0 & \mathbf{e}_3^1 \cdot \mathbf{e}_3^0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

描述正交变换的正常正交张量 $\mathbf{R}^{10}$ 是连体基 $\mathbf{e}_i^0$ 与参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 的有序并乘^[3,4,9,10]:

$$\mathbf{R}^{10} = \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_2^1 + \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_3^1 = \mathbf{e}_i^0 \mathbf{e}_i^1. \quad (5)$$

连体基 $\mathbf{e}_i^0$ 与参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 的并乘为张量积. 把式(3)分别代入式(5), 有正交张量的另外两种形式:

$$\mathbf{R}^{10} = R_{ij}^{10} \mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_j^1, \quad \mathbf{R}^{10} = R_{ij}^{10} \mathbf{e}_i^0 \mathbf{e}_j^0. \quad (6)$$

因此, 正交张量 $\mathbf{R}^{10}$ 在连体基和参考基上具有相同的分量 R_{ij}^{10} , 这是正交张量关于连体基和参考基表达的不变性^[3,4,10,11]. 初始时刻没有转动时, 该正交张量退化为二阶单位张量 $\mathbf{I}$. 正交张量与其转置的内积为二阶单位张量, 有恒等式

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{10} \cdot (\mathbf{R}^{10})^T &= (\mathbf{e}_i^0 \mathbf{e}_i^1) \cdot (\mathbf{e}_j^1 \mathbf{e}_j^0) = \delta_{ij} \mathbf{e}_i^0 \mathbf{e}_j^0 = \mathbf{e}_i^0 \mathbf{e}_i^0 = \mathbf{I}, \\ (\mathbf{R}^{10})^T \cdot \mathbf{R}^{10} &= (\mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_i^0) \cdot (\mathbf{e}_j^0 \mathbf{e}_j^1) = \delta_{ij} \mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_j^1 = \mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_i^1 = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (7)$$

二阶单位张量 $\mathbf{I}$ 是关于坐标系的不变张量, 所以不必区分参考基和连体基下的克罗耐克尔符号 δ_{ij} 以及二阶单位张量. 若把式(6)代入上面的恒等式, 易得正交张量恒等式的两种分量形式:

$$R_{ik}^{10} R_{jk}^{10} = \delta_{ij}, \quad R_{ki}^{10} R_{kj}^{10} = \delta_{ij}. \quad (8)$$

由上式可知, 正交张量有9个分量但存在6个约束条件, 所以正交张量只有3个独立分量.

刚体运动要在参考系下进行观察. 取转动前质点的初始位置矢量 $\mathbf{x}^0$ 为

$$\mathbf{x}^0 = x_i^0 \mathbf{e}_i^1, \quad (9)$$

其中, x_i^0 表示质点位置的初始坐标. 转动后该质点运动到当前位置:

$$\mathbf{x}^1 = x_i^1 \mathbf{e}_i^1, \quad (10)$$

其中, x_i^1 表示质点运动后的当前坐标, 它是时间的函数. 转动前后同一质点的位置满足正交变换关系:

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{R}^{10} \cdot \mathbf{x}^0, \quad (11)$$

上式是参考系下的表达式. 把参考基下的正交张量代入上式, 有

$$\mathbf{x}^1 = (R_{ij}^{10} \mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_j^1) \cdot (x_k^0 \mathbf{e}_k^1) = R_{ij}^{10} x_j^0 \mathbf{e}_i^1. \quad (12)$$

这里利用了克罗耐克尔符号 δ_{ij} 的指标置换性质, 把式(12)与(10)比较, 质点位置变化的分量形式为

$$x_i^1 = R_{ij}^{10} x_j^0. \quad (13)$$

若把连体基下的正交张量代入式(11)并利用式(8)第二式, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= (R_{ij}^{10} \mathbf{e}_i^0 \mathbf{e}_j^0) \cdot (x_k^0 \mathbf{e}_k^1) = R_{ij}^{10} R_{kj}^{10} x_k^0 \mathbf{e}_i^0 \\ &= \delta_{ik} x_k^0 \mathbf{e}_i^0 = x_i^0 \mathbf{e}_i^0, \end{aligned} \quad (14)$$

这是转动后同一质点在连体系下的位置矢量. 因此, 质点坐标 x_i^0 既是转动前在参考系下质点位置矢量的分量, 也是该质点在连体系下位置矢量的分量, 无论怎样转动后者始终不变. 在参考系下作位置矢量的内积, 得关系式:

$$\mathbf{x}^1 \cdot \mathbf{x}^1 = [\mathbf{x}^0 \cdot (\mathbf{R}^{10})^T] \cdot [\mathbf{R}^{10} \cdot \mathbf{x}^0] = \mathbf{x}^0 \cdot \mathbf{x}^0. \quad (15)$$

因此, 正交张量对矢量的作用是使矢量发生转动但不改变矢量的大小, 上式表示定点转动前后同一质点与坐标原点的距离保持不变.

3 角张量及其角矢量

刚体转动始终联系着一定的转轴和转角, 确定轴角组合是描述定点转动的基本问题, 且完全有赖于正交张量. 由于要在参考系下观察刚体的转动, 现在考察参考系下正交张量的特性. 正交张量有3个特征值, 实数特征值为1, 另外两个复数特征值为 $e^{i\alpha}$ 和 $e^{-i\alpha}$, 其中 α 代表绕轴转角的大小, 且在垂直于转轴的平面内按照右手法则决定其正负号^[11]. 实数特征值对应的特征矢

量为定点转动的轴, 在参考基下为单位矢量 $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i^1$. 在参考系下, 取与单位轴矢量 $\mathbf{n}$ 对应的二阶反对称单位轴张量为 $\mathbf{N}$, 有反偶关系式^[9]:

$$\mathbf{N} = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}, \quad (16)$$

其中, $\mathbf{e}$ 为三阶置换张量. 根据欧拉-罗德里格斯转动公式以及三角函数的级数展开式, 改写正交张量为^[12-15]

$$\mathbf{R}^{10} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}}, \quad (17)$$

其中, $\mathbf{A}$ 为定点转动的角张量:

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{N}. \quad (18)$$

则角张量为正交张量的自然对数:

$$\mathbf{A} = \ln \mathbf{R}^{10}. \quad (19)$$

与角张量对应的反偶矢量为角矢量:

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{n}. \quad (20)$$

由于角张量为二阶反对称张量, 则角张量与角矢量之间的反偶关系为

$$\mathbf{A} = -\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{2} \mathbf{e} : \mathbf{A}, \quad (21)$$

上式中冒号表示并联式双点积. 正交张量、角张量及其角矢量都有3个独立分量, 等效地决定刚体的定点转动. 观察式(21)第一式, 角张量与角矢量不满足张量的商法则, 表明角矢量确属伪矢量.

角张量作为二阶反对称张量, 可用角矢量来表达. 角矢量的大小是在垂直于转轴的平面内度量的, 而矢量的大小是沿矢量方向进行度量的, 所以转角与矢量之间存在微妙但本质的差别, 不能把转角简单视为矢量. 参考系下的角矢量为

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i \mathbf{e}_i^1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1^1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2^1 + \alpha_3 \mathbf{e}_3^1. \quad (22)$$

参考系下的角张量则为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_j^1 = & A_{12} \mathbf{e}_1^1 \mathbf{e}_2^1 + A_{13} \mathbf{e}_1^1 \mathbf{e}_3^1 \\ & + A_{23} \mathbf{e}_2^1 \mathbf{e}_3^1 - A_{12} \mathbf{e}_2^1 \mathbf{e}_1^1 - A_{13} \mathbf{e}_3^1 \mathbf{e}_1^1 - A_{23} \mathbf{e}_3^1 \mathbf{e}_2^1. \end{aligned} \quad (23)$$

为清晰起见, 利用式(21)第一式, 有参考系下角张量与角矢量关系的矩阵形式:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

利用基矢量之间的转换关系式(3)第一式, 有连体系下的角矢量和角张量:

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_j R_{ji}^{10} \mathbf{e}_i^0, \quad \mathbf{A} = A_{kl} R_{ki}^{10} R_{lj}^{10} \mathbf{e}_i^0 \mathbf{e}_j^0. \quad (25)$$

注意参考系下的角张量及其角矢量描述了实际转动, 虽然在连体系下也能得到对应的分量, 但这些映射量不代表实际转动.

4 角速度和角加速度张量及其矢量

回顾式(11), 在参考系下刚体质点由初始位置 $\mathbf{x}^0$ 运动到当前位置 $\mathbf{x}^1$, 对该式两端取时间导数, 得刚体质点的速度:

$$\dot{\mathbf{x}}^1 = \dot{\mathbf{R}}^{10} \cdot \mathbf{x}^0, \quad (26)$$

其中, $\dot{\mathbf{R}}^{10}$ 为参考系下正交张量关于时间的导数. 再次利用式(11), 改写上式为

$$\dot{\mathbf{x}}^1 = \dot{\mathbf{R}}^{10} \cdot (\mathbf{R}^{10})^T \cdot \mathbf{x}^1. \quad (27)$$

上式表示质点当前位置与当前质点速度的线性变换, 则有角速度张量^[2-4]:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}^{10} \cdot (\mathbf{R}^{10})^T. \quad (28)$$

若对恒等式(7)第一式取时间导数, 易得

$$\dot{\mathbf{R}}^{10} \cdot (\mathbf{R}^{10})^T + \left[\dot{\mathbf{R}}^{10} \cdot (\mathbf{R}^{10})^T \right]^T = 0. \quad (29)$$

所以角速度张量满足

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^T = 0, \quad (30)$$

即角速度张量为二阶反对称张量. 把参考系下的正交张量式(6)第一式代入式(28), 有参考系下的角速度张量:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_{ij} \mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_j^1 = \dot{R}_{ik}^{10} R_{jk}^{10} \mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_j^1, \quad (31)$$

其中, Ω_{ij} 为参考系下角速度张量的分量. 把式(3)第一式代入上式以及利用式(8)第二式, 易得角速度张量在连体系下的实体展开式:

$$\boldsymbol{\Omega} = R_{ki}^{10} \dot{R}_{kj}^{10} \mathbf{e}_i^0 \mathbf{e}_j^0. \quad (32)$$

比较以上两式, 角速度张量在参考系和连体系有不同的分量. 由于角速度张量为二阶反对称张量, 立即有对应的角速度矢量(伪矢量)及其表达式:

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\mathbf{e} : \boldsymbol{\Omega}, \quad \omega_i = \omega_i^1 \mathbf{e}_i^1 = -\frac{1}{2}e_{ijk}\Omega_{jk}\mathbf{e}_i^1, \quad (33)$$

其中, ω_i 是参考系下角速度矢量的分量, e_{ijk} 是置换张量的分量. 若把式(3)第一式代入上式, 得角速度矢量在连体系的表达式:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_j R_{ji}^{10} \mathbf{e}_i^0, \quad (34)$$

即角速度矢量在参考系和连体系下有不同的分量.

角加速度张量是角速度张量关于时间的变化率. 记角加速度张量为 $\boldsymbol{\Lambda}$, 有

$$\boldsymbol{\Lambda} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}. \quad (35)$$

由于张量的时间导数不改变张量的阶数和反对称性质, 所以角加速度张量也是二阶反对称张量^[3]. 把式(28)代入上式, 易得^[15]

$$\boldsymbol{\Lambda} = \ddot{\mathbf{R}}^{10} \cdot (\mathbf{R}^{10})^T + \dot{\mathbf{R}}^{10} \cdot (\dot{\mathbf{R}}^{10})^T, \quad (36)$$

上式是以正交张量表示的角加速度张量. 利用式(6)第一式, 上式成为

$$\boldsymbol{\Lambda} = A_{ij} \mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_j^1 = (\ddot{R}_{ik} R_{jk}^{10} + \dot{R}_{ik} \dot{R}_{jk}^{10}) \mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_j^1, \quad (37)$$

其中, A_{ij} 为参考系下角加速度张量的分量. 角加速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 为角加速度张量对应的伪矢量, 记作

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\mathbf{e} : \boldsymbol{\Lambda}, \quad (38)$$

同时由式(35)易得

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad (39)$$

即角加速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 为角速度矢量关于时间的导数. 利用连体基与参考基的转换关系, 容易确定连体基下角加速度张量及角加速度矢量的分量. 角速度张量及其矢量、角加速度张量及其矢量在连体系下的分量都不表示实际转动. 角矢量、角速度矢量以及角加速度矢量一般不共轴, 即不是同时沿一个矢量的方向, 这三个矢量大小和方向都是随时间变化的.

现在考察刚体的质点速度和质点加速度. 利用式(28)得正交张量的时间导数:

$$\dot{\mathbf{R}}^{10} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{R}^{10}. \quad (40)$$

再联系式(11), 则式(26)表达的质点速度成为

$$\dot{\mathbf{x}}^1 = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x}^1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^1. \quad (41)$$

上面的张量形式在参考系和连体系中都成立, 具体进

行运算时, 须用矢量或张量在指定坐标系的分量.

对式(26)再取时间导数, 并利用式(40), 易得刚体质点的加速度为

$$\ddot{\mathbf{x}}^1 = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{x}^1 + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x}^1, \quad (42)$$

注意上式角速度张量的二次幂为二阶对称张量. 应用反偶关系, 可把上式改写为

$$\ddot{\mathbf{x}}^1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^1), \quad (43)$$

上式右端第一项为角加速度引起的周向加速度, 第二项为角速度引起的向心加速度, 所以质点的加速度由周向加速度和向心加速度组成.

5 刚体定点转动的合成

刚体作连续定点转动时, 应特别注意转动的合成顺序. 由于引进多个坐标系, 为了在一个坐标系中统一描述连续转动的合成过程, 必须明确多次转动合成的绝对参考系.

5.1 连续两次转动的合成

引入一组连体基 $\mathbf{e}_i^0$ 以及两组参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 和 $\mathbf{e}_i^2$, 初始时刻, 连体基与两组参考基重合. 第一次转动使连体基 $\mathbf{e}_i^0$ 与第一组参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 分离, 第二次转动使第一组参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 与第二组参考基 $\mathbf{e}_i^2$ 分离, 参照图2所示. 由于连体基 $\mathbf{e}_i^0$ 和第一组参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 相对第二组参考基 $\mathbf{e}_i^2$ 都有运动, 所以第二组参考基就是观测两次转动的绝对参考基, 而第一组参考基属于中间坐标系. 两次转动的复杂性在于第一次转动相对绝对参考系而言存在再次转动, 为把两次转动的运动关系统一在绝对参考系下进行合成, 要利用第二次转动形成的正交张量, 把第一次转动的变换关系映射到绝对坐标系上.

参考正交张量的并矢结构式(5), 第二次转动的正交张量 $\mathbf{R}^{21}$ 是参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 与 $\mathbf{e}_i^2$ 的有序并乘:

$$\mathbf{R}^{21} = \mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_i^2 = R_{ij}^{21} \mathbf{e}_i^2 \mathbf{e}_j^2. \quad (44)$$

正交张量 $\mathbf{R}^{21}$ 的分量是两组基矢量 $\mathbf{e}_i^2$ 与 $\mathbf{e}_j^1$ 之间的夹角余弦:

$$R_{ij}^{21} = \mathbf{e}_i^2 \cdot \mathbf{e}_j^1, \quad (45)$$

图 2 两次连续转动后连体基、中间参考基以及绝对参考基示意图

Figure 2 The conjoined base, intermediate reference base, and absolute reference base after two rotations.

且两组基矢量 $\mathbf{e}_i^2$ 与 $\mathbf{e}_i^1$ 满足坐标转换关系:

$$\mathbf{e}_i^2 = R_{ij}^{21} \mathbf{e}_j^1, \quad \mathbf{e}_i^1 = R_{ji}^{21} \mathbf{e}_j^2. \quad (46)$$

刚体相对于第一组参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 转动的正交张量, 是连体基 $\mathbf{e}_i^0$ 与参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 的有序并乘 $\mathbf{e}_i^0 \mathbf{e}_i^1$, 要利用第二次转动的正交张量把 $\mathbf{e}_i^0 \mathbf{e}_i^1$ 映射到当前的参考基 $\mathbf{e}_i^2$ 上. 两次连续转动时, 第一次转动的正交张量 $\mathbf{R}^{10}$ 成为^[15]

$$\mathbf{R}^{10} = (\mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_i^2)^T \cdot (\mathbf{e}_j^0 \mathbf{e}_j^1) \cdot (\mathbf{e}_k^1 \mathbf{e}_k^2) = R_{ij}^{10} \mathbf{e}_i^2 \mathbf{e}_j^2, \quad (47)$$

其中, 张量分量 R_{ij}^{10} 是两组基矢量 $\mathbf{e}_i^1$ 与 $\mathbf{e}_i^0$ 之间的夹角余弦.

在绝对坐标系下, 刚体质点的初始坐标为 x_i^0 , 第一次转动后的坐标为 x_i^1 , 第二次转动后的坐标为 x_i^2 . 在绝对参考基 $\mathbf{e}_i^0$ 下, 转动前刚体质点的位置矢量为

$$\mathbf{x}^0 = x_i^0 \mathbf{e}_i^0. \quad (48)$$

利用式(47), 第一次转动后质点运动到

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{R}^{10} \cdot \mathbf{x}^0 = R_{ij}^{10} x_j^0 \mathbf{e}_i^2 = x_i^1 \mathbf{e}_i^2. \quad (49)$$

再利用式(44), 第二次转动后质点运动到当前位置:

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{R}^{21} \cdot \mathbf{x}^1 = R_{ij}^{21} x_j^1 \mathbf{e}_i^2 = x_i^2 \mathbf{e}_i^2. \quad (50)$$

两次转动的坐标变换关系依次为

$$x_i^1 = R_{ij}^{10} x_j^0, \quad x_i^2 = R_{ij}^{21} x_j^1, \quad (51)$$

则两次转动合成表示为

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{R}^{21} \cdot \mathbf{R}^{10} \cdot \mathbf{x}^0 = \mathbf{R}^{20} \cdot \mathbf{x}^0. \quad (52)$$

而两次转动合成的正交张量为

$$\mathbf{R}^{20} = \mathbf{R}^{21} \cdot \mathbf{R}^{10} = R_{ik}^{21} R_{kj}^{10} \mathbf{e}_i^2 \mathbf{e}_j^2 = R_{ij}^{20} \mathbf{e}_i^2 \mathbf{e}_j^2, \quad (53)$$

其中正交张量的分量为

$$R_{ij}^{20} = R_{ik}^{21} R_{kj}^{10}. \quad (54)$$

利用式(46)第二式和式(3)第二式, 合成正交张量又写成

$$\mathbf{R}^{20} = R_{ik}^{21} R_{kj}^{10} \mathbf{e}_i^2 \mathbf{e}_j^2 = R_{kj}^{10} \mathbf{e}_k^1 \mathbf{e}_j^2 = \mathbf{e}_j^0 \mathbf{e}_j^2, \quad (55)$$

所以合成正交张量是连体基 $\mathbf{e}_i^0$ 与绝对参考基 $\mathbf{e}_i^2$ 的有序并乘. 质点坐标的转换关系合成

$$x_i^2 = R_{ij}^{21} x_j^1 = R_{ij}^{21} R_{jk}^{10} x_k^0 = R_{ik}^{20} x_k^0, \quad (56)$$

两次转动后, 质点当前位置又表示为

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{R}^{20} \cdot \mathbf{x}^0 = (\mathbf{e}_i^0 \mathbf{e}_i^2) \cdot (x_k^0 \mathbf{e}_k^0) = x_i^0 \mathbf{e}_i^0, \quad (57)$$

上式表明在连体坐标系下质点没有任何运动.

转动合成是顺序正交张量的点积, 一般不能利用角张量或角矢量的加法进行合成. 参考角张量与正交张量的关系式(19), 取两次转动的角张量以及合成的角张量分别为

$$\mathbf{A}^{10} = \ln \mathbf{R}^{10}, \quad \mathbf{A}^{21} = \ln \mathbf{R}^{21}, \quad \mathbf{A}^{20} = \ln \mathbf{R}^{20}. \quad (58)$$

由于两个正交张量的点积一般不满足交换律:

$$\mathbf{R}^{10} \cdot \mathbf{R}^{21} \neq \mathbf{R}^{21} \cdot \mathbf{R}^{10}, \quad (59)$$

则有不等式:

$$\ln \mathbf{R}^{20} \neq \ln \mathbf{R}^{21} + \ln \mathbf{R}^{10}, \quad (60)$$

即张量点积的对数不等于因子张量的对数之和^[16], 或者有

$$\mathbf{A}^{20} \neq \mathbf{A}^{21} + \mathbf{A}^{10}. \quad (61)$$

与上式对应, 立即有

$$\boldsymbol{\alpha}^{20} \neq \boldsymbol{\alpha}^{21} + \boldsymbol{\alpha}^{10}, \quad (62)$$

其中, $\boldsymbol{\alpha}^{20}$ 表示合成的角矢量, $\boldsymbol{\alpha}^{10}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^{21}$ 分别表示第一次和第二次转动的角矢量.

5.2 连续三次转动的合成

连续三次定点转动的合成与两次转动情况类似, 为后面讨论之方便, 现给出连续三次定点转动的合成.

引进与刚体共同运动的连体基 $\mathbf{e}_i^0$ 以及3组参考基 $\mathbf{e}_i^1$, $\mathbf{e}_i^2$,

$\mathbf{e}_i^3$, 转动前这些标准正交基完全重合. 第一次转动是刚体相对第一组参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 的转动, 第二次转动是第一组参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 相对第二组参考基 $\mathbf{e}_i^2$ 的转动, 第三次转动是第二组参考基 $\mathbf{e}_i^2$ 相对第三组参考基 $\mathbf{e}_i^3$ 的转动. 第三组参考基 $\mathbf{e}_i^3$ 为观察3次转动的绝对参考基, 另外两组中间参考基都有相对绝对参考基的运动. 转动的次序从连体基开始, 依次排序到绝对参考基.

第三次转动的正交张量 $\mathbf{R}^{32}$ 表示为

$$\mathbf{R}^{32} = \mathbf{e}_i^2 \mathbf{e}_i^3 = R_{ij}^{32} \mathbf{e}_i^3 \mathbf{e}_j^2, \quad (63)$$

式中正交张量的分量为

$$R_{ij}^{32} = \mathbf{e}_i^3 \cdot \mathbf{e}_j^2. \quad (64)$$

利用 $\mathbf{R}^{32}$ 把有序并乘 $\mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_j^2$ 映射到绝对参考基 $\mathbf{e}_i^3$ 上, 得第二次转动的正交张量:

$$\mathbf{R}^{21} = (\mathbf{e}_i^2 \mathbf{e}_i^3)^T \cdot (\mathbf{e}_j^1 \mathbf{e}_j^2) \cdot (\mathbf{e}_i^2 \mathbf{e}_i^3) = R_{ij}^{21} \mathbf{e}_i^3 \mathbf{e}_j^1, \quad (65)$$

式中正交张量的分量为

$$R_{ij}^{21} = \mathbf{e}_i^2 \cdot \mathbf{e}_j^1. \quad (66)$$

对于第一次转动, 连体基 $\mathbf{e}_i^0$ 与参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 的并乘 $\mathbf{e}_i^0 \mathbf{e}_i^1$ 须经过两次连续映射. 先通过并乘 $\mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_i^2$ 映射到参考基 $\mathbf{e}_i^2$ 上, 再由并乘 $\mathbf{e}_i^2 \mathbf{e}_i^3$ 映射到当前参考基 $\mathbf{e}_i^3$ 上, 这时, 第一次转动的正交张量成为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{10} &= (\mathbf{e}_i^2 \mathbf{e}_i^3)^T \cdot (\mathbf{e}_j^1 \mathbf{e}_j^2)^T \cdot (\mathbf{e}_k^0 \mathbf{e}_k^1) \cdot (\mathbf{e}_i^1 \mathbf{e}_i^2) \cdot (\mathbf{e}_m^2 \mathbf{e}_m^3) \\ &= R_{ij}^{10} \mathbf{e}_i^3 \mathbf{e}_j^0, \end{aligned} \quad (67)$$

其中正交张量 $\mathbf{R}^{10}$ 的分量为

$$R_{ij}^{10} = \mathbf{e}_i^1 \cdot \mathbf{e}_j^0. \quad (68)$$

在绝对参考基 $\mathbf{e}_i^3$ 下, 刚体质点的初始坐标为 x_i^0 , 第一次转动后坐标为 x_i^1 , 第二次转动后坐标为 x_i^2 , 第三次转动后的当前坐标为 x_i^3 . 刚体质点位置矢量的变化序列为:

$$\mathbf{x}^0 = x_i^0 \mathbf{e}_i^3, \quad \mathbf{x}^1 = x_i^1 \mathbf{e}_i^3, \quad \mathbf{x}^2 = x_i^2 \mathbf{e}_i^3, \quad \mathbf{x}^3 = x_i^3 \mathbf{e}_i^3. \quad (69)$$

三次连续转动的位置变换关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^3 &= \mathbf{R}^{32} \cdot \mathbf{x}^2 = \mathbf{R}^{32} \cdot \mathbf{R}^{21} \cdot \mathbf{x}^1 \\ &= \mathbf{R}^{32} \cdot \mathbf{R}^{21} \cdot \mathbf{R}^{10} \cdot \mathbf{x}^0 = \mathbf{R}^{30} \cdot \mathbf{x}^0. \end{aligned} \quad (70)$$

三次连续转动的质点坐标变换关系为

$$x_i^3 = R_{ij}^{32} x_j^2 = R_{ij}^{32} R_{jk}^{21} x_k^1 = R_{ij}^{32} R_{jk}^{21} R_{kl}^{10} x_l^0 = R_{ij}^{30} x_j^0. \quad (71)$$

三次转动合成的正交张量为^[15]

$$\mathbf{R}^{30} = \mathbf{R}^{32} \cdot \mathbf{R}^{21} \cdot \mathbf{R}^{10} = R_{ik}^{32} R_{kl}^{21} R_{lj}^{10} \mathbf{e}_i^3 \mathbf{e}_j^0 = R_{ij}^{30} \mathbf{e}_i^3 \mathbf{e}_j^0, \quad (72)$$

其中合成正交张量的分量为

$$R_{ij}^{30} = R_{ik}^{32} R_{kl}^{21} R_{lj}^{10}. \quad (73)$$

由于刚体连续转动以正交张量的有序内积来表达, 所以连续定点转动为强非线性运动过程. 依此类推, 易得多次转动后刚体质点在绝对参考系的位置、合成的正交张量以及合成的角张量.

由刚体定点转动的合成容易联想到连续介质力学的运动学描述. 连续介质力学的运动学要复杂很多, 譬如可参考近期出版的《理性力学教程》^[17]. 连续介质的有限变形使得任意质点由参考位置运动到当前位置, 所以有变形前的参考构型和变形后的当前构型. 由于变形的非均匀性, 定义变形梯度为质点当前位置关于参考位置的偏导数, 作为连续介质变形程度的局部度量, 变形梯度既是时间也是参考位置的张量函数. 比较而言, 刚体定点运动为整体运动, 正如式(11)所示, 可直接表示出刚体转动前后的位置映射关系, 其中正交张量只是时间的函数, 因此, 连续介质力学的变形描述要比刚体转动更为复杂.

上面讨论了刚体定点转动的合成问题, 而连续介质变形关注的是变形的分解问题. 变形梯度可乘积分解为伸长张量与正交张量的内积, 其中伸长张量代表线元拉伸前后的映射而正交张量代表线元转动的映射. 在变形梯度的乘积分解中, 若令伸长张量为单位张量, 则变形梯度等于正交张量, 表示介质只有纯转动; 若令正交张量为单位张量, 则变形梯度等于伸长张量, 表示介质只有纯拉伸, 所以刚体定点转动是连续介质复杂变形过程的极端简化情形. 进一步地, 如果考虑连续介质多个变形梯度乘积的情况, 且假设伸长张量为单位张量, 由于变形梯度成为正交张量, 这样, 多个变形梯度的乘积与刚体定点转动合成时正交张量的有序内积具有形式上的一致性. 但应指出, 连续介质力学中一般没有关注局部刚性转动的转轴和转角问题, 所以研究刚体定点转动可深化连续介质变形中关于局部刚性转动的认识, 还将为发展变形体的变形与整体刚性转动的刚柔耦合动力学建模提供基础理论指导^[18].

6 角速度和角加速度张量及其矢量的合成

6.1 角速度张量及角速度矢量的合成

考察两次转动角速度的合成. 利用两次转动的合成式(53)并参照式(28), 立即得两次转动合成的角速度张量 Ω^{20} 为

$$\Omega^{20} = \dot{\mathbf{R}}^{20} \cdot (\mathbf{R}^{20})^T = \Omega^{21} + \mathbf{R}^{21} \cdot \Omega^{10} \cdot (\mathbf{R}^{21})^T, \quad (74)$$

其中, Ω^{21} 和 Ω^{10} 分别是绝对坐标系下第二次和第一次转动的角速度张量:

$$\Omega^{21} = \dot{\mathbf{R}}^{21} \cdot (\mathbf{R}^{21})^T, \quad \Omega^{10} = \dot{\mathbf{R}}^{10} \cdot (\mathbf{R}^{10})^T. \quad (75)$$

在绝对坐标系下, 两次合成的角速度张量展开为

$$\Omega^{20} = \Omega_{ij}^{20} \mathbf{e}_i^2 \mathbf{e}_j^2 = (\Omega_{ij}^{21} + R_{ik}^{21} \Omega_{kl}^{10} R_{jl}^{21}) \mathbf{e}_i^2 \mathbf{e}_j^2, \quad (76)$$

其中, Ω_{ij}^{20} 为合成角速度张量的分量. 利用反偶关系^[15]:

$$\mathbf{R}^{21} \cdot \Omega^{10} \cdot (\mathbf{R}^{21})^T = -\mathbf{e} \cdot (\mathbf{R}^{21} \cdot \boldsymbol{\omega}^{10}), \quad (77)$$

以及关于 Ω^{20} 和 Ω^{21} 的反偶关系:

$$\Omega^{20} = -\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}^{20}, \quad \Omega^{21} = -\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}^{21}, \quad (78)$$

以上各式中 $\boldsymbol{\omega}^{21}$ 和 $\boldsymbol{\omega}^{10}$ 分别是绝对坐标系下第二次和第一次转动的角速度矢量, 记 $\boldsymbol{\omega}^{20}$ 是两次转动合成的角速度矢量. 把以上两式代入式(74), 得两次转动合成的角速度矢量^[3,10,15]:

$$\boldsymbol{\omega}^{20} = \boldsymbol{\omega}^{21} + \mathbf{R}^{21} \cdot \boldsymbol{\omega}^{10}. \quad (79)$$

或者在绝对坐标系下表示为

$$\boldsymbol{\omega}^{20} = \omega_i^{20} \mathbf{e}_i^2 = (\omega_i^{21} + R_{ij}^{21} \omega_j^{10}) \mathbf{e}_i^2. \quad (80)$$

观察式(79)右端第二项, 正交张量 $\mathbf{R}^{21}$ 对第一次转动角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}^{10}$ 的映射, 不改变其大小但改变了角速度矢量的方向, 从而改变了在绝对坐标系下的分量.

回顾绝对坐标系下连续3次定点转动的合成, 利用角速度张量与正交张量的关系式, 立即有每次转动的角速度张量:

$$\begin{aligned} \Omega^{10} &= \dot{\mathbf{R}}^{10} \cdot (\mathbf{R}^{10})^T, \\ \Omega^{21} &= \dot{\mathbf{R}}^{21} \cdot (\mathbf{R}^{21})^T, \\ \Omega^{32} &= \dot{\mathbf{R}}^{32} \cdot (\mathbf{R}^{32})^T. \end{aligned} \quad (81)$$

利用合成法则式(72), 得3次转动合成的角速度张量为^[15]

$$\begin{aligned} \Omega^{30} &= \Omega^{32} + \mathbf{R}^{32} \cdot \Omega^{21} \cdot (\mathbf{R}^{32})^T \\ &\quad + \mathbf{R}^{32} \cdot \mathbf{R}^{21} \cdot \Omega^{10} \cdot (\mathbf{R}^{21})^T \cdot (\mathbf{R}^{32})^T. \end{aligned} \quad (82)$$

参考式(79)的情况, 得3次转动合成的角速度矢量为

$$\boldsymbol{\omega}^{30} = \boldsymbol{\omega}^{32} + \mathbf{R}^{32} \cdot \boldsymbol{\omega}^{21} + \mathbf{R}^{32} \cdot \mathbf{R}^{21} \cdot \boldsymbol{\omega}^{10}. \quad (83)$$

连续3次定点转动时, 角速度张量和角速度矢量的合成都在绝对坐标系下进行运算. 上式右端第二项表示要对第二次转动的角速度矢量作一次正交变换, 第三项表示对第一次转动的角速度矢量须作两次正交变换. 依照相同的规律, 容易得到多次定点转动的角速度张量和角速度矢量的合成法则.

6.2 角加速度张量及角加速度矢量的合成

首先考虑两次转动的合成. 角加速度张量是角速度张量关于时间的导数, 对式(74)取时间导数易得^[15]

$$\begin{aligned} \Lambda^{20} &= \Lambda^{21} + \mathbf{R}^{21} \cdot \Lambda^{10} \cdot (\mathbf{R}^{21})^T \\ &\quad + \Omega^{21} \cdot [\mathbf{R}^{21} \cdot \Omega^{10} \cdot (\mathbf{R}^{21})^T] \\ &\quad - [\mathbf{R}^{21} \cdot \Omega^{10} \cdot (\mathbf{R}^{21})^T] \cdot \Omega^{21}, \end{aligned} \quad (84)$$

所以角加速度张量的合成还包含两次转动角速度张量的乘积耦合项. 由上式推导角加速度矢量的合成比较繁琐, 为此, 可利用两次转动角速度矢量的合成. 对式(79)取时间导数, 立即得两次转动合成的角加速度矢量:

$$\boldsymbol{\omega}^{20} = \boldsymbol{\omega}^{21} + \mathbf{R}^{21} \cdot \boldsymbol{\omega}^{10} + \Omega^{21} \cdot \mathbf{R}^{21} \cdot \boldsymbol{\omega}^{10}, \quad (85)$$

所以两次转动合成的角加速度矢量不仅包含两次转动的角加速度矢量, 还包含两次转动的角速度乘积的耦合项, 且这些合成都是在绝对坐标系下进行的运算.

对式(82)取时间导数, 不难得到3次转动角加速度张量的合成, 由于其形式比较冗长, 在此略过, 直接给出角加速度矢量的合成. 根据式(83)以及利用反偶关系, 易得3次转动的合成角加速度矢量为^[15]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^{30} &= \boldsymbol{\omega}^{32} + \mathbf{R}^{32} \cdot \boldsymbol{\omega}^{21} + \mathbf{R}^{32} \cdot \mathbf{R}^{21} \cdot \boldsymbol{\omega}^{10} + \Omega^{32} \cdot \mathbf{R}^{32} \cdot \boldsymbol{\omega}^{21} \\ &\quad + \Omega^{32} \cdot \mathbf{R}^{32} \cdot \mathbf{R}^{21} \cdot \boldsymbol{\omega}^{10} + \Omega^{21} \cdot \mathbf{R}^{21} \cdot \boldsymbol{\omega}^{10}, \end{aligned} \quad (86)$$

这是在绝对坐标系下的表达式, 上式右端第一行包含3次转动的角加速度矢量, 第二行包含3次转动角速度之间的乘积耦合. 类似地, 容易写出多次定点转动角加速

度矢量的合成法则.

回顾式(11), (41)和(42)以及上面关于角速度和角加速度的合成, 无论是一次转动还是多次转动, 都可以利用正交张量、角速度张量及其矢量、角加速度张量及其矢量来确定刚体当前时刻任意质点的位置、速度和角速度, 但须注意刚体定点运动的运动学描述与连续介质力学中关于材料响应客观性的区别与联系.

连续介质力学的客观性也称材料标架无差异性原理, 它要求材料的力学行为不随观察者的变化而变化. 具体而言, 可利用与时间相关的正交张量, 考察各种运动量、应力以及基本方程等是否满足旋转变换关系以判断其客观性; 或者利用旋率张量(即角速度张量)判断有关变量或方程的客观率, 所以连续介质力学是借助正交张量以及旋率张量来检验其客观性和客观率^[17]. 刚体定点转动则关注连续转动时角速度和角加速度及其合成法则, 有别于连续介质力学的客观性和客观率. 连续介质力学考虑了局部转动的正交张量、角速度张量或旋率张量, 但没有考虑瞬态转轴和转角, 也没有考虑连续变形过程中角加速度张量及其矢量的演化问题. 刚体作为变形体的一种理想模型, 理清其定点转动的角速度和角加速度及其合成, 可为描述连续介质的复杂变形过程提供更为基础性的数学表达.

7 欧拉角表达的角速度矢量和角加速度矢量

作为前面的一个应用实例, 现在考虑以欧拉角表达的刚体定点转动. 欧拉采用3次有序的定轴转动来定义3个欧拉角, 用以描述刚体定点转动的姿态^[1,2]. 参见图3, 刚体首先作进动得进动角 φ , 其次沿节线做章

动得章动角 θ , 最后做自旋得自旋角 ψ . 采用欧拉角描述定点转动时, 一直以来都是只给出角速度矢量, 缺失角张量及其矢量、角加速度张量及其矢量的表达.

按照上述刚体定点转动的合成法则进行转动的合成. 由于连体基 $\mathbf{e}_i^0$ 固连在刚体上, 所以要把欧拉转动顺序进行反序排列作为转动合成的顺序, 也就是把自旋作为第一次转动, 章动为第二次转动, 进动为第三次转动. 取固定不动的参考系为观察3次转动的绝对参考系, 则第三次转动的参考基 $\mathbf{e}_i^3$ 是绝对参考基, 而自旋和章动分别对应第一次和第二次转动的参考基 $\mathbf{e}_i^1$ 和 $\mathbf{e}_i^2$.

回顾式(63), (65)和(67), 自旋、章动、进动形成的正交张量依次为

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{10} &= R_{ij}^{10} \mathbf{e}_i^3 \mathbf{e}_j^3, \\ \mathbf{R}^{21} &= R_{ij}^{21} \mathbf{e}_i^3 \mathbf{e}_j^3, \\ \mathbf{R}^{32} &= R_{ij}^{32} \mathbf{e}_i^3 \mathbf{e}_j^3,\end{aligned}\quad (87)$$

并且上述正交张量的矩阵形式分别为

$$[\mathbf{R}^{10}] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (88)$$

$$[\mathbf{R}^{21}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (89)$$

$$[\mathbf{R}^{32}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (90)$$

按照式(72)的合成法则, 合成的正交张量所对应的矩阵为

图3 三次定轴转动形成的欧拉角以及基矢量之间的关系

Figure 3 Euler angles formed by three fixed-axis rotations and the relative rotation among the bases.

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{R}^{30}] &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (91)
 \end{aligned}$$

由式(19)可知, 有3次转动合成的角张量及其角矢量为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^{30} &= \ln \mathbf{R}^{30} = \ln R_{ij}^{30} \mathbf{e}_i^3 \mathbf{e}_j^3, \\
 \boldsymbol{\alpha}^{30} &= -\frac{1}{2} \mathbf{e} : \ln \mathbf{R}^{30} = \alpha_i^{30} \mathbf{e}_i^3. \quad (92)
 \end{aligned}$$

根据关于欧拉角的正交张量, 对正交张量取自然对数得绝对参考系下合成的角张量以及合成的角矢量, 通过角张量或角矢量确定转轴和转角.

由式(88)–(90), 有自旋、章动、进动的角速度张量的矩阵:

$$[\boldsymbol{\Omega}^{10}] = [\dot{\mathbf{R}}^{10}] [(\mathbf{R}^{10})^T] = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\sin\psi & -\dot{\psi}\cos\psi & 0 \\ \dot{\psi}\cos\psi & -\dot{\psi}\sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (93)$$

$$[\boldsymbol{\Omega}^{21}] = [\dot{\mathbf{R}}^{21}] [(\mathbf{R}^{21})^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\theta}\sin\theta & -\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 & \dot{\theta}\cos\theta & -\dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}, \quad (94)$$

$$[\boldsymbol{\Omega}^{32}] = [\dot{\mathbf{R}}^{32}] [(\mathbf{R}^{32})^T] = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}\sin\varphi & -\dot{\phi}\cos\varphi & 0 \\ \dot{\phi}\cos\varphi & -\dot{\phi}\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (95)$$

利用式(33), 得自旋、章动、进动的角速度矢量的列阵:

$$\begin{aligned}
 \{\boldsymbol{\omega}^{10}\} &= \begin{bmatrix} \omega_1^{10} \\ \omega_2^{10} \\ \omega_3^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \\
 \{\boldsymbol{\omega}^{21}\} &= \begin{bmatrix} \omega_1^{21} \\ \omega_2^{21} \\ \omega_3^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \{\boldsymbol{\omega}^{32}\} &= \begin{bmatrix} \omega_1^{32} \\ \omega_2^{32} \\ \omega_3^{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (96)
 \end{aligned}$$

把以上三式以及式(88)–(90)代入式(83), 有3次转动合成的角速度矢量的列阵:

$$\begin{aligned}
 \{\boldsymbol{\omega}^{30}\} &= \{\boldsymbol{\omega}^{32}\} + [\mathbf{R}^{32}]\{\boldsymbol{\omega}^{21}\} + [\mathbf{R}^{32}][\mathbf{R}^{21}]\{\boldsymbol{\omega}^{10}\} \\
 &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix}, \quad (97)
 \end{aligned}$$

上式是绝对参考系下角速度矢量的分量. 为确定角速度矢量在连体基下的分量, 参考式(34), 角速度矢量改写为

$$\boldsymbol{\omega}^{30} = \omega_i^{30} \mathbf{e}_i^3 = R_{ji}^{30} \omega_j^{30} \mathbf{e}_i^0. \quad (98)$$

利用上式及式(91), 得连体基下角速度矢量的列阵:

$$\{\boldsymbol{\omega}^{30}\} = [\mathbf{R}_{ij}^{30}]^T \{\omega_j^{30}\} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{bmatrix}. \quad (99)$$

传统的欧拉方法是把3次定轴转动的角速度矢量分别投影到参考基上, 再将这些投影求和, 得到矢量的各个分量; 若对每次定轴转动的角速度矢量向连体基

投影, 同样可得矢量在连体基上的分量. 上述结果与欧拉投影方法得到的角速度矢量完全相同^[1,2].

现在进行3次转动角加速度矢量的合成. 由式(93)–(95)得3次定轴转动的角加速度张量的矩阵:

$$\begin{aligned} [\Lambda^{10}] &= \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\psi} & 0 \\ \ddot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\Lambda^{21}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\ddot{\theta} \\ 0 & \ddot{\theta} & 0 \end{bmatrix}, \\ [\Lambda^{32}] &= \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\phi} & 0 \\ \ddot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (100)$$

$$\{\omega^{30}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}\cos\varphi + \ddot{\psi}\sin\varphi\sin\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\phi}\dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\varphi\cos\theta \\ \ddot{\theta}\sin\varphi - \ddot{\psi}\cos\varphi\sin\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\phi}\dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\varphi\cos\theta \\ \ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta \end{Bmatrix}. \quad (103)$$

利用绝对参考基与连体基的转换关系, 得角加速度矢量在连体基下的表达式:

$$\omega^{30} = \omega_i^{30} \mathbf{e}_i^3 = R_{ji}^{30} \omega_j^{30} \mathbf{e}_i^0. \quad (104)$$

$$\{\omega^{30}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}\cos\psi + \ddot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + \dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\psi \\ -\ddot{\theta}\sin\psi + \ddot{\phi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - \dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi - \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ \ddot{\phi}\cos\theta + \ddot{\psi} - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta \end{Bmatrix}. \quad (105)$$

连体基下的转角、角速度以及角加速度只是绝对参考基下相应运动量的映射, 它们不表示任何转动.

角速度矢量和角加速度矢量在绝对参考系和连体基下的表达式都比较复杂, 但在莱沙尔(Resal)坐标系下会得到极大简化. 莱沙尔坐标系是没有发生自旋的

同时, 由式(96), 有角加速度矢量的列阵:

$$\{\omega^{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix}, \quad \{\omega^{21}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\omega^{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix}. \quad (101)$$

利用反偶关系把3次转动合成的角加速度矢量式(86)改写成矩阵形式:

$$\begin{aligned} \{\omega^{30}\} &= \{\omega^{32}\} + [\mathbf{R}^{32}]\{\omega^{21}\} + [\mathbf{R}^{32}][\mathbf{R}^{21}]\{\omega^{10}\} \\ &\quad + [\mathbf{\Omega}^{32}][\mathbf{R}^{32}]\{\omega^{21}\} + [\mathbf{\Omega}^{32}][\mathbf{R}^{32}][\mathbf{R}^{21}]\{\omega^{10}\} \\ &\quad + [\mathbf{R}^{32}][\mathbf{\Omega}^{21}][\mathbf{R}^{21}]\{\omega^{10}\}. \end{aligned} \quad (102)$$

把前面得到的正交张量、角速度张量及矢量、角加速度矢量代入上式, 易得绝对参考基下角加速度矢量的列阵^[15]:

根据式(91)和(103), 略去简单的代数运算, 得连体基下角加速度矢量的列阵:

参考系, 在图3中, 其基矢量为 $\mathbf{e}_i^1$, 以上标1来标识. 利用正交张量把连体系下的角速度矢量和角加速度矢量映射到莱沙尔坐标系, 利用式(88)和(99), 直接得到莱沙尔坐标系的角速度列阵:

$$\{\omega^{30}\} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi}\sin\theta \\ \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{Bmatrix}. \quad (106)$$

利用式(88)和(105), 得莱沙尔坐标系的角加速度列阵:

$$\{\varpi^{30}\} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}\cos\psi + \ddot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + \dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\psi \\ -\ddot{\theta}\sin\psi + \ddot{\phi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - \dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi - \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ \ddot{\phi}\cos\theta + \ddot{\psi} - \dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta \\ \ddot{\phi}\sin\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\psi} \\ \ddot{\phi}\cos\theta + \ddot{\psi} - \dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix}. \quad (107)$$

显然, 角速度和角加速度在莱沙尔坐标系有简单的表达式, 这为动力学分析带来极大的方便.

8 结论

描述刚体定点转动须以张量作为数学工具. 定点转动的转角、角速度、角加速度均属二阶反对称张量, 已经超越了矢量的范畴. 矩阵的各个元素只能表示运动量在特定坐标系下的数量, 由于定点运动涉及两个或两个以上坐标系的表达问题, 而矩阵元素不能与坐标系的基矢量组合在一起共同表达运动量, 所以矩阵方法也不能胜任定点运动的数学描述.

正交张量为相对转动的两组基矢量的有序并乘, 是关于这两个坐标系的不变张量. 转角、角速度、角加速度本质上均为二阶反对称张量, 而角矢量、角速度矢量、角加速度矢量只是相应的反偶矢量或伪矢量. 所有的运动量都在绝对参考系下定义其运动学意义, 但根据需要可向作刚体运动的参考系和连体系投

影得到其映射量.

转动的合成是绝对参考系下正交张量的有序内积, 其排列顺序是从连体系到中间参考系再到绝对参考系. 如果多次转动是相对绝对参考系进行的转动, 其合成顺序与实际转动顺序一致; 如果多次转动是相对连体坐标系进行的转动, 譬如关于欧拉角转动的情况, 则合成顺序是实际转动顺序的反序排列.

角速度张量及其矢量都在绝对参考系下进行合成, 是相应正交张量变换下各次转动角速度的线性组合. 角加速度张量及其矢量的合成不仅涉及相应正交张量变换下转动角加速度的线性组合, 还包括相应正交张量变换下角速度之间的乘积耦合项.

以欧拉角描述刚体姿态时, 通过合成正交张量可确定角张量及角矢量, 本文验证了经典的角速度矢量的欧拉运动学方程, 进一步给出了角加速度矢量在绝对参考系和连体系的显式表达. 此外, 发现角速度和角加速度矢量在莱沙尔坐标系具有十分简明的表达形式.

致谢 本文研究受益于与北京大学工学院王勇教授和唐少强教授的深刻交流, 在此衷心致谢!

参考文献

- Goldstein H, Poole C, Safko J. Classical Mechanics. 3rd ed. San Francisco: Addison-Wesley, 2002. 150–155, 163–164
- Zhu Z X. Theoretical Mechanics (Vol. 1) (in Chinese). Beijing: Peking University Press, 1982. 188–208 [朱照宣. 理论力学(上册). 北京: 北京大学出版社, 1982. 188–208]
- Zhong F E. Angular velocity tensor and its applications (in Chinese). Mech Eng, 1994, 3: 55–58 [钟奉俄. 角速度张量及其应用. 力学与实践, 1994, 3: 55–58]
- Casey J, Lam V C. A tensor method for the kinematical analysis of systems of rigid bodies. Mech Mach Theory, 1986, 21: 87–97
- Zhou Y H. Theoretical Mechanics (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2015. 188–196 [周又和. 理论力学. 北京: 高等教育出版社, 2015. 188–196]
- Liu Y Z. On mathematical representation of attitude of rigid body (in Chinese). Mech Eng, 2008, 30: 98–101 [刘延柱. 关于刚体姿态的数学表达. 力学与实践, 2008, 30: 98–101]

- 7 Cheng H, Gupta K C. An historical note on finite rotations. *J Appl Mech*, 1989, 56: 139–145
- 8 Du Q H. Handbook of Engineering Mechanics (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 1994. 918–919 [杜庆华. 工程力学手册. 北京: 高等教育出版社, 1994. 918–919]
- 9 Huang K Z, Xue M D, Lu M W. Tensor Analysis (in Chinese). 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. 72–75, 129–130 [黄克智, 薛明德, 陆明万. 张量分析. 第二版. 北京: 清华大学出版社, 2003. 72–75, 129–130]
- 10 Shuster M D. A survey of attitude representations. *J Astronaut Sci*, 1993, 41: 439–517
- 11 Mao W W. Euler's theorem for rigid body rotation (in Chinese). *Univ Phys*, 1988, 1: 15–17 [毛文炜. 刚体定点转动的欧拉定理. 大学物理, 1988, 1: 15–17]
- 12 Fillmore J P. A note on rotation matrices. *IEEE Comput Grap Appl*, 1984, 4: 30–33
- 13 Palais B, Palais R. Euler's fixed point theorem: The axis of a rotation. *J Fixed Point Theor Appl*, 2007, 2: 215–220
- 14 Gallier J, Xu D. Computing exponentials of skew-symmetric matrices and logarithms of orthogonal matrices. *Int J Rob Autom*, 2002, 17: 10–20
- 15 Liu Z F. Tensor Foundation and Application in Mechanics (in Chinese). Chongqing: Chongqing University Press, 2020. 120–148 [刘占芳. 张量基础与力学应用. 重庆: 重庆大学出版社, 2020. 120–148]
- 16 Jog C S. The explicit determination of the logarithm of a tensor and its derivatives. *J Elasticity*, 2008, 93: 141–148
- 17 Zhao Y P. A Course in Rational Mechanics (in Chinese). Beijing: Science Press, 2020. 157–165, 203–204, 258–265 [赵亚溥. 理性力学教程. 北京: 科学出版社, 2020. 157–165, 203–204, 258–265]
- 18 Li K, Zhang Y, Zhan H, et al. Vibrational characteristics of rotating soft cylinders. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2021, 64: 254611

New kinematics description of the rigid-body fixed-point rotation in a tensor frame

LIU ZhanFang^{1*} & LI JunFeng²

¹ College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

² School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China

The current theoretical mechanics does not give a complete kinematic description of the fixed-point rotation of a rigid body. For example, the rotation angle comprising multiple fixed-point rotations is underdetermined, only the angular velocity vector about Euler angles is defined, and the angular acceleration vector composed of two rotations is an open problem. This paper demonstrates that the rotation angle, angle velocity, and angular acceleration of the rigid-body fixed-point rotation are essentially not vectors but second-order antisymmetric tensors. The latter can be expressed by the corresponding pseudovectors. The composition of ordered rotations is established to be the ordered inner product of the corresponding orthogonal tensors in the absolute reference system. General composition rules of the angular velocity and angle acceleration tensors and their vectors are formulated. Euler angles describe the attitude of a rigid body through three orderly fixed-axis rotations that are equivalent to a fixed-point rotation. The angle velocity and angular acceleration vectors in terms of Euler angles are presented on the basis of the general composition rule, and their concise form is given in the Resal coordinate system.

angle tensor, angle velocity tensor, angle acceleration tensor, Euler angle, composition rule

PACS: 06.30.GV, 45.40.Cc, 45.40.Ln

doi: [10.1360/SSPMA-2021-0349](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2021-0349)