带跳的分数维 Brown 运动幂变差的渐近行为

刘广应^{①,②*}, 张新生^②

① 南京审计学院数学与统计学院, 南京 210029;

② 复旦大学管理学院统计系, 上海 200433

E-mail: liugying@fudan.edu.cn, xszhang@fudan.edu.cn

收稿日期: 2010-03-16; 接受日期: 2010-09-19; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11071045) 和江苏省高校自然科学基金 (批准号: 08KJD110011, 10KJB110004) 资助项目

摘要 本文研究了 $X_t = B_t^H + \xi_t$ 现实幂变差的渐近理论, B^H 为 Hurst 指数为 $H \in (0, 1)$ 的分数维 Brown 运动, ξ 为与 B^H 独立的非 Gauss Lévy 过程, 我们给出了其大数定律, 以及经适当中心化的中心极限定理, 这些结果将为处理具有长期记忆跳过程的统计问题提供理论基础.

关键词 分数维 Brown 运动 Lévy 过程 幂变差 中心极限定理 大数定律

MSC (2000) 主题分类 60F17, 60G99

1 引言

幂变差理论已经广泛应用在随机过程的统计领域. 一般地说, 过程 X 的 p 次现实幂变差 (realized power variation) 定义为

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |X_{i\Delta_n} - X_{(i-1)\Delta_n}|^p,$$

Δ_n 为时间间隔. 近年来, 幂变差^[1]、双幂变差^[2] (bi-power variation)、协变差^[3] (covariation) 和多幂变差理论^[4] (multi-power variation) 被用来分析高频数据的统计问题, 如用来估计金融资产价格波动率或整体波动率 (integrated volatility), 并引起了理论界的极大关注. 另外, 除了利用幂变差理论来估计波动率问题, 幂变差理论也可以用来判断过程中是否含有跳部分, 如 [5–7]. 通常利用幂变差来解决统计问题, 都需要分析它的渐近极限行为.

幂变差理论的研究可以追溯到上个世纪六七十年代, Berman^[8], Hudson 和 Tucker^[9], Hudson 和 Mason^[10] 研究了可加过程的变差理论, Lépingle^[11] 研究了 $p > 1$ 时半鞅幂变差的渐近理论, 得到了大数定律. Jacod^[12] 系统全面分析了 Lévy 过程幂变差的大数定律和中心极限定理, Jacod^[13] 利用同样方法分析了半鞅框架下幂变差的大数定律和中心极限定理. Barndorff-Nielsen 和 Shephard^[14] 分析了 Brown 半鞅 (Brownian semimartingale) 多幂变差的大数定律和中心极限定理. Corcuera 等^[15] 研究了分数维过程的幂变差理论, 给出了经过某种标准化后幂变差的大数定律和中心极限定理, Barndorff-Nielsen 等^[16] 考虑了 Gauss 过程的幂变差渐近理论.

目前, 已有相当多的文献通过实证分析和统计检验表明, 实际金融数据, 特别是高频金融资产价格数据一般都含有跳, 其中有一大类的统计方法都利用了幂变差理论, 如见 [6, 7] 等. 为了进一步利用幂变差理论来处理金融数据中的统计问题, 一些研究者考虑了过程含有跳部分的幂变差理论, 如 [12–14].

英文引用格式: Liu G Y, Zhang X S. Asymptotic properties of power variations of fractional Brownian motion with jumps (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41(1): 81–94, doi: 10.1360/012010-187

另一方面, 研究还发现金融数据具有长期记忆性等特点, 如参见文献 [17]. 对于长期记忆性过程, 已有研究者考虑了其幂变差理论, 详见 [15, 16]. 但对于既具有跳部分又含有长期记忆性的幂变差渐近理论特别是中心极限定理至今未见公开发表的文献讨论, 为此本文将分析同时含有这两种特性过程的幂变差渐近行为.

2 模型、记号和主要结果

2.1 模型和记号

本文主要研究定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的随机过程

$$X_t = B_t^H + \xi_t, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

其中 B^H 为 Hurst 指数为 $H \in (0, 1)$ 的分数维 Brown 运动, ξ 为非 Gauss 的 Lévy 过程且与 B^H 相互独立, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 为 X 生成的自然 σ -域流.

分数维 Brown 运动 $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ 为零均值的 Gauss 过程, 协方差函数为

$$E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad s, t \geq 0.$$

B^H 为自相似过程, 即对任意的 $a > 0$, $\{a^{-H} B_{at}^H, t \geq 0\}$ 与 $\{B_t^H, t \geq 0\}$ 具有相同的分布. 当 $H = 1/2$ 时, B^H 为经典的 Brown 运动. 若记 $Y_k := B_k^H - B_{k-1}^H$, 则平稳序列 $\{Y_k\}_{k \geq 1}$ 的相关系数函数为

$$\rho_H(n) = \frac{1}{2}[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}] \sim cn^{2H-2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

c 为某个常数, 当 $H > 1/2$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_H(n) = \infty$ 这种性质被定义为长期记忆性或长期依赖性.

非 Gauss Lévy 过程 ξ 的特征为 $(b, 0, F)$, F 为 R 上的正测度, $F(0) = 0$, $\int (x^2 \wedge 1) F(dx) < \infty$. 记 μ 为 ξ 的跳随机测度, ν 为其可料补偿测度, $\nu(dt, dx) = dt \otimes F(dx)$, 我们用记号 $\star$ 表示关于测度 μ 和 $\mu - \nu$ 的随机积分, 则 ξ 可以表示为 $\xi_t = bt + x1_{|x| \leq 1} \star (\mu - \nu)_t + x1_{|x| > 1} \star \mu_t$, 此时 X 具有如下形式:

$$X_t = bt + B_t^H + x1_{|x| \leq 1} \star (\mu - \nu)_t + x1_{|x| > 1} \star \mu_t. \quad (2.2)$$

一般可以用 Blumenthal-Gettoor 指数 δ 来度量 Lévy 过程跳的强度:

$$\delta = \inf \left\{ r > 0 : \int (|x|^r \wedge 1) \nu_t(dx) < \infty \right\}.$$

对任意 $p > 0$, 实函数 f 在区间 $[a, b]$ 上的 p 次变差定义为

$$var_p(f; [a, b]) = \sup_{\pi} \left(\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{1/p},$$

这里的分割 $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$. 当 $p > \delta$ 时, ξ 跳的 p 次幂变差为有限的, 此时, 记 $B(p)_t = \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p$, 则 $B(p)_t < \infty$. 当 $\int (|x| \wedge 1) F(dx) < \infty$ 或 $\delta < 1$ 时, $\xi_t = \bar{b}t + \sum_{s \leq t} \Delta \xi_s$, 其中 $\bar{b} = b - \int_{|x| \leq 1} xF(dx)$, $\Delta \xi_s = \xi_s - \xi_{s-}$, ξ_{s-} 为 ξ_t 在 s 处的左极限, 记 $X'_t = \sum_{s \leq t} \Delta \xi_s$, 此时 X 可以表示为

$$X_t = \bar{b}t + B_t^H + X'_t = \bar{b}t + B_t^H + \sum_{s \leq t} \Delta \xi_s. \quad (2.3)$$

因此, X 包含了一类同时具有长期记忆性, 也含有跳部分的过程, 因而这类过程具备了刻画金融数据的两个重要特性 — 长期记忆性和跳跃性.

对任意随机过程 Z , 设 $\Delta_i^n Z = Z_{i\Delta_n} - Z_{(i-1)\Delta_n}$ 为 Z 的增量, 记

$$V_p(Z)_t^n = \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n Z|^p, p > 0, \quad V(Z, f)_t^n = \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f(\Delta_i^n Z), \quad Z_t^{(n)} = Z_{\Delta_n[t/\Delta_n]} = Z_0 + \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \Delta_i^n Z, \quad (2.4)$$

当 $f(x) = |x|^p$ 时, 则 $V_p(Z)_t^n = V(Z, f)_t^n$. 设 U 为标准正态分布, 记 $m_p = E(|U|^p)$ 为 U 的 m 阶绝对矩. 为了方便讨论, 本文主要考虑 $\Delta_n = 1/n$ 等分割的情形下, 当 $\Delta_n \rightarrow 0$ (或 $n \rightarrow \infty$) 时, $V_p(X)_t^n$ 的渐近理论. 讨论 X 幂变差的渐近行为, 特别是中心极限定理, 其难点在于: 由于 X 非半鞅, 其连续部分非鞅, 不能用鞅的一些理论直接处理; 又由于同时具有跳跃的部分, 像 Jacod^[12, 13] 用 Itô 公式直接来处理也有相当的困难; 再者 X 非 Gauss 过程, 也很难用类似于 [15, 16] 中噪声展开的方法.

本文要用到依概率一致收敛和 stable 收敛这两个概念. 对于给定的随机过程序列

$$\{Y_s\}_{s \geq 0}, \quad \{Y_s^n\}_{s \geq 0},$$

如果对任意固定的 $t > 0$, 有 $\sup_{s \leq t} |Y_s^n - Y_s| \xrightarrow{P} 0$, 则称随机过程 Y^n 依概率一致收敛到随机过程 Y , 记为 $Y^n \xrightarrow{u.c.P} Y$ 或 $Y_t^n \xrightarrow{u.c.P} Y_t$. stable 收敛是一种比依分布收敛更强的收敛, 设 Y^n 为定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上一列变量, Y 为一定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 扩展空间上的变量, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, 若对所有的有界 $\mathcal{G}$ 可测随机变量 Z , 对所有的有界连续函数 g , 有 $E(Zg(Y^n)) \rightarrow E(Zg(Y))$, 则称 Y^n 为 $\mathcal{G}$ -stable 收敛到 Y , 记为 $Y^n \xrightarrow{\mathcal{G}-L(s)} Y$, 若 $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, 我们简记为 $Y^n \xrightarrow{L(s)} Y$, 简称为 Y^n stable 收敛到 Y , 详见 [18]. 注意本文涉及到的变量 Y^n 为 D 空间上的随机过程, 这里 D 为定义在 $[0, \infty)$ 上所有右连左极函数构成的函数空间并赋有 Skorohod 拓扑. 我们用 $\xrightarrow{L}$ 表示通常的依分布收敛, 用 $\xrightarrow{P}$ 表示依概率收敛.

2.2 主要结果

定理 1 设 $p > \delta$, 则

- 当 $0 < p < 1/H$ 时, $n^{pH-1}V_p(X)_t^n \xrightarrow{u.c.P} m_p t$,
- 当 $p = 1/H$ 时, $V_p(X)_t^n \xrightarrow{u.c.P} m_p t + B(p)_t$,
- 当 $p > 1/H$ 时, $V_p(X)_t^n \xrightarrow{u.c.P} B(p)_t$.

注 2.1 当 $H = 1/2$ 时, X 为半鞅, 定理 1 中结论 b) 即为经典的平方变差收敛结果, c) 的结论则是 [11] 中的结果, 对于结论 a) 可以由 [13] 得到.

定理 2 设 $p > \delta$, $0 < H \leq 3/4$, $1/(2H) < p$, η 为大于 0 的常数, 当 $p > 1$ 时, 或当 $p \leq 1$ 且 $\bar{b} = 0$ 时, 则有

$$V_p(X)_t^n - E \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \eta} \xrightarrow{u.c.P} B(p)_t - E \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p 1_{|\Delta \xi_s| \leq \eta}.$$

注 2.2 当 $H = 1/2$ 时, 定理 2 即为 [13, 定理 2.3] 的特殊形式.

定理 3 设 $p > \delta$, $p < 1/(2H)$, 当 $p > 1$ 时, 或当 $p \leq 1$ 且 $\bar{b} = 0$ 时, 则

- 当 $0 < H < 3/4$ 时, 有 $n^{pH-1/2}V_p(X)_t^n - m_p t n^{1/2} \xrightarrow{L(s)} v_1 W_t$,
- 当 $H = 3/4$ 时, 有 $(\log n)^{-1/2}(n^{pH-1/2}V_p(X)_t^n - m_p t n^{1/2}) \xrightarrow{L(s)} v_2 W_t$,
- 当 $3/4 < H < 1$ 时, 有 $n^{2-2H}(n^{pH-1}V_p(X)_t^n - m_p t) \xrightarrow{L} Z_t$,

这里 $W = \{W_t, t \geq 0\}$ 为一 Brown 运动独立于 X ,

$$v_1^2 = 2^p \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \right) + 2 \sum_{j \geq 1} (\gamma_p(\rho_H(j)) - \gamma_p(0)),$$

$$v_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\log n} \sum_{j=1}^n \frac{n-j}{n} \gamma_p(\rho_H(j)),$$

其中 $\gamma_p(\rho) = E(|U|^p |V|^p)$, (U, V) 服从二元正态分布 $N_2(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix})$, $|\rho| < 1$, 且

$$\gamma_p(x) = (1-x^2)^{p+1/2} 2^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2k}}{\pi(2k)!} \Gamma\left(\frac{p+1}{2} + k\right)^2, \quad x \in (-1, 1),$$

$$Z_t = \frac{1}{\Gamma(2-2H) \cos((1-H)\pi)} d_p \int_0^\infty \int_0^{x_2} \frac{e^{i(x_1+x_2)t} - 1}{i(x_1+x_2)} |x_1|^{\frac{1}{2}-H} |x_2|^{\frac{1}{2}-H} dW_{x_1} dW_{x_2}$$

为 Rosenblatt 过程, 且 $d_p = m_{2+p} - m_p$.

注 2.3 当 $p = 1/(2H)$ 时, 定理 3 的 b) 和 c) 结论依然成立, 这从定理 3 的证明过程可以得到. 当 $\xi = 0$ 时, X 简化为分数维 Brown 运动 B^H , 定理 3 的结论即为 [15] 中的结果.

定理 4 设 $U_p, p = 1, 2, \dots$, 为独立标准正态分布列, g 为局部有界的连续非负实函数, 且在 0 的附近, 有 $|g(x)| \leq c|x|$, 其中 c 为一个大于 0 的常数. 则

$$Z(g)_t = \sum_{T_p \leq t} g(\Delta X_{T_p}) U_p$$

有定义, 这里的 T_p 为 X 的跳时刻. 且当 $p > 1/H + 1, \delta < 1$ 时, 有

$$\frac{1}{\Delta_n^H} (V_p(X)_t^n - B(p)_t^{(n)}) \xrightarrow{L-(s)} Z(p|x|^{p-1})_t, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

当 $H \leq 1/2, p > 1 + 1/H$ 时, 上述结论 (2.5) 依然成立.

注 2.4 当 $H \leq 1/2$ 时, 此时我们只需条件 $p > 1 + 1/H$, 无需额外的条件 $\delta < 1$ 也能保证结论成立. 过程 $Z(g)$ 在 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 条件下为 Gauss 过程, 且为半鞅. 当 $H = 1/2$ 时, 定理 4 可以由 [13, 定理 2.12] 得到.

注 2.5 我们没有得到 $\Delta_n^{-H}(V_p(X)_t^n - B(p)_t)$ 的 stable 收敛性, 这是由 Skorokhod 拓扑的特性所决定的. 事实上, 注意到

$$\Delta_n^{-H}(V_p(X)_t^n - B(p)_t) = \Delta_n^{-H}(V_p(X)_t^n - B(p)_t^{(n)}) - \Delta_n^{-H} \sum_{[t/\Delta_n]\Delta_n < s \leq t} |\Delta \xi_s|^p,$$

第一项由定理可得为 D 空间弱收敛的, 因而为紧的, 若 X 在某个时间 T 上存在大跳, 则对任意的 n 有 $\sum_{[T/\Delta_n]\Delta_n < s \leq T} |\Delta \xi_s|^p \geq |\Delta \xi_T|^p$, 也即为一大于 0 的常变量, 此时再乘以一个趋于无穷大的 Δ_n^{-H} , 由 D 空间紧性判别准则可知不能保证其紧性. 但 $\Delta_n^{-H}(V_p(X)_t^n - B(p)_t)$ 为有限维 stable 收敛到上述极限过程的. 更详细的分析可参见 [12].

注 2.6 我们得到以下几种情形的中心极限定理:

- a) 当 $0 < p < 1/(2H)$ 时, 由定理 2 给出;
- b) 当 $p = 1/(2H)$ 时, 由注 2.3 部分给出;

c) 当 $p > 1 + 1/H$ 时, 定理 4 给出了其中心极限定理. 注意当 $1/H < p < 1/H + 1$ 时, 定理 4 的结论不能成立. 如考虑 $\xi = 0$, 注意到 $\Delta_n = 1/n$,

$$\Delta_n^{-H}(V_p(X)_t^n - B(p)_t^{(n)}) = n^H V_p(B^H)_t^n = n^{1+(1-p)H}(n^{pH-1}V_p(B^H)_t^n),$$

当 $1/H < p < 1/H + 1$ 时, $1 + (1-p)H > 0$, 由下面的 (3.3) 式可得, $\Delta_n^{-H}(V_p(X)_t^n - B(p)_t^{(n)})$ 趋向于 ∞ 为非紧的.

注 2.7 对于我们更感兴趣的 $H \geq 1/2$ 情形, 定理 4 比定理 3 的结论具有更广泛的应用. 定理 3 的条件要求 $\delta < p < 1/(2H)$, 由于此时的 $1/(2H)$ 较小, 此时允许我们选择 p 的范围将大大减少, 而且此时还要求 δ 较小, 这样也限制了 X 的范围. 相对于定理 3, 定理 4 则允许我们在很大范围内选择 p ($p > 1 + 1/H$), 且对 X 的条件只需 $\delta < 1$.

本文总假定 $p > \delta$, 若该条件不成立, 则不能保证 $B(p)_t$ 有意义.

3 定理证明

我们先给出两个不等式

$$||a+b|^p - |a|^p| \leq |b|^p, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad (3.1)$$

$$||a+b|^p - |a|^p| \leq C_p(|a|^{p-1} + |b|^{p-1})|b|, \quad p > 1, \quad (3.2)$$

这里, 当 $p > 2$ 时, $C_p = p2^{p-2}$, 当 $1 < p \leq 2$ 时, $C_p = p$. 由 C_r 不等式以及

$$||a|^p - |b|^p| \leq p(\max|a|, |b|)^{p-1}||a| - |b||,$$

立即可得 (3.2) 式, (3.1) 式显然成立.

引理 1 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且具有有限的 p 次变差, $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有有限的 q 次变差, $\alpha > 0$, 则当下列条件任意之一成立:

- a) $\alpha + \beta > p + q$;
- b) $p = q$, $\alpha + \beta > q$;
- c) $q > p$, $\alpha + \beta \geq q$;

有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^\alpha |g(t_i) - g(t_{i-1})|^\beta = 0.$$

其中 λ 为分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 的模, 即 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$.

证明 因为 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数, 当 $r > p$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^r \leq \max_{1 \leq i \leq n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^{r-p} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p,$$

由 $f(x)$ 的连续性知, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $\max_{1 \leq i \leq n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) \rightarrow 0$, 故当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上式左边趋于 0.

我们分两种情形讨论证明:

当 $\beta \geq q$ 时, 此时 $\sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|^\beta$ 有界, 故有

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^\alpha |g(t_i) - g(t_{i-1})|^\beta \leq \max_{1 \leq i \leq n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^\alpha \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|^\beta \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

当 $\beta < q$ 时, 在条件 a) 下, 有 $\alpha > p$, 此时有

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^\alpha |g(t_i) - g(t_{i-1})|^\beta \leq \max_{1 \leq i \leq n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|^\beta \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^\alpha \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

容易验证在条件 b) 和 c) 下, 有 $(\alpha q + \beta p - pq)/(q - \beta) > 0$, 取 $p_1 = (p + \epsilon)/\alpha$, $q_1 = (p + \epsilon)/(p + \epsilon - \alpha)$, $0 < \epsilon < (\alpha q + \beta p - pq)/(q - \beta)$, 则 $p_1 > 1$, $q_1 > 1$, $1/p_1 + 1/q_1 = 1$, 由 Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^\alpha |g(t_i) - g(t_{i-1})|^\beta \leq \left(\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{\alpha p_1} \right)^{1/p_1} \left(\sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|^{\beta q_1} \right)^{1/q_1}.$$

由 ϵ 的取法, 可以验证 $\beta q_1 \geq q$, 此时 $\sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|^{\beta q_1}$ 有界, 又 $\alpha p_1 > p$, 故 $\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{\alpha p_1} \rightarrow 0$, 综上可得命题成立.

注 3.1 当 f 为 α -Hölder 连续的, 则其具有有限的 $1/\alpha$ 次变差. 对任意 $0 < \epsilon < H$, B^H 的轨道几乎处处为 $(H - \epsilon)$ -Hölder 连续的, 具有有限的 $1/(H - \epsilon)$ 次变差, 容易得到, 若将引理 1 中的 f 换为 B^H , $q < 1/H$, 则当 $\alpha > 0$, $\alpha + \beta \geq q$ 时, 结论也几乎处处成立, 也即, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^n |B^H(t_i) - B^H(t_{i-1})|^\alpha |g(t_i) - g(t_{i-1})|^\beta \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

定理 1 的证明 由 $p > \delta$, 知 $B(p)_t$ 有限. 我们首先给出 a) 和 c) 的证明.

a) 由 [15], 知对任意的 $p > 0$, 有

$$n^{pH-1} V_p(B^H)_t^n \xrightarrow{\text{u.c.P}} m_p t. \quad (3.3)$$

由 [12], 知对任意的 $p > \delta$, 当 $p > 1$ 时, 或当 $p \leq 1$ 且 $\bar{b} = 0$ 时, 有

$$V_p(\xi)_t^n \xrightarrow{\text{u.c.P}} B(p)_t. \quad (3.4)$$

当 $p < 1/H$ 且 $p > 1$ 时, 由 (3.4) 可得 $n^{pH-1} V_p(\xi)_t^n \xrightarrow{\text{u.c.P}} 0$. 当 $p < 1/H$ 且 $p \leq 1$ 时, 由 $\delta < p$ 可得 $\delta < 1$, 进而有 (2.3) 式成立, 则有

$$\begin{aligned} n^{pH-1} V_p(\xi)_t^n &\leq n^{pH-1} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\bar{b} \Delta_n|^p + n^{pH-1} V_p(X')_t^n \\ &= n^{p(H-1)-1} [nt] \bar{b} + n^{pH-1} V_p(X')_t^n, \end{aligned}$$

故由 (3.4) 及 $H < 1$, 可得 $n^{pH-1} V_p(\xi)_t^n \xrightarrow{\text{u.c.P}} 0$. 因此当 $p < 1/H$ 且 $p > \delta$ 时, 总有 $n^{pH-1} V_p(\xi)_t^n \xrightarrow{\text{u.c.P}} 0$ 成立, 进而由 [15, 推论 2] 知结论成立.

c) 当 $p > 1/H$ 时, 由于 $0 < H < 1$, 故 $p > 1$. 由 (3.3) 式知, $V_p(B^H)_t^n \xrightarrow{\text{u.c.P}} 0$. 考虑

$$|V_p(X)_t^n - B(p)_t| \leq |V_p(X)_t^n - V_p(\xi)_t^n| + |V_p(\xi)_t^n - B(p)_t|.$$

由 (3.4) 式, 可得上式第二项 $\xrightarrow{\text{u.c.P}} 0$. 由 Minkowski 不等式可得,

$$|(V_p(X)_t^n)^{1/p} - (V_p(\xi)_t^n)^{1/p}| \leq (V_p(B^H)_t^n)^{1/p} \xrightarrow{\text{u.c.P}} 0,$$

故 $|V_p(X)_t^n - V_p(\xi)_t^n| \xrightarrow{\text{u.c.P}} 0$, 综上可得命题成立.

b) 证明的主要思路是将过程 X 分成大跳部分和小跳部分, 然后分别处理. 为此, 设 $\epsilon > 0$, 定义 $I_{n,j}(\epsilon)$ 为 1, 若 X 在 $((j-1)\Delta_n, j\Delta_n]$ 没有绝对值大于 ϵ 的跳, 在其他情况下为 0. 记

$$\begin{aligned} G_n &= V_p(X)_t^n - m_p t - B(p)_t, \\ G_{1n} &= \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p (1 - I_{n,i}(\epsilon)) - \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p 1_{|\Delta \xi_s| > \epsilon}, \\ G_{2n} &= \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p I_{n,i}(\epsilon) - \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p 1_{|\Delta \xi_s| \leq \epsilon} - m_p t, \end{aligned}$$

则 $G_n = G_{1n} + G_{2n}$. 注意到 $V_p(X)_t^n$ 关于 t 为单调的, 若能证明对每个固定的 t , G_n 依概率收敛于 0, 即可得到 $V_p(X)_t^n$ 一致依概率收敛到 $m_p t + B(p)_t$. 为此只需证明当 n 趋向于无穷大且 ϵ 趋于 0 时, G_{1n} 几乎处处收敛于 0, G_{2n} 依概率收敛于 0. 下面我们分别证明这两个命题.

由于 $|x|^p$ 连续, X 的轨道几乎处处为右连左极, 且有有限个大跳, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p (1 - I_{n,i}(\epsilon)) \xrightarrow{\text{a.s.}} \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p 1_{|\Delta \xi_s| > \epsilon},$$

也即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $G_{1n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

对于 G_{2n} , 有

$$\begin{aligned} G_{2n} &= \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p I_{n,i}(\epsilon) - \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^p I_{n,i}(\epsilon) \right) + \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^p I_{n,i}(\epsilon) - \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^p \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^p - m_p t \right) - \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p 1_{|\Delta \xi_s| \leq \epsilon}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

显然对于上式的第三项由 (3.3) 式可得当 $n \rightarrow \infty$ 时其 $\xrightarrow{P} 0$.

对于 (3.5) 式第二项即 $-\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^p (1 - I_{n,i}(\epsilon))$ 为有限项的和, 由 B^H 轨道的几乎处处连续性, 知当 $n \rightarrow \infty$ 时, 其 $\xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

对于 (3.5) 式第四项, 选取 $\eta > 0$, 使得 $p - \delta - \eta > 0$, 则

$$\sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p 1_{|\Delta \xi_s| \leq \epsilon} \leq (\epsilon)^{p-\delta-\eta} \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^{\delta+\eta} 1_{|\Delta \xi_s| \leq \epsilon} \leq (\epsilon)^{p-\delta-\eta} \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^{\delta+\eta},$$

由于 $\sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^{\delta+\eta}$ 为有限的, 故当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 上式右边 $\rightarrow 0$.

对于 (3.5) 式第一项, 注意到 $p = 1/H > 1$ 以及不等式 (3.2), 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} ||\Delta_i^n X|^p - |\Delta_i^n B^H|^p| I_{n,i}(\epsilon) &\leq C_p \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} (|\Delta_i^n B^H|^{p-1} + |\Delta_i^n \xi|^{p-1}) |\Delta_i^n \xi| I_{n,i}(\epsilon) \\ &\leq C_p \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^{p-1} |\Delta_i^n \xi| + C_p \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^p I_{n,i}(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.6)$$

由引理 1 或注 3.1 知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^{p-1} |\Delta_i^n \xi| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$. 对于 $\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^p I_{n,i}(\epsilon)$, 由 Heine-Borel 引理及 ξ 的右连左极性, 对于充分大的 n , 有 $\sup_i |\Delta_i^n \xi| I_{n,i}(\epsilon) \leq 2\epsilon$, 类似于 (3.5) 式第四

项, 选取 $\eta > 0$, 使得 $p - \delta - \eta > 0$, 我们可得

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^p I_{n,i}(\epsilon) \leq (2\epsilon)^{p-\delta-\eta} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^{\delta+\eta} I_{n,i}(\epsilon) \leq (2\epsilon)^{p-\delta-\eta} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^{\delta+\eta},$$

由于 $\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^{\delta+\eta} \rightarrow \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^{\delta+\eta}$ 为有限的, 故当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 上式右边 $\rightarrow 0$.

综上我们得到当 $n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ 时, $G_{2n} \xrightarrow{P} 0$, 故结论得证. 证毕.

定理 2 的证明 设 $0 < \epsilon < \eta$, 有

$$\begin{aligned} V_p(X)_t^n - E \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \eta} &= \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p - \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} - E \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} \right) \\ &\quad - \left(E \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \eta} - E \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} \right), \quad (3.7) \end{aligned}$$

对于上式的第一项

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p - \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} = \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| > \epsilon},$$

该和式为有限项和, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 几乎处处收敛于 $\sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p 1_{|\Delta \xi_s| > \epsilon}$, 注意到 $p > \delta$, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 有 $\sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p 1_{|\Delta \xi_s| > \epsilon} \rightarrow \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p$.

对于 (3.7) 式的第三项

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} E |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \eta} - \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} E |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} = E \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p 1_{\epsilon < |\Delta_i^n X| \leq \eta} := E \kappa_n.$$

注意到 $p > \delta$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\kappa_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p 1_{\epsilon < |\Delta \xi_s| \leq \eta}$, 又 $|\Delta_i^n X|^p 1_{\epsilon < |\Delta_i^n X| \leq \eta} \leq \eta^p$. 由于 κ_n 为有限项的和, 及 B^H 为几乎处处连续的, 故对充分大的 n 有, $\kappa_n \leq K(\omega) \eta^p$, 其中这里的 $K(\omega) = \sum_{s \leq t} 1_{|\Delta \xi_s| > \epsilon/2}$ 为一 Poisson 随机变量, 其参数为 $tF((-\epsilon/2, \epsilon/2)^c)$, 从而可积, 由控制收敛定理可得, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $E \kappa_n \rightarrow E \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p 1_{\epsilon < |\Delta \xi_s| \leq \eta}$, 进而有, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $E \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p 1_{\epsilon < |\Delta \xi_s| \leq \eta} \rightarrow E \sum_{s \leq t} |\Delta \xi_s|^p 1_{|\Delta \xi_s| \leq \eta}$. 因此, 我们只需证明出 (3.7) 式的第二项趋于 0 即可.

对于 (3.7) 式的第二项

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} - \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} E |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} (|\Delta_i^n X|^p - |\Delta_i^n B^H|^p) 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} \right) + \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} (|\Delta_i^n B^H|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} - E |\Delta_i^n B^H|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon}) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} E (|\Delta_i^n B^H|^p - |\Delta_i^n X|^p) 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} \right) \\ &:= A_n + B_n + C_n, \end{aligned}$$

其中 A_n, B_n, C_n 为上式相应的项, 因此, 只需证明 A_n, B_n, C_n 分别几乎处处趋于 0 即可.

对于 A_n , 当 $p \leq 1$ 时, 有

$$|A_n| \leq \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p - |\Delta_i^n B^H|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} \leq \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon}. \quad (3.8)$$

利用三角不等式可得, $|\Delta_i^n \xi| - |\Delta_i^n B^H| \leq |\Delta_i^n X|$, 又 $|\Delta_i^n X| \leq \epsilon$, 进而可得 $|\Delta_i^n \xi| \leq \epsilon + |\Delta_i^n B^H|$. 故 $|A_n| \leq \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^p 1_{|\Delta_i^n \xi| \leq \epsilon + |\Delta_i^n B^H|}$. 注意到 B^H 的几乎处处连续性, 对于充分大的 n , 有 $|A_n| \leq \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^p 1_{|\Delta_i^n \xi| \leq 2\epsilon}$, 类似于定理 1 (3.6) 式 $\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^p I_{n,i}(\epsilon)$ 趋于 0 的证明, 由 (3.4) 式, 可得当 $n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ 时, $A_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

当 $p > 1$ 时, 由 Minkowski 不等式可得

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} \right)^{1/p} - \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} \right)^{1/p} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^p 1_{|\Delta_i^n X| \leq \epsilon} \right)^{1/p}.$$

类似于 $p \leq 1$ 讨论得上式右边几乎处处趋于 0, 进而可得当 $n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ 时, $A_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

对于 C_n , 注意到 $C_n = EA_n$ 及 A_n 几乎处处收敛于 0 的证明过程可知, 只需证当 $n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ 时, 有 $E \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^p 1_{|\Delta_i^n \xi| \leq 2\epsilon} \rightarrow 0$ 成立即可. 不妨设 $0 < \epsilon < 1/4$, 令 $1_{|x| \leq 2\epsilon} \leq \phi(x) \leq 1_{|x| \leq 3\epsilon}$ 为无穷可微函数, $f_\epsilon(x) = |x|^p \phi(x)$, 则有

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^p 1_{|\Delta_i^n \xi| \leq 2\epsilon} \leq \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f_\epsilon(\Delta_i^n \xi).$$

当 $p \leq 1$ 时, 此时 $\bar{b} = 0$, $\xi = X'$, 由 Itô 公式 (参见 [19]) 可得,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f_\epsilon(\Delta_i^n \xi) &\leq \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \sum_{(i-1)\Delta_n \leq s < i\Delta_n} f_\epsilon(\Delta \xi_s) \\ &= \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \int f_\epsilon(x) \mu(ds, dx) \\ &\leq \int_0^t \int_{|x| \leq 1} |x|^p \mu(ds, dx), \end{aligned}$$

由 Lévy 过程性质可知上式右边是可积的, 故由控制收敛定理可得, $E \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^p 1_{|\Delta_i^n \xi| \leq 2\epsilon} \rightarrow 0$.

当 $p > 1$ 时, 设 $\bar{\xi}_t^n = \xi_t - \xi_{(i-1)\Delta_n}$, $(i-1)\Delta_n \leq t < i\Delta_n$, 由 Itô 公式可得,

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f_\epsilon(\Delta_i^n \xi) = \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \left[\int \bar{f}_\epsilon(x, \bar{\xi}_{s-}^n) \nu(ds, dx) + b f'_\epsilon(\bar{\xi}_s^n) ds + \int \tilde{f}_\epsilon(x, \bar{\xi}_{s-}^n) (\mu - \nu)(ds, dx) \right],$$

其中 $\tilde{f}_\epsilon(x, y) = f_\epsilon(x+y) - f_\epsilon(y)$, $\bar{f}_\epsilon(x, y) = \tilde{f}_\epsilon(x, y) - f'_\epsilon(y)x 1_{|x| \leq 1}$. 注意到 $\int_0^t \int \tilde{f}_\epsilon(x, \bar{\xi}_{s-}^n) (\mu - \nu)(ds, dx)$ 为鞅, 则有

$$E \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f_\epsilon(\Delta_i^n \xi) = E \int_0^{[t/\Delta_n]\Delta_n} \left[\int \bar{f}_\epsilon(x, \bar{\xi}_{s-}^n) \nu(ds, dx) + b f'_\epsilon(\bar{\xi}_s^n) ds \right].$$

当 $y \rightarrow 0$ 时, 有 $|\bar{f}_\epsilon(x, y)| \leq K_\epsilon(|x|^p \wedge 1)$, $|f'_\epsilon(x)| \leq K_\epsilon(|x|^{p-1} \wedge 1)$, 其中 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K_\epsilon = 0$, 故有

$$0 \leq E \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f_\epsilon(\Delta_i^n \xi) \leq K_\epsilon t \left(\int (|x|^p \wedge 1) F(dx) + |b| \right),$$

由于 $p > \delta$, 故有 $\int (|x|^p \wedge 1) F(dx) < \infty$, 进而由上式可得当 $n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ 时, $E \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} f_\epsilon(\Delta_i^n \xi) \rightarrow 0$, 因此可得 $E \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^p 1_{|\Delta_i^n \xi| \leq 2\epsilon} \rightarrow 0$.

对于 B_n , 有

$$B_n = \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} (|\Delta_i^n B^H|^p - E|\Delta_i^n B^H|^p) \right) - \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} (|\Delta_i^n B^H|^p 1_{|\Delta_i^n X| > \epsilon} - E|\Delta_i^n B^H|^p 1_{|\Delta_i^n X| > \epsilon}) \right).$$

对于上式第二项的 $\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^p 1_{|\Delta_i^n X| > \epsilon}$ 为有限项和, 易知当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^p 1_{|\Delta_i^n X| > \epsilon} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0,$$

故当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} (|\Delta_i^n B^H|^p 1_{|\Delta_i^n X| > \epsilon} - E|\Delta_i^n B^H|^p 1_{|\Delta_i^n X| > \epsilon}) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

对于 B_n 的第一项, 注意到 B^H 的自相似性及 $\Delta_n = 1/n$, 有

$$\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} E|\Delta_i^n B^H|^p = [t/\Delta_n] n^{-pH} m_p = \frac{[nt] - nt}{nt} n^{1-pH} m_p t + n^{1-pH} m_p t,$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上式右边第一项 $\rightarrow 0$. 故为了证明 B_n 趋于 0, 我们只需证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^p - n^{1-pH} m_p t &= V_p(B^H)_t^n - n^{1-pH} m_p t \\ &= n^{1/2-pH} (n^{-1/2+pH} V_p(B^H)_t^n - n^{1/2} m_p t) \xrightarrow{P} 0. \end{aligned}$$

当 $0 < H < 3/4$ 时, 由 [15, 定理 3], 知 $n^{pH-1/2} V_p(B^H)_t^n - m_p t n^{1/2} \xrightarrow{L} v_1 W_t$, 又 $p > 1/(2H)$, 故可得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^p - n^{1-pH} m_p t \xrightarrow{P} 0$.

当 $H = 3/4$ 时, 由 [15, 定理 7], 知 $(\log n)^{-1/2} (n^{pH-1/2} V_p(B^H)_t^n - m_p t n^{1/2}) \xrightarrow{L} v_2 W_t$, 当 $p > 1/2H$ 时, 有 $n^{1/2-pH} (\log n)^{1/2}$ 趋于 0. 故可得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n B^H|^p - n^{1-pH} m_p t \xrightarrow{P} 0$. 证毕.

定理 3 的证明 我们首先证明: 当 $p < 1/(2H)$, $p > \delta$ 时, 有

$$n^{pH-1/2} (V_p(X)_t^n - V_p(B^H)_t^n) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

当 $p \leq 1$ 时,

$$|V_p(X)_t^n - V_p(B^H)_t^n| \leq V_p(\xi)_t^n.$$

当 $p > 1$ 时, 由 Minkowski 不等式可得

$$|(V_p(X)_t^n)^{1/p} - (V_p(B^H)_t^n)^{1/p}| \leq (V_p(\xi)_t^n)^{1/p}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $V_p(\xi)_t^n \xrightarrow{\text{u.c.P}} B(p)_t < \infty$ (注意这里当 $p \leq 1$ 时, 用到了假设 $\bar{b} = 0$), 由 $p < 1/(2H)$, 可得 $pH - 1/2 < 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $n^{pH-1/2} \rightarrow 0$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $n^{pH-1/2} (V_p(X)_t^n - V_p(B^H)_t^n) \xrightarrow{P} 0$.

a) 我们有

$$n^{pH-1/2} V_p(X)_t^n - m_p t n^{1/2} = (n^{pH-1/2} (V_p(X)_t^n - V_p(B^H)_t^n)) + (n^{pH-1/2} V_p(B^H)_t^n - m_p t n^{1/2}). \quad (3.10)$$

由 [15, 定理 3], 知当 $0 < H < 3/4$ 时, 有

$$n^{pH-1/2}V_p(B^H)_t^n - m_p t n^{1/2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{B^H} \rightarrow L(s)} v_1 W_t, \quad (3.11)$$

其中 $\mathcal{F}^{B^H} = \sigma\{B^H\}$ 为过程 B^H 生成的 σ 域, 进一步我们可以得到

$$n^{pH-1/2}V_p(B^H)_t^n - m_p t n^{1/2} \xrightarrow{L(s)} v_1 W_t. \quad (3.12)$$

事实上, 不妨假定 $\mathcal{F} = \sigma\{B^H\} \vee \sigma\{\xi\}$, 若设 $\varsigma_t^n = n^{pH-1/2}V_p(B^H)_t^n - m_p t n^{1/2}$, $\varsigma_t = v_1 W_t$, 则我们只需证明对任意有界可测函数 u, v , 有界连续函数 g , 有

$$E(u(B^H)v(\xi)g(\varsigma^n)) \rightarrow E(u(B^H)v(\xi)g(\varsigma))$$

成立即可. 由 (3.11) 式, 可得 $E(u(B^H)g(\varsigma^n)) \rightarrow E(u(B^H)g(\varsigma))$, 注意到 B^H , ξ , W 是相互独立的, 以及 ξ 与 B^H , ς^n 是相互独立的, 故可以得到 (3.12) 式. 进而由 (3.9), (3.10), (3.12) 式知结论成立.

b) 注意到 [15, 定理 7], 类似于 a) 的证明可得命题成立.

c) 由 [15, 定理 8], 知

$$n^{2-2H}(n^{pH-1}V_p(B^H)_t^n - m_p t) \xrightarrow{L} Z_t, \quad (3.13)$$

又

$$\begin{aligned} & n^{2-2H}(n^{pH-1}V_p(X)_t^n - m_p t) \\ &= n^{2-2H}(n^{pH-1}V_p(X)_t^n - n^{pH-1}V_p(B^H)_t^n) + n^{2-2H}(n^{pH-1}V_p(B^H)_t^n - m_p t) \\ &= n^{3/2-2H}(n^{pH-1/2}(V_p(X)_t^n - V_p(B^H)_t^n)) + n^{2-2H}(n^{pH-1}V_p(B^H)_t^n - m_p t), \end{aligned}$$

由 $3/4 < H < 1$, 可得 $3/2 - 2H < 0$, 故由 (3.9) 和 (3.13) 式知命题成立. 证毕.

定理 4 的证明 我们证明的主要框架与 [12, 定理 2.6] 类似.

第一步, $Z(g)_t$ 是有定义的, 由 [12, 定理 2.6] 可得.

第二步, 下面证明 (2.5) 式对于 $g \in C^1$ 且 $g(x) = 0, x \in [-2\epsilon, 2\epsilon], \epsilon > 0$ 时成立. 记 $X(\epsilon)_t = X_t - \sum_{S_p \leq t} R_p$, $R_p = \Delta X_{S_p}$, $S_p, p = 1, 2, \dots$ 为 X 绝对值大于 ϵ 的跳时刻, $R_p^n = \Delta_i^n X(\epsilon)$ 当 $S_p \in ((i-1)\Delta_n, i\Delta_n]$, 我们有 $\{S_p < \infty\} = \bigcup_q \{S_p = T_q < \infty\}$. 令 $U'_p = U_q$ 在 $\{S_p = T_q < \infty\}$ 上, 则过程

$$Z'_t = \sum_{p: S_p \leq t} g'(R_p) U'_p$$

在 σ 域 $\mathcal{F}$ 条件下与 $Z(g')$ 具有相同的分布. 若记 $Z^n(g)_t = \Delta_n^{-H}(V(X, g)_t^n - (\sum_{s \leq t} g(\Delta \xi_s))^{(n)})$, 则命题等价于证明 $Z^n(g)_t$ stable 收敛到 Z'_t .

记 $\Omega_n(T, \epsilon) = \{\omega, [0, T] \cap ((i-1)\Delta_n, i\Delta_n] \text{ 至多有一个 } S_p(\omega), \text{ 且 } |\Delta_i^n X(\epsilon)| < 2\epsilon\}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n(T, \epsilon) = \Omega$. 注意到 (2.4), 在 $\Omega_n(T, \epsilon)$ 上利用中值定理有

$$Z^n(g)_t = \Delta_n^{-H} \sum_{p: S_p \leq \Delta_n[t/\Delta_n]} (g(R_p + R_p^n) - g(R_p)) = \sum_{p: S_p \leq \Delta_n[t/\Delta_n]} g'(R_p + \tilde{R}_p^n) \frac{R_p^n}{\Delta_n^H},$$

其中 $\tilde{R}_p^n$ 介于 0 与 R_p^n 之间, 由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $R_p^n \rightarrow 0$ 且 $\Omega_n(T, \epsilon) \rightarrow \Omega$, 此时, $\tilde{R}_p^n \rightarrow 0$, 故只需证出对任意的正整数 q 有

$$\text{随机向量 } \left(\frac{R_p^n}{\Delta_n^H} \right)_{1 \leq p \leq q} \text{ stable 收敛到 } (U'_p)_{1 \leq p \leq q}. \quad (*)$$

设 $\Delta_n^{-H} R_p^n = A_p^n + A_p'^n$, 其中 $A_p^n = \Delta_i^n B^H / \Delta_n^H$, $A_p'^n = \Delta_i^n (X(\epsilon) - B^H) / \Delta_n^H$, 当 $S_p \in ((i-1)\Delta_n, i\Delta_n]$. 注意到 $X(\epsilon)$ 与 S_p 独立, $A_p'^n$ 与 $(X(\epsilon) - B^H)_{\Delta_n} / \Delta_n^H$ 具有相同的分布律, 且 $X(\epsilon)_t - B_t^H = bt + \sum_{s \leq t} \Delta \xi_s$. 此时我们利用 [12, 引理 4.1], 可得, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\xi_t/t^{1/2} \xrightarrow{P} 0$; 若 $\delta < 1$ 时, 有 $\xi_t/t \xrightarrow{P} 0$. 因而当 $\delta < 1$ 或 $H \leq 1/2$ 时, 可得 $A_p'^n$ 依概率收敛于 0, 故只需将 A_p^n 代替 R_p^n 证明 (*) 成立即可.

另一方面, 在 $\Omega_n(T, \epsilon)$ 条件下, 随机向量 $(A_p^n)_{1 \leq p \leq q}$ 与 $(U_p')_{1 \leq p \leq q}$ 为同分布的, 且 $(A_p^n)_{1 \leq p \leq q}$ 为渐近独立的. 事实上, 我们不难得到如下事实:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0+} E \left(\frac{B_{t+x}^H - B_{t-y}^H}{\Delta^H} \frac{B_{s+x_1}^H - B_{s-y_1}^H}{\Delta^H} \right) = 0, \quad \text{其中 } x, y, x_1, y_1 \geq 0, \Delta = x + y = x_1 + y_1.$$

进而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(A_p^n A_q^n | S_p, S_q) = 0$, 不难得到

$$|E(A_p^n A_q^n | S_p, S_q)| \leq n^{2H} H |2H - 1| |S_p - S_q|^{2H-2} M n^{-2} + o(n^{-3}).$$

其中 M 为一大于 0 的常数, 对于固定的 $\epsilon > 0$ 以及充分大的 n , 有 $|S_p - S_q| \geq 1/n$, 由 $2H - 2 < 0$ 可得 $|S_p - S_q|^{2H-2} \leq n^{2-2H}$, 则有 $|E(\alpha(n, p)\alpha(n, q) | S_p, S_q)| \leq (M + 1)$. 由控制收敛定理, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} E A_p^n A_q^n = 0$, 也即 A_p^n 和 A_q^n 为渐近独立的, 进而可得 $(A_p^n)_{1 \leq p \leq q}$ 为渐近独立的. 注意到 $(U_p')_{1 \leq p \leq q}$ 独立于 B^H 也独立于 X . 类似于 [20, 引理 A.3] 的证明可得 (*) 成立.

第三步, 证明对于一般的 $g(x) = |x|^p, p > 1 + 1/H$, 定理的结论也成立. 设 $1_{|x| \leq \eta} \leq \phi_\eta(x) \leq 1_{|x| \leq 2\eta}$ 为一无穷可微函数, 记 $g_\eta = g\phi_\eta$, 第二步已经证明了 $Z^n(g - g_\eta) \xrightarrow{L^-(s)} Z(g(1 - \phi_\eta)), \eta > 0$, 而第一步表明, 当 $\eta \rightarrow 0$ 时, 有 $Z(g(1 - \phi_\eta)) \xrightarrow{u.c.P} Z(g)$. 则我们只需证出

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \limsup_n P \left(\sup_{t \leq T} |Z(g_\eta)_t^n| > \epsilon \right) = 0, \quad \forall \epsilon > 0, \forall T > 0. \quad (3.14)$$

考虑

$$Z(g_\eta)_t^n = \frac{1}{\Delta_n^H} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} (g_\eta(\Delta_i^n X) - g_\eta(\Delta_i^n \xi)) + \frac{1}{\Delta_n^H} \left(\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} g_\eta(\Delta_i^n \xi) - \sum_{s \leq [t/\Delta_n]\Delta_n} g_\eta(\Delta \xi_s) \right), \quad (3.15)$$

若我们能证明 (3.15) 式的第一项和第二项分别依概率收敛于 0, 则可得 (3.14) 式, 即可完成定理证明.

对于 (3.15) 式第一项, 考虑

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_n^H} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |g_\eta(\Delta_i^n X) - g_\eta(\Delta_i^n \xi)| &= \frac{1}{\Delta_n^H} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |g'_\eta(\Delta_i^n \xi + \theta_i \Delta_i^n B^H) \Delta_i^n B^H| \\ &\leq \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} K_{p-1} \frac{|\Delta_i^n B^H|}{\Delta_n^H} (|\Delta_i^n \xi|^{p-1} + |\theta_i \Delta_i^n B^H|^{p-1}) 1_{|\Delta_i^n \xi + \theta_i \Delta_i^n B^H| < \eta} \\ &\leq K_{p-1} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^{p-1} 1_{|\Delta_i^n \xi + \theta_i \Delta_i^n B^H| < \eta} \frac{|\Delta_i^n B^H|}{\Delta_n^H} \\ &\quad + K_{p-1} \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\theta_i \Delta_i^n B^H|^{p-1} \frac{|\Delta_i^n B^H|}{\Delta_n^H}, \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \end{aligned}$$

这里利用了 C_r 不等式, $K_{p-1} = 2^{p-1}$ 为 C_r 不等式的系数. $\Delta_n^{-H} |\Delta_i^n B^H|$ 与标准正态随机变量的绝对值同分布, 由 (3.3) 知, 当 $p - 1 > 1/H$, $n \rightarrow \infty$ 时, $\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\theta_i \Delta_i^n B^H|^{p-1} \xrightarrow{P} 0$. 由定理的条件可

得 $1/H > \delta$, 故有 $p-1 > \delta$, 类似于定理 2 (3.8) 式 A_n 趋于 0 的证明, 可得当 $n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0$ 时, $\sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n \xi|^{p-1} 1_{|\Delta_i^n \xi + \theta_i \Delta_i^n B^H| < \eta} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$. 故当 $n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0$ 时, (3.15) 式第一项依概率收敛于 0.

对于 (3.15) 式第二项, 可以看成是 $[t/\Delta_n]$ 个独立同分布变量

$$\zeta(\eta)_n = \Delta_n^{-H} \left(g_\eta(\xi_{\Delta_n}) - \sum_{s \leq \Delta_n} g_\eta(\Delta \xi_s) \right)$$

的和, 故若能证明 $E|(\Delta_n)^{-1} \zeta(\eta)_n|$ 当 $n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0$ 时趋于 0, 即可得到 (3.14) 式. 由 Itô 公式可得

$$\zeta(\eta)_n = \Delta_n^{-H} \int_0^{\Delta_n} \left[\int h_\eta(x, \xi_{s-}) \nu(ds, dx) + b g'_\eta(\xi_s) ds + \int k_\eta(x, \xi_{s-}) (\mu - \nu)(ds, dx) \right],$$

其中 $k_\eta(x, y) = g_\eta(x+y) - g_\eta(y) - g_\eta(x)$, $h_\eta(x, y) = k_\eta(x, y) - g'_\eta(y)x$. 当 $\delta < 1$ 时, 由 Itô 公式可得

$$\zeta(\eta)_n = \Delta_n^{-H} \int_0^{\Delta_n} \left[\int k_\eta(x, \xi_{s-}) \mu(ds, dx) + \bar{b} g'_\eta(\xi_s) ds \right].$$

故只需证明, 当 $t \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ 时, 有

$$Et^{-H} \left[\int |h_\eta(x, \xi_t)| F(dx) + |b g'_\eta(\xi_t)| \right] \rightarrow 0, \quad Et^{-2H} \int k_\eta^2(x, \xi_t) F(dx) \rightarrow 0 \quad (3.16)$$

成立即可. 当 $\delta < 1$ 时, 注意到 $E \int_0^t |k_\eta(x, \xi_{s-})| \mu(ds, dx) = E \int_0^t |k_\eta(x, \xi_{s-})| \nu(ds, dx)$, 只需证明

$$Et^{-H} \left[\int |k_\eta(x, \xi_t)| F(dx) + |\bar{b} g'_\eta(\xi_t)| \right] \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

当 $H \leq 1/2$ 时, $p > 3$, 当 $\eta < 1$ 此时有 $|h_\eta(x, y)| \leq \epsilon_\eta(|x|^2 \wedge 1)(|y| \wedge 1)$, $|g'_\eta(x)| \leq \epsilon_\eta(|x|^2 \wedge 1)$, $k_\eta^2(x, y) \leq \epsilon_\eta(|x|^2 \wedge 1)(|y|^2 \wedge 1)$, 这里的 $\epsilon_\eta \rightarrow 0$, 当 $\eta \rightarrow 0$ 时. 注意到 $\int(|x|^2 \wedge 1) F(dx) < \infty$, 只需证出 $Et^{-2H}(|\xi_t|^2 \wedge 1)$ 一致有界即可得到 (3.16) 式成立. 由 [12] 中 (5.8) 式, 可得 $Et^{-1}(|\xi_t|^2 \wedge 1)$ 收敛到 $F(|x|^2 \wedge 1)$, 注意到 $H \leq 1/2$, 可得 $Et^{-2H}(|\xi_t|^2 \wedge 1)$ 一致有界.

当 $\delta < 1$ 时, 此时 $p > 2$, 要证 (3.17) 式, 类似于上面的证明, 利用 $|g'_\eta(x)| \leq \epsilon_\eta(|x| \wedge 1)^{p-1}$, $k_\eta(x, y) \leq \epsilon_\eta(|x| \wedge 1)(|y| \wedge 1)$, 以及 $\int(|x| \wedge 1) F(dx) < \infty$, 可得只需证出 $Et^{-H}(|\xi_t| \wedge 1)$ 一致有界即可. 由 [12] 中 (5.8) 式, 可得 $Et^{-1}(|\xi_t| \wedge 1)$ 收敛到 $F(|x| \wedge 1) + \bar{b}$, 注意到 $H < 1$, 故可得 $Et^{-H}(|\xi_t| \wedge 1) \rightarrow 0$, 进而可得 $Et^{-H}(|\xi_t| \wedge 1)$ 一致有界. 因而命题得证. 证毕.

致谢 作者诚挚的感谢审稿人提出的宝贵修改意见, 并对编辑部的热情工作表示感谢.

参考文献

- 1 Barndorff-Nielsen O E, Shephard N. Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models. J Roy Statist Soc Ser B, 2002, 64: 253–280
- 2 Barndorff-Nielsen O E, Shephard N. Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps (with discussion). J Financial Econometrics, 2004, 2: 1–48
- 3 Barndorff-Nielsen O E, Shephard N. Econometric analysis of realised covariation: high frequency covariance, regression and correlation in financial economics. Econometrica, 2004, 72: 885–925
- 4 Barndorff-Nielsen O E, Graversen S E, Jacod J, et al. A central limit theorem for realised power and bipower variations of continuous semimartingales. In: Kabanov Y, Lipster R, eds. From Stochastic Analysis to Mathematical Finance, The Shiryaev Festschrift. Berlin: Springer Verlag, 2006, 33–69

- 5 Woerner J H C. Purely discontinuous Lévy processes and power variation: inference for integrated volatility and the scale parameter. In: Shiryaev A N, et al., eds. *Stochastic Finance*. Berlin: Springer, 2006, 246–276
- 6 Barndorff-Nielsen O E, Shephard N. Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation. *J Financial Econometrics*, 2006, 4: 1–30
- 7 Aït-Sahalia Y, Jacod J. Testing for jumps in a discretely observed process. *Ann Statist*, 2009, 37: 184–222
- 8 Berman S M. Sign-invariant random variables and stochastic processes with sign invariant increments. *Trans Amer Math Soc*, 1965, 119: 216–243
- 9 Hudson W N, Tucker H G. Limit theorem for variational sums. *Trans Amer Math Soc*, 1974, 191: 405–426
- 10 Hudson W N, Mason J D. Variational sums for additive processes. *Proc Amer Math Soc*, 1976, 55: 395–399
- 11 Lépingle D. La variation d'ordre p des semimartingales. *Probab Theory Related Fields*, 1976, 36: 285–316
- 12 Jacod J. Asymptotic properties of power variations of Lévy processes. *ESAIM Probab Stat*, 2007, 11: 173–196
- 13 Jacod J. Asymptotic properties of realized power variations and related functionals of semimartingales. *Stochastic Process Appl*, 2008, 118: 517–559
- 14 Barndorff-Nielsen O E, Shephard N, Winkel M. Limit theorems for multipower variation in the presence of jumps. *Stochastic Process Appl*, 2006, 116: 796–806
- 15 Corcuera J M, Nualart D, Woerner J H C. Power variation of some integral fractional processes. *Bernoulli*, 2006, 12: 713–735
- 16 Barndorff-Nielsen O E, Corcuera J, Podolskijc M. Power variation for Gaussian processes with stationary increments. *Stochastic Process Appl*, 2009, 119: 1845–1865
- 17 Doukhan P, Oppenheim G, Taqqu M S. *Theory and Applications of Long-Range Dependence*. Boston: Birkhauser, 2003
- 18 Jacod J, Shiryaev A. *Limit Theorems for Stochastic Processes*, 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2003
- 19 Jacod J, Jakubowski A, Mémin J. On asymptotic error in discretization of processes. *Ann Probab*, 2003, 31: 592–608
- 20 Vetter M. Limit theorems for bipower variation of semimartingales. *Stoch Proc Appl*, 2010, 120: 22–38

Asymptotic properties of power variations for fractional Brownian motion with jumps

LIU GuangYing & ZHANG XinSheng

Abstract In this paper, we study the asymptotic behavior of the realized power variations of processes of the form $X = B^H + \xi$, where B^H is a fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in (0, 1)$, and ξ is a purely non-Gaussian Lévy process and independent of B^H . We prove the convergence in probability for the properly normalized realized power variation and some associated stable central limit theorems. These conclusions provide new statistical tools to consider the long memory processes with jumps.

Keywords: fractional Brownian motion, Lévy process, realized power variation, central limit theorems

MSC(2000): 60F17, 60G99

doi: 10.1360/012010-187