随机时滞 Schrödinger 格系统的不变测度

陈章¹, 王碧祥², 杨莉^{1*}

1. 山东大学数学学院, 济南 250100;

2. Department of Mathematics, New Mexico Institute of Mining and Technology, Socorro, NM 87801, USA

E-mail: zchen@sdu.edu.cn, bwang@nmt.edu, shirlyya0812@163.com

收稿日期: 2021-01-13; 接受日期: 2021-07-30; 网络出版日期: 2021-12-02; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471190 和 11971260) 资助项目

摘要 本文研究随机时滞 Schrödinger 格系统, 其漂移和扩散系数是局部 Lipschitz 连续的. 首先, 建立一些解的一致估计, 包括高阶矩估计和一致尾端估计. 其次, 运用 Arzelà-Ascoli 定理和二分法技巧证明解的概率分布族在空间 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中的胎紧性. 最后, 利用 Krylov-Bogolyubov 方法证明系统 Markov 半群不变测度的存在性.

关键词 不变测度 随机离散 Schrödinger 方程 非线性噪声 时滞 尾端估计

MSC (2020) 主题分类 34K50, 37L40, 37L55, 60H10

1 引言

本文研究如下随机时滞 Schrödinger 格系统的不变测度的存在性:

$$\begin{cases} du_n(t) - i(u_{n-1}(t) - 2u_n(t) + u_{n+1}(t))dt + \lambda u_n(t)dt + i|u_n(t)|^2 u_n(t)dt \\ = f_n(u_n(t - \rho))dt + g_n dt + \sum_{j=1}^{\infty} (h_{j,n} + \sigma_{j,n}(u_n(t)))dW_j(t), \quad t > 0, \\ u_n(s) = \varphi_n(s), \quad s \in [-\rho, 0], \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ 是未知序列; λ 和 ρ 是正常数; $g = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}, h = (h_{j,n})_{j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}} \in l^2$; f_n 和 $\sigma_{j,n}$ 是局部 Lipschitz 连续函数, $\{W_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 是完备概率空间上的相互独立的双边实值 Wiener 过程.

格系统的渐近动力学被广泛研究, 对于确定性格系统, 参见文献 [1–7]; 对于随机格系统, 参见文献 [8–14]. 由于在实际系统中经常会遇到非瞬时传输或记忆过程, 因此研究带有时滞的系统是有重要意义的. 关于确定性时滞方程可参见文献 [15–20], 关于随机时滞方程可参见文献 [21–28]. 特别地, 文献 [21, 23, 26, 29–32] 研究了有限维随机时滞系统的不变测度. 近来, 文献 [33] 研究了无穷维随机时滞

英文引用格式: Chen Z, Wang B, Yang L. Invariant measures of stochastic Schrödinger delay lattice systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 1015–1032, doi: 10.1360/SCM-2021-0034

格系统的不变测度的存在性, 其非线性项是全局 Lipschitz 的. 本文研究随机时滞 Schrödinger 格系统 (1.1) 的不变测度, 其漂移项和扩散项都是局部 Lipschitz 的, 采用停时思想来处理这些局部 Lipschitz 非线性项.

基于解的概率分布族在空间 l^2 中的胎紧性, 文献 [14] 讨论了不带时滞的随机 Schrödinger 格系统 (即 (1.1) 中的 $\rho = 0$ 且 $f \equiv 0$) 的不变测度的存在性. 然而, 对于时滞格系统 (1.1), 为了证明不变测度的存在性, 我们需要证明解的概率分布族在空间 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中的胎紧性, 这比在空间 l^2 中的证明复杂得多. 为此, 我们需要利用 Arzelà-Ascoli 定理证明解在空间 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中的等度连续性.

事实上, 本文首先得到解的高阶矩估计和其关于时间的 Hölder 连续性 (参见引理 3.2 和 3.3). 接着说明解的尾端项关于 $t \geq 0$ 是一致小的, 进而建立系统 (1.1) 解的一致尾端估计 (参见引理 3.5). 最后, 基于这些一致估计和二分法技巧, 通过 Arzelà-Ascoli 定理, 建立解在空间 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中的等度连续性, 进而得到解的概率分布族在空间 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中的胎紧性 (参见引理 4.1).

另一方面, 为了得到不变测度的存在性, 还需要建立与系统 (1.1) 相关的 Markov 半群的 Feller 性. 由于 (1.1) 中的非线性项是局部 Lipschitz 的, 所以不能用文献 [33] 中的方法来得到 Feller 性. 为此, 我们将采用停时思想和解的一致估计来证明 (更多细节参见引理 4.2 和 4.3). 基于这些分析, 利用 Krylov-Bogolyubov 方法, 我们最终得到系统 (1.1) 的不变测度的存在性 (参见定理 2.2).

下一节将给出 (1.1) 中非线性项的假设及本文的主要定理. 最后两节将分别建立解的一致估计和证明系统 (1.1) 不变测度的存在性.

本文用 l^2 表示由所有 $\mathbb{C}$ 值的平方可加的序列构成的 Hilbert 空间, 其内积和范数分别记为 $(\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$. 用 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 表示定义在 $[- \rho, 0]$ 上的所有 l^2 - 值连续函数构成的 Banach 空间, 范数为

$$\|u\|_{C_\rho} = \max_{s \in [- \rho, 0]} \|u(s)\|.$$

给定 $t \geq 0$, 定义

$$u_t(s) = u(t + s), \quad s \in [- \rho, 0].$$

字母 M 和 c 表示一般的正常数, 在不同的位置取值可能不同.

2 假设条件和主要结论

2.1 假设条件

定义线性算子 $A, B, B^* : l^2 \rightarrow l^2$ 如下:

$$(Au)_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}, \quad (Bu)_n = u_{n+1} - u_n, \quad (B^*u)_n = u_{n-1} - u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad u \in l^2.$$

$$(A1) \quad \|g\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_n|^2 < \infty, \quad \|h\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_{j,n}|^2 < \infty.$$

(F1) $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 关于 $n \in \mathbb{Z}$ 是一致局部 Lipschitz 连续的, 即对于 $\mathbb{C}$ 的任意紧子集 $\mathcal{C}$, 存在常数 $L_{\mathcal{C}} > 0$ 使得

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq L_{\mathcal{C}} |z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{C}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(F2) 对于任意 $n \in \mathbb{Z}$, 存在正数 γ_n 和 η_0 , 使得

$$|f_n(z)| \leq \gamma_n + \eta_0 |z|, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

其中 $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2$.

(Σ1) $\sigma_{j,n} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是局部 Lipschitz 连续的, 即对于任意 $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{C}$ 的任一紧子集 $\mathcal{K}$, 存在常数 $L_{j,n,\mathcal{K}} > 0$ 使得

$$|\sigma_{j,n}(z_1) - \sigma_{j,n}(z_2)| \leq L_{j,n,\mathcal{K}}|z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{K},$$

其中 $L_{\mathcal{K}} = (L_{j,n,\mathcal{K}})_{j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}} \in l^2$.

(Σ2) 对于任意 $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, 存在正数 $\delta_{j,n}$ 和 η_j 使得

$$|\sigma_{j,n}(z)| \leq \delta_{j,n} + \eta_j|z|, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

其中 $(\delta_{j,n})_{j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}}, (\eta_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^2$.

在上述符号下, 系统 (1.1) 在 l^2 中可以表示为如下形式:

$$\begin{cases} du(t) - iAu(t)dt + \lambda u(t)dt + i|u(t)|^2 u(t)dt \\ \quad = (f(u(t-\rho)) + g)dt + \sum_{j=1}^{\infty} (h_j + \sigma_j(u(t)))dW_j(t), \\ u(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\rho, 0], \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $|u|^2 u = (|u_n|^2 u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $f(u(t-\rho)) = (f_n(u_n(t-\rho)))_{n \in \mathbb{Z}}$, $g = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $h_j = (h_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$, $\sigma_j(u) = (\sigma_{j,n}(u_n))_{n \in \mathbb{Z}}$.

2.2 主要结论

定义 2.1 假设 $\varphi \in L^2(\Omega, C([- \rho, 0]; l^2))$ 是 $\mathcal{F}_0$ -可测的. 令 $u(t)$ ($t \geq -\rho$) 是一个连续的 l^2 -值的过程. 如果对所有的 $T > -\rho$, 有 $u \in L^2(\Omega, C([- \rho, T]; l^2))$, $(u_t)_{t \geq 0}$ 是 $\mathcal{F}_t$ -适应的, $u_0 = \varphi$, 并且对于任意 $t \geq 0$, 下式在 l^2 中 P-a.s. 成立:

$$\begin{aligned} u(t) = & \varphi(0) + \int_0^t (iAu(s) - \lambda u(s) - i|u(s)|^2 u(s) + f(u(s-\rho)) + g)ds \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t (h_j + \sigma_j(u(s)))dW_j(s), \end{aligned}$$

则称 $u(t)$ 是系统 (2.1) 的解.

文献 [34] 可以证明如下解的存在唯一性定理.

定理 2.1 假设 (A1)、(F1) 和 (F2) 以及 (Σ1) 和 (Σ2) 成立. 对于任意 $\mathcal{F}_0$ -可测的

$$\varphi \in L^2(\Omega, C([- \rho, 0]; l^2)),$$

系统 (2.1) 在定义 2.1 的意义下存在唯一的解 u , 且对于任意 $T > 0$, 有

$$\mathbb{E}(\|u\|_{C([- \rho, T]; l^2)}^2) \leq M_0 e^{M_0 T} \left(\mathbb{E}(\|\varphi\|_{C_\rho}^2) + T + \|g\|^2 T + \sum_{j=1}^{\infty} \|h_j\|^2 T \right),$$

其中 M_0 是不依赖于 φ 和 T 的正常数.

在此基础上, 我们将证明其不变测度的存在性. 为此, 假设存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$2^{\frac{4m-1}{2m}}(2m-1)^{\frac{2m-1}{2m}}\eta_0 + 4m(2m-1)\|\eta\|^2 - \left(2m - \frac{1}{2}\right)\lambda < 0. \quad (2.2)$$

定理 2.2 假设 (A1)、(F1) 和 (F2) 以及 $(\Sigma 1)$ 和 $(\Sigma 2)$ 成立. 令 (2.2) 在 $m = 1$ 和 $m = 6$ 的情形下成立, 则系统 (2.1) 在空间 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中存在一个不变测度.

注 2.1 我们指出, 当 (1.1) 中的三次项 $i|u_n|^2 u_n$ 改为更一般的非线性项 $\pm iF(|u_n|)u_n$ 时, 本文的结论也是成立的, 其中 $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的, $F(0) = 0$, 并且存在 $L_F > 0$ 和 $\vartheta \geq 0$ 使得

$$|F(|z_1|)z_1 - F(|z_2|)z_2| \leq L_F(|z_1|^\vartheta + |z_2|^\vartheta)|z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

3 解的一致估计

本节将得到系统 (2.1) 解的一致估计, 这对于证明解的概率分布族的胎紧性是有用的.

引理 3.1 假设 (A1)、(F1) 和 (F2) 以及 $(\Sigma 1)$ 和 $(\Sigma 2)$ 成立. 令 (2.2) 在 $m = 1$ 时成立. 如果 $\varphi \in L^2(\Omega, C([- \rho, 0]; l^2))$, 则 (2.1) 的解 u 满足

$$\sup_{t \geq -\rho} \mathbb{E}(\|u(t)\|^2) \leq M_1(1 + \mathbb{E}(\|\varphi\|_{C_\rho}^2)), \quad (3.1)$$

其中 M_1 是不依赖于 φ 的正常数.

证明 令 $\sigma > 0$ 为待定常数. 由 Itô 公式, 对所有的 $t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} \mathbb{E}(\|u(t)\|^2) &= \mathbb{E}(\|\varphi(0)\|^2) + (\sigma - 2\lambda) \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\|u(s)\|^2) ds \\ &\quad + 2\operatorname{Re} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(u(s), f(u(s - \rho))) ds + 2\operatorname{Re} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(u(s), g) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\|h_j + \sigma_j(u(s))\|^2) ds \\ &=: \mathbb{E}(\|\varphi(0)\|^2) + (\sigma - 2\lambda) \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\|u(s)\|^2) ds + \sum_{i=1}^3 \mathcal{J}_i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式、Young 不等式和假设 (F2), 有

$$\mathcal{J}_1 \leq \sqrt{2\rho}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho} \mathbb{E}(\|\varphi\|_{C_\rho}^2) + \frac{\sqrt{2}\|\gamma\|^2}{\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho} \sigma} e^{\sigma t} + 2\sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\|u(s)\|^2) ds. \quad (3.3)$$

类似可得

$$\mathcal{J}_2 \leq \frac{\lambda}{2} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\|u(s)\|^2) ds + \frac{2}{\lambda\sigma} e^{\sigma t} \|g\|^2. \quad (3.4)$$

对于最后一项, 通过假设 $(\Sigma 2)$, 有

$$\mathcal{J}_3 \leq \frac{2}{\sigma} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|h_j\|^2 + 2\|\delta\|^2 \right) e^{\sigma t} + 4\|\eta\|^2 \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\|u(s)\|^2) ds. \quad (3.5)$$

由 (3.2)–(3.5) 可知, 对所有的 $t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} E(\|u(t)\|^2) &\leq (1 + \sqrt{2}\rho\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}) E(\|\varphi\|_{C_\rho}^2) + \left(\sigma + 2\sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho} + 4\|\eta\|^2 - \frac{3}{2}\lambda\right) \int_0^t e^{\sigma s} E(\|u(s)\|^2) ds \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{2}\|\gamma\|^2}{\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}} + \frac{2}{\lambda}\|g\|^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \|h_j\|^2 + 4\|\delta\|^2\right) \sigma^{-1} e^{\sigma t}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

则由 (2.2) 和 (3.6) 可得, 存在 $\sigma_0 > 0$ 使得对于任意 $\sigma \in (0, \sigma_0)$ 以及所有的 $t \geq 0$, 有

$$E(\|u(t)\|^2) \leq (1 + \sqrt{2}\rho\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}) E(\|\varphi\|_{C_\rho}^2) e^{-\sigma t} + \left(\frac{\sqrt{2}\|\gamma\|^2}{\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}} + \frac{2}{\lambda}\|g\|^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \|h_j\|^2 + 4\|\delta\|^2\right) \sigma^{-1},$$

由此可知 (3.1) 成立. $\square$

引理 3.2 假设 (A1)、(F1) 和 (F2) 以及 $(\Sigma 1)$ 和 $(\Sigma 2)$ 成立. 令 (2.2) 在 $m \geq 2$ 时成立. 如果 $\varphi \in L^{2m}(\Omega, C([- \rho, 0]; l^2))$, 则 (2.1) 的解 u 满足

$$\sup_{t \geq -\rho} E(\|u(t)\|^{2m}) \leq M_2(1 + E(\|\varphi\|_{C_\rho}^{2m})), \quad (3.7)$$

其中 M_2 是依赖于 m 但不依赖于 φ 的常数.

证明 定义停时 $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \|u(t)\| > n\}$, $n \in \mathbb{N}$, 如果 $\{t \geq 0 : \|u(t)\| > n\} = \emptyset$, 此时 $\tau_n = +\infty$. 令 $\sigma > 0$ 为待定常数, 由 Itô 公式可得, 对所有的 $t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} E(e^{\sigma(t \wedge \tau_n)} \|u(t \wedge \tau_n)\|^{2m}) &= E(\|\varphi(0)\|^{2m}) + (\sigma - 2m\lambda) E\left(\int_0^{t \wedge \tau_n} e^{\sigma s} \|u(s)\|^{2m} ds\right) \\ &\quad + 2m E\left(\int_0^{t \wedge \tau_n} e^{\sigma s} \|u(s)\|^{2m-2} \operatorname{Re}(u(s), f(u(s-\rho))) ds\right) \\ &\quad + 2m E\left(\int_0^{t \wedge \tau_n} e^{\sigma s} \|u(s)\|^{2m-2} \operatorname{Re}(u(s), g) ds\right) \\ &\quad + \left[m E\left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{t \wedge \tau_n} e^{\sigma s} \|u(s)\|^{2m-2} \|h_j + \sigma_j(u(s))\|^2 ds\right)\right. \\ &\quad \left.+ 2m(m-1) E\left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{t \wedge \tau_n} e^{\sigma s} \|u(s)\|^{2m-4} |\operatorname{Re}(u(s), h_j + \sigma_j(u(s)))|^2 ds\right)\right] \\ &=: E(\|\varphi(0)\|^{2m}) + (\sigma - 2m\lambda) E\left(\int_0^{t \wedge \tau_n} e^{\sigma s} \|u(s)\|^{2m} ds\right) + \sum_{i=1}^3 \mathcal{J}_i. \end{aligned} \quad (3.8)$$

由假设 (F2) 和 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\leq 2^{\frac{4m-1}{2m}} (2m-1)^{\frac{2m-1}{2m}} \eta_0 e^{\frac{\sigma\rho}{2m}} E\left(\int_0^{t \wedge \tau_n} e^{\sigma s} \|u(s)\|^{2m} ds\right) + (4m-2)^{\frac{2m-1}{2m}} \eta_0 \rho e^{\frac{\sigma\rho}{2m}} E(\|\varphi\|_{C_\rho}^{2m}) \\ &\quad + (4m-2)^{\frac{2m-1}{2m}} \eta_0^{- (2m-1)} e^{-\frac{2m-1}{2m}\sigma\rho} \|\gamma\|^{2m} \sigma^{-1} e^{\sigma t}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

对于 $\mathcal{J}_2$, 利用 Young 不等式, 有

$$\mathcal{J}_2 \leq \frac{1}{4} \lambda E\left(\int_0^{t \wedge \tau_n} e^{\sigma s} \|u(s)\|^{2m} ds\right) + (8m-4)^{2m-1} \lambda^{-(2m-1)} \|g\|^{2m} \sigma^{-1} e^{\sigma t}. \quad (3.10)$$

最后, 由假设 (Σ2), 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 \leq & \left(\frac{1}{4} \lambda + 4m(2m-1) \|\eta\|^2 \right) \mathbb{E} \left(\int_0^{t \wedge \tau_n} e^{\sigma s} \|u(s)\|^{2m} ds \right) \\ & + (4m-2)^m (4m-4)^{m-1} \lambda^{-(m-1)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|h_j\|^2 + 2\|\delta\|^2 \right)^m \sigma^{-1} e^{\sigma t}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

由 (3.8)–(3.11) 可得, 对所有的 $t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\sigma(t \wedge \tau_n)} \|u(t \wedge \tau_n)\|^{2m}) \leq & (1 + (4m-2)^{\frac{2m-1}{2m}} \eta_0 \rho e^{\frac{\sigma \rho}{2m}}) \mathbb{E}(\|\varphi\|_{C_\rho}^{2m}) \\ & + \left(\sigma + 2^{\frac{4m-1}{2m}} (2m-1)^{\frac{2m-1}{2m}} \eta_0 e^{\frac{\sigma \rho}{2m}} + 4m(2m-1) \|\eta\|^2 - 2 \left(m - \frac{1}{4} \right) \lambda \right) \\ & \times \mathbb{E} \left(\int_0^{t \wedge \tau_n} e^{\sigma s} \|u(s)\|^{2m} ds \right) \\ & + (4m-2)^{\frac{2m-1}{2m}} \eta_0^{-(2m-1)} e^{-\frac{2m-1}{2m} \sigma \rho} \|\gamma\|^{2m} \sigma^{-1} e^{\sigma t} \\ & + (8m-4)^{2m-1} \lambda^{-(2m-1)} \|g\|^{2m} \sigma^{-1} e^{\sigma t} \\ & + (4m-2)^m (4m-4)^{m-1} \lambda^{-(m-1)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|h_j\|^2 + 2\|\delta\|^2 \right)^m \sigma^{-1} e^{\sigma t}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

由 (2.2)、(3.12) 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty$ 可得, 存在 $\sigma_0 > 0$ 使得对于任意 $\sigma \in (0, \sigma_0)$ 以及所有的 $t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|u(t)\|^{2m}) \leq & (1 + (4m-2)^{\frac{2m-1}{2m}} \eta_0 \rho e^{\frac{\sigma \rho}{2m}}) \mathbb{E}(\|\varphi\|_{C_\rho}^{2m}) e^{-\sigma t} \\ & + (4m-2)^{\frac{2m-1}{2m}} \eta_0^{-(2m-1)} e^{-\frac{2m-1}{2m} \sigma \rho} \|\gamma\|^{2m} \sigma^{-1} \\ & + (8m-4)^{2m-1} \lambda^{-(2m-1)} \|g\|^{2m} \sigma^{-1} \\ & + (4m-2)^m (4m-4)^{m-1} \lambda^{-(m-1)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|h_j\|^2 + 2\|\delta\|^2 \right)^m \sigma^{-1}. \end{aligned}$$

由此可得估计式 (3.7). □

引理 3.3 假设 (A1)、(F1) 和 (F2) 以及 (Σ1) 和 (Σ2) 成立. 令 (2.2) 在 $m = 6$ 时成立. 如果 $\varphi \in L^{12}(\Omega, C([- \rho, 0]; l^2))$, 则 (2.1) 的解 u 满足, 对于任意 $t > r \geq 0$, 有

$$\mathbb{E}(\|u(t) - u(r)\|^4) \leq M_3(|t - r|^2 + |t - r|^4), \quad (3.13)$$

其中 $M_3 > 0$ 是依赖于 R 但不依赖于 t 和 r 的常数, $\|\varphi\|_{L^{12}(\Omega, C([- \rho, 0]; l^2))} \leq R$.

证明 通过 (2.1), 对所有的 $t > r \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(r)\| \leq & (\lambda + 4) \int_r^t \|u(s)\| ds + \int_r^t \|u(s)\|^3 ds + \int_r^t \|f(u(s - \rho))\| ds \\ & + \|g\| |t - r| + \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \int_r^t (h_j + \sigma_j(u(s))) dW_j(s) \right\|. \end{aligned} \quad (3.14)$$

由 (3.14) 可知, 对所有的 $t > r \geq 0$, 有

$$\mathbb{E}(\|u(t) - u(r)\|^4) \leq 125 \|g\|^4 |t - r|^4 + 125 (\lambda + 4)^4 \mathbb{E} \left(\left(\int_r^t \|u(s)\| ds \right)^4 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + 125\mathbb{E}\left(\left(\int_r^t \|u(s)\|^3 ds\right)^4\right) + 125\mathbb{E}\left(\left(\int_r^t \|f(u(s-\rho))\| ds\right)^4\right) \\
& + 125\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{\infty} \int_r^t (h_j + \sigma_j(u(s))) dW_j(s)\right\|^4\right) \\
& =: 125\|g\|^4|t-r|^4 + \sum_{i=1}^4 \mathcal{K}_i.
\end{aligned}$$

由引理 3.2 ($m=6$ 的情形) 和 Hölder 不等式, 有

$$\mathcal{K}_1 \leq 125(\lambda+4)^4|t-r|^3 \int_r^t \mathbb{E}(\|u(s)\|^4) ds \leq c_1|t-r|^4.$$

类似地, 对于 $\mathcal{K}_2$, 通过引理 3.2 和 Hölder 不等式, 得到

$$\mathcal{K}_2 \leq 125|t-r|^3 \int_r^t \mathbb{E}(\|u(s)\|^{12}) ds \leq c_2|t-r|^4.$$

对于 $\mathcal{K}_3$, 通过假设 (F2)、引理 3.2 和 Hölder 不等式, 有

$$\mathcal{K}_3 \leq 1000\|\gamma\|^4|t-r|^4 + 1000\eta_0^4|t-r|^3 \int_{r-\rho}^{t-\rho} \mathbb{E}(\|u(s)\|^4) ds \leq c_3|t-r|^4.$$

最后, 由假设 ($\Sigma 2$)、引理 3.2 和 Burkholder-Davis-Gundy 不等式可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_4 & \leq c_4 \mathbb{E}\left(\left(\int_r^t \left(2 \sum_{j=1}^{\infty} \|h_j\|^2 + 4\|\delta\|^2 + 4\|\eta\|^2 \|u(s)\|^2\right) ds\right)^2\right) \\
& \leq 8c_4 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|h_j\|^2 + 2\|\delta\|^2\right)^2 |t-r|^2 + 32c_5 \|\eta\|^4 |t-r|^2.
\end{aligned}$$

结合以上所有的估计可得 (3.13). □

为了证明 (2.1) 解的概率分布族的胎紧性, 我们对解的尾端给出一些一致估计.

引理 3.4 假设 (A1)、(F1) 和 (F2) 以及 ($\Sigma 1$) 和 ($\Sigma 2$) 成立. 令 (2.2) 在 $m=1$ 时成立, 则系统 (2.1) 的解 u 满足, 对于 $L^2(\Omega, C([- \rho, 0]; l^2))$ 中的任意紧子集 E , 有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{\varphi \in E} \sup_{t \geq -\rho} \sum_{|n| \geq k} \mathbb{E}(|u_n(t, \varphi)|^2) = 0.$$

证明 选取 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 ξ 如下:

$$\xi(s) = \begin{cases} 0, & |s| \leq 1, \\ 1, & |s| \geq 2, \end{cases}$$

满足对所有的 $s \in \mathbb{R}$, $0 \leq \xi(s) \leq 1$. 给定 $k \in \mathbb{N}$, 记 $\xi_k = (\xi(\frac{n}{k}))_{n \in \mathbb{Z}}$, $\xi_k u = (\xi(\frac{n}{k})u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

由 (2.1), 得到

$$\begin{aligned}
& d(\xi_k u) - (i\xi_k A u - \lambda \xi_k u - i\xi_k |u|^2 u) dt \\
& = (\xi_k f(u(t-\rho)) + \xi_k g) dt + \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_k h_j + \xi_k \sigma_j(u(t))) dW_j(t).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

令 $\sigma > 0$ 为待定常数, 由 Itô 公式可知, 对所有的 $t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned}
 e^{\sigma t} \mathbb{E}(\|\xi_k u(t)\|^2) &= (\sigma - 2\lambda) \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\|\xi_k u(s)\|^2) ds + \mathbb{E}(\|\xi_k \varphi(0)\|^2) \\
 &\quad + 2\operatorname{Re} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(iAu(s), \xi_k^2 u(s)) ds - 2\operatorname{Re} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(i|u(s)|^2 u(s), \xi_k^2 u(s)) ds \\
 &\quad + 2\operatorname{Re} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\xi_k f(u(s-\rho)), \xi_k u(s)) ds + 2\operatorname{Re} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\xi_k g, \xi_k u(s)) ds \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\|\xi_k h_j + \xi_k \sigma_j(u(s))\|^2) ds \\
 &=: (\sigma - 2\lambda) \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\|\xi_k u(s)\|^2) ds + \sum_{i=1}^6 \mathcal{S}_i.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

注意到 $\varphi \in E$, 并且 E 在 $L^2(\Omega, C([- \rho, 0]; l^2))$ 中是紧的. 所以对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $K_1 = K_1(\epsilon, E) \geq 1$, 使得对所有的 $k \geq K_1$ 和 $\varphi \in E$, 有 $\sum_{|n| \geq k} \mathbb{E}(|\varphi_n(0)|^2) \leq \epsilon$. 由此, 对所有的 $k \geq K_1$ 和 $\varphi \in E$, 有

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_1 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left(\left| \xi \left(\frac{n}{k} \right) \varphi_n(0) \right|^2 \right) = \sum_{|n| \geq k} \mathbb{E} \left(\left| \xi \left(\frac{n}{k} \right) \varphi_n(0) \right|^2 \right) \\
 &\leq \sum_{|n| \geq k} \mathbb{E}(|\varphi_n(0)|^2) \leq \epsilon.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

对于 $\mathcal{S}_2$, 由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_2 &= -2\operatorname{Re} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(iBu(s), B(\xi_k^2 u(s))) ds \\
 &\leq \frac{c_1}{k} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\|u(s)\|^2) ds,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 $c_1 > 0$ 是依赖于 ξ 的常数, $c_2 > 0$ 是依赖于 φ 但不依赖于 k 的常数. 由于 $\mathbb{E}(i|u(s)|^2 u(s), \xi_k^2 u(s))$ 是纯虚数, 我们很容易得到

$$\mathcal{S}_3 = 0. \tag{3.19}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式、Hölder 不等式和假设 (F2), 可得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_4 &\leq 2\sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{\sigma\rho}{2}} \int_0^t e^{\sigma s} \mathbb{E}(\|\xi_k u(s)\|^2) ds \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}e^{\sigma t}}{\sigma\eta_0 e^{\frac{\sigma\rho}{2}}} \sum_{|n| \geq k} \gamma_n^2 + \sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{\sigma\rho}{2}} \int_{-\rho}^0 e^{\sigma s} \mathbb{E}(\|\xi_k \varphi(s)\|^2) ds.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

由于 $\gamma = (\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2$, 所以存在 $K_2 = K_2(\epsilon) \geq 1$, 使得对所有的 $k \geq K_2$, 有

$$\sum_{|n| \geq k} \gamma_n^2 \leq \epsilon. \tag{3.21}$$

注意到对 $\varphi \in L^2(\Omega, C([- \rho, 0]; l^2))$, 有 $\varphi \in C([- \rho, 0]; L^2(\Omega, l^2))$, 并且集合 $\{\varphi(s) \in L^2(\Omega, l^2) : s \in [- \rho, 0]\}$ 在 $L^2(\Omega, l^2)$ 中是紧的. 因此, 给定 $\epsilon > 0$, 存在 $s_1, s_2, \dots, s_m \in [- \rho, 0]$, 使得

$$\{\varphi(s) \in L^2(\Omega, l^2) : s \in [- \rho, 0]\} \subseteq \bigcup_{j=1}^m B\left(\varphi(s_j), \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}\right), \tag{3.22}$$

其中 $B(\varphi(s_j), \frac{\sqrt{\epsilon}}{2})$ 是 $L^2(\Omega, l^2)$ 中的半径为 $\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$ 的开球. 由于 $\varphi(s_j) \in L^2(\Omega, l^2)$ ($j = 1, 2, \dots, m$), 所以存在 $K_3 = K_3(\epsilon, \varphi)$, 使得对所有的 $k \geq K_3$, 有

$$\sum_{|n| \geq k} E(|\varphi_n(s_j)|^2) \leq \frac{1}{4}\epsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.23)$$

由 (3.22) 和 (3.23) 可知, 对所有的 $k \geq K_3$, 有

$$\sum_{|n| \geq k} E(|\varphi_n(s)|^2) \leq \epsilon, \quad \forall s \in [-\rho, 0]. \quad (3.24)$$

由于 E 在 $L^2(\Omega, C([-\rho, 0]; l^2))$ 中是紧的, 所以通过 (3.24) 可知, 存在 $K_4 = K_4(\epsilon, E) \geq \max\{K_1, K_2\}$, 使得对所有的 $\varphi \in E$ 和 $k \geq K_4$, 有

$$\sum_{|n| \geq k} E(|\varphi_n(s)|^2) \leq \epsilon, \quad \forall s \in [-\rho, 0]. \quad (3.25)$$

从 (3.20)、(3.21) 和 (3.25) 中可以得出, 对所有的 $\varphi \in E$, $t \geq 0$, $k \geq K_4$, 有

$$\mathcal{J}_4 \leq 2\sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{\sigma\rho}{2}} \int_0^t e^{\sigma s} E(\|\xi_k u(s)\|^2) ds + \frac{\sqrt{2}e^{\sigma t}}{\sigma\eta_0 e^{\frac{\sigma\rho}{2}}} \epsilon + \sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{\sigma\rho}{2}} \rho\epsilon. \quad (3.26)$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Hölder 不等式, 可得

$$\mathcal{J}_5 \leq \frac{\lambda}{2} \int_0^t e^{\sigma s} E(\|\xi_k u(s)\|^2) ds + \frac{2}{\lambda\sigma} e^{\sigma t} \sum_{|n| \geq k} |g_n|^2. \quad (3.27)$$

对于最后一项, 通过假设 $(\Sigma 2)$, 可得

$$\mathcal{J}_6 \leq \frac{2}{\sigma} e^{\sigma t} \sum_{|n| \geq k} \sum_{j=1}^{\infty} (|h_{j,n}|^2 + 2\delta_{j,n}^2) + 4\|\eta\|^2 \int_0^t e^{\sigma s} E(\|\xi_k u(s)\|^2) ds. \quad (3.28)$$

从 (3.16)–(3.19) 和 (3.26)–(3.28) 可以得出, 对所有的 $\varphi \in E$, $t \geq 0$, $k \geq K_4$, 有

$$\begin{aligned} E(\|\xi_k u(t)\|^2) &\leq \epsilon e^{-\sigma t} + \left(\sigma + 2\sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho} + 4\|\eta\|^2 - \frac{3}{2}\lambda \right) \int_0^t e^{\sigma s} E(\|\xi_k u(s)\|^2) ds \\ &\quad + \frac{c_1 c_2}{k\sigma} + \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma\rho} \eta_0^{-1} \sigma^{-1} \epsilon + \sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho} \rho\epsilon e^{-\sigma t} \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{|n| \geq k} |g_n|^2 + \sum_{|n| \geq k} \sum_{j=1}^{\infty} (|h_{j,n}|^2 + 2\delta_{j,n}^2) \right) \sigma^{-1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

通过 (2.2) 和 (3.29) 可得, 存在充分小的 $\sigma > 0$, 使得对所有的 $\varphi \in E$, $t \geq 0$, $k \geq K_4$, 有

$$\begin{aligned} E(\|\xi_k u(t)\|^2) &\leq \epsilon + \frac{c_1 c_2}{k\sigma} + \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma\rho} \eta_0^{-1} \sigma^{-1} \epsilon + \sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho} \rho\epsilon \\ &\quad + \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{|n| \geq k} |g_n|^2 + \sum_{|n| \geq k} \sum_{j=1}^{\infty} (|h_{j,n}|^2 + 2\delta_{j,n}^2) \right) \sigma^{-1}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

由于 $g = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $h = (h_{j,n})_{j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}}$, $(\delta_{j,n})_{j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}} \in l^2$, 所以通过 (3.30) 可得, 存在 $K_5 = K_5(\epsilon, E) \geq K_4$, 使得对所有的 $\varphi \in E$, $t \geq 0$, $k \geq K_5$, 有

$$\sum_{|n| \geq 2k} E(|u_n(t)|^2) \leq E(\|\xi_k u(t)\|^2) \leq (3 + \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma\rho} \eta_0^{-1} \sigma^{-1} + \sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho} \rho) \epsilon. \quad (3.31)$$

通过 (3.25) 和 (3.31) 可得, 对所有的 $\varphi \in E$, $k \geq K_5$, 有

$$\sup_{t \geq -\rho} \sum_{|n| \geq 2k} \mathbb{E}(|u_n(t)|^2) \leq (4 + \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma\rho}\eta_0^{-1}\sigma^{-1} + \sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho})\epsilon.$$

证毕. $\square$

引理 3.5 假设 (A1)、(F1) 和 (F2) 以及 $(\Sigma 1)$ 和 $(\Sigma 2)$ 成立. 令 (2.2) 在 $m = 1$ 时成立, 则系统 (2.1) 的解 u 满足, 对于 $L^2(\Omega, C([- \rho, 0]; l^2))$ 中的任意紧集 E , 有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{\varphi \in E} \sup_{t \geq \rho} \mathbb{E} \left(\sup_{t-\rho \leq r \leq t} \sum_{|n| \geq k} |u_n(r, \varphi)|^2 \right) = 0.$$

证明 令 ξ 是引理 3.4 中定义的光滑函数. 对 (3.15) 应用 Itô 公式, 并从 $t - \rho$ 到 r 积分, 其中 $t \geq \rho$, $t - \rho \leq r \leq t$, 得到

$$\begin{aligned} \|\xi_k u(r)\|^2 &= \|\xi_k u(t - \rho)\|^2 - 2\lambda \int_{t-\rho}^r \|\xi_k u(s)\|^2 ds \\ &\quad + 2\operatorname{Re} \int_{t-\rho}^r (iAu(s), \xi_k^2 u(s)) ds - 2\operatorname{Re} \int_{t-\rho}^r (i|u(s)|^2 u(s), \xi_k^2 u(s)) ds \\ &\quad + 2\operatorname{Re} \int_{t-\rho}^r (\xi_k f(u(s - \rho)), \xi_k u(s)) ds + 2\operatorname{Re} \int_{t-\rho}^r (\xi_k g, \xi_k u(s)) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t-\rho}^r \|\xi_k h_j + \xi_k \sigma_j(u(s))\|^2 ds \\ &\quad + 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t-\rho}^r (h_j + \sigma_j(u(s)), \xi_k^2 u(s)) dW_j(s). \end{aligned} \quad (3.32)$$

对于 (3.32) 右端的第 3 项, 利用与推导 (3.18) 类似的计算, 可得

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \int_{t-\rho}^r (iAu(s), \xi_k^2 u(s)) ds &\leq 4 \int_{t-\rho}^r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \xi \left(\frac{n+1}{k} \right) - \xi \left(\frac{n}{k} \right) \right| |u_n u_{n+1}| ds \\ &\leq \frac{c}{k} \int_{t-\rho}^r \|u(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.33)$$

注意到

$$-2\operatorname{Re} \int_{t-\rho}^r (i|u(s)|^2 u(s), \xi_k^2 u(s)) ds = 0. \quad (3.34)$$

由 (3.32)–(3.34) 可得, 对所有的 $t \geq \rho$, $t - \rho \leq r \leq t$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t-\rho \leq r \leq t} \|\xi_k u(r)\|^2 \right) &\leq \mathbb{E}(\|\xi_k u(t - \rho)\|^2) + \frac{c}{k} \int_{t-\rho}^t \mathbb{E}(\|u(s)\|^2) ds \\ &\quad + 2 \int_{t-\rho}^t \mathbb{E}(|(\xi_k f(u(s - \rho)), \xi_k u(s))|) ds + 2 \int_{t-\rho}^t \mathbb{E}(|(\xi_k g, \xi_k u(s))|) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t-\rho}^t \mathbb{E}(\|\xi_k h_j + \xi_k \sigma_j(u(s))\|^2) ds \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left(\sup_{t-\rho \leq r \leq t} \left| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t-\rho}^r (h_j + \sigma_j(u(s)), \xi_k^2 u(s)) dW_j(s) \right| \right) \end{aligned}$$

$$=: \sum_{i=1}^6 \mathcal{T}_i.$$

利用引理 3.4, 对于给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $K_1 = K_1(\epsilon) \geq 1$, 使得对所有的 $t \geq \rho$, $k \geq K_1$, 有

$$\mathcal{T}_1 = \sum_{|n| \geq k} \mathbb{E} \left(\left| \xi \left(\frac{n}{k} \right) u_n(t - \rho) \right|^2 \right) \leq \sum_{|n| \geq k} \mathbb{E}(|u_n(t - \rho)|^2) \leq \epsilon. \quad (3.35)$$

通过引理 3.1 可知, 存在 $K_2 = K_2(\epsilon, E) \geq K_1$, 使得对所有的 $t \geq \rho$, $k \geq K_2$, 有

$$\mathcal{T}_2 \leq \epsilon. \quad (3.36)$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式、Hölder 不等式、引理 3.4 和假设 (F2), 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3 &\leq \int_{t-\rho}^t \mathbb{E}(\|\xi_k f(u(s - \rho))\|^2) ds + \int_{t-\rho}^t \mathbb{E}(\|\xi_k u(s)\|^2) ds \\ &\leq \rho\epsilon + 2\rho \sum_{|n| \geq k} \gamma_n^2 + 2\eta_0^2 \rho\epsilon. \end{aligned}$$

由于 $\gamma = (\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2$, 所以存在 $K_3 = K_3(\epsilon, E) \geq K_2$, 使得对所有的 $t \geq \rho$, $k \geq K_3$, 有

$$\mathcal{T}_3 \leq 3\rho\epsilon + 2\eta_0^2 \rho\epsilon. \quad (3.37)$$

对于 $\mathcal{T}_4$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_4 &\leq \int_{t-\rho}^t \mathbb{E}(\|\xi_k g\|^2) ds + \int_{t-\rho}^t \mathbb{E}(\|\xi_k u(s)\|^2) ds \\ &\leq \rho \sum_{|n| \geq k} |g_n|^2 + \rho\epsilon. \end{aligned}$$

注意到 $g = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2$, 则存在 $K_4 = K_4(\epsilon, E) \geq K_3$, 使得对所有的 $t \geq \rho$, $k \geq K_4$, 有

$$\mathcal{T}_4 \leq 2\rho\epsilon. \quad (3.38)$$

对于 $\mathcal{T}_5$, 利用引理 3.4 和假设 ($\Sigma 2$), 有

$$\mathcal{T}_5 \leq 2\rho \sum_{|n| \geq k} \sum_{j=1}^{\infty} (h_{j,n}^2 + 2\delta_{j,n}^2) + 4\|\eta\|^2 \rho\epsilon.$$

因此存在 $K_5 = K_5(\epsilon, E) \geq K_4$, 使得对所有的 $t \geq \rho$, $k \geq K_5$, 有

$$\mathcal{T}_5 \leq 4(1 + \|\eta\|^2) \rho\epsilon. \quad (3.39)$$

最后, 利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式、Cauchy-Schwarz 不等式、Hölder 不等式和 (3.39), 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_6 &\leq c_1 \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{t-\rho}^t |(\xi_k h_j + \xi_k \sigma_j(u(s)), \xi_k u(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\sup_{t-\rho \leq s \leq t} \|\xi_k u(s)\|^2 \right) + 2c_1^2 (1 + \|\eta\|^2) \rho\epsilon. \end{aligned} \quad (3.40)$$

由 (3.35)–(3.40) 可以得出, 对所有的 $t \geq \rho$, $k \geq K_5$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t-\rho \leq r \leq t} \sum_{|n| \geq 2k} |u_n(r)|^2 \right) &\leq \mathbb{E} \left(\sup_{t-\rho \leq r \leq t} \|\xi_k u(r)\|^2 \right) \\ &\leq 2(2 + 2\eta_0^2 \rho + 5\rho + (4 + 2c_1^2)(1 + \|\eta\|^2)\rho)\epsilon. \end{aligned}$$

至此完成了引理 3.5 的证明. $\square$

作为引理 3.5 的直接结果, 我们得到以下引理.

引理 3.6 假设 (A1)、(F1) 和 (F2) 以及 $(\Sigma 1)$ 和 $(\Sigma 2)$ 成立. 令 (2.2) 在 $m = 1$ 时成立, 则系统 (2.1) 的解 u 满足, 对于 $C([-\rho, 0]; l^2)$ 中任意紧子集 E , 有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{\varphi \in E} \sup_{t \geq 0} \mathbb{E} \left(\sup_{t-\rho \leq r \leq t} \sum_{|n| \geq k} |u_n(r, \varphi)|^2 \right) = 0.$$

证明 由于 E 是 $C([-\rho, 0]; l^2)$ 中的紧集, 因此 E 在 $L^2(\Omega, C([-\rho, 0]; l^2))$ 中也是紧的, 再结合关于 (3.25) 的讨论, 我们可以说, 对于每一个 $\epsilon > 0$, 存在 $K = K(\epsilon, E) \geq 1$, 使得对所有的 $\varphi \in E$, $k \geq K$, 有

$$\sup_{-\rho \leq r \leq 0} \sum_{|n| \geq k} |u_n(r, \varphi)|^2 = \sup_{-\rho \leq r \leq 0} \sum_{|n| \geq k} |\varphi_n(r)|^2 \leq \epsilon.$$

结合上式和引理 3.5, 即可完成引理 3.6 的证明. $\square$

4 不变测度的存在性

4.1 Feller 性、Markov 性和胎紧性

本小节建立转移半群的 Feller 性质和 Markov 性质以及解的概率分布族的胎紧性, 这对证明 (2.1) 在空间 $C([-\rho, 0]; l^2)$ 中的不变测度的存在性是有用的.

为了方便, 将 (2.1) 的解记为 $u(t, r, \varphi)$, 其中 $t \geq r - \rho$, $\varphi \in C([-\rho, 0]; l^2)$ 是初始条件, 这意味着

$$u(t, r, \varphi) = \varphi(t - r), \quad t \in [r - \rho, r].$$

当 $r = 0$ 时, 将 $u(t, 0, \varphi)$ 写作 $u(t, \varphi)$, 其中 $t \geq -\rho$. 定义

$$u_t(r, \varphi)(s) = u(t + s, r, \varphi), \quad s \in [-\rho, 0].$$

$u_t(r, \varphi)$ 在 $C([-\rho, 0]; l^2)$ 中的分布被记为 $\mathcal{L}(u_t(r, \varphi))$.

接下来建立 (2.1) 解的概率分布族的胎紧性.

引理 4.1 假设 (A1)、(F1) 和 (F2) 以及 $(\Sigma 1)$ 和 $(\Sigma 2)$ 成立, 令 (2.2) 在 $m = 1$ 和 $m = 6$ 时成立, 则 (2.1) 解的概率分布族 $\{\mathcal{L}(u_t(0, 0)) : t \geq 0\}$ 在 $C([-\rho, 0]; l^2)$ 中是胎紧的.

证明 通过 Chebyshev 不等式和引理 3.1 可知, 存在常数 $c_1 > 0$, 使得对所有的 $t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\|u_t(0, 0)(0)\| \geq R\} &= \mathbb{P}\{\|u(t, 0, 0)\| \geq R\} \\ &\leq \frac{1}{R^2} \mathbb{E}(\|u(t, 0, 0)\|^2) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{c_1}{R^2}.$$

因此对每个 $\epsilon > 0$, 存在 $R_1 = R_1(\epsilon) > 0$, 使得对所有的 $t \geq 0$, 有

$$P\{\|u_t(0,0)(0)\| \geq R_1\} \leq \frac{1}{3}\epsilon. \quad (4.1)$$

从引理 3.3 得出, 对所有的 $t \geq 0$, $r, s \in [-\rho, 0]$, 有

$$\begin{aligned} E(\|u_t(0,0)(r) - u_t(0,0)(s)\|^4) &\leq c_2(1 + |r - s|^2)|r - s|^2 \\ &\leq c_2(1 + \rho^2)|r - s|^2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 $c_2 > 0$. 利用 (4.2) 和二分法技巧可知, 对于给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $R_2 = R_2(\epsilon) > 0$, 使得对所有的 $t \geq 0$, 有

$$P\left(\left\{\sup_{-\rho \leq s < r \leq 0} \frac{\|u_t(0,0)(r) - u_t(0,0)(s)\|}{|r - s|^{\frac{1}{8}}} \leq R_2\right\}\right) > 1 - \frac{1}{3}\epsilon. \quad (4.3)$$

通过引理 3.6 可得, 对于任意 $\epsilon > 0$ 以及 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $k_m = k(\epsilon, m) \geq 1$, 使得对所有的 $t \geq 0$, 有

$$E\left(\sup_{t-\rho \leq s \leq t} \sum_{|n| \geq k_m} |u_n(s, 0, 0)|^2\right) \leq \frac{\epsilon}{2^{2m+2}}. \quad (4.4)$$

由 Chebyshev 不等式和 (4.4) 可得, 对所有的 $t \geq 0$, 有

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{\sup_{t-\rho \leq s \leq t} \sum_{|n| \geq k_m} |u_n(s, 0, 0)|^2 \geq \frac{1}{2^m}\right\}\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^m E\left(\sup_{t-\rho \leq s \leq t} \sum_{|n| \geq k_m} |u_n(s, 0, 0)|^2\right) \leq \frac{1}{4}\epsilon.$$

这表明, 对所有的 $t \geq 0$, 有

$$P\left(\left\{\sup_{t-\rho \leq s \leq t} \sum_{|n| \geq k_m} |u_n(s, 0, 0)|^2 \leq \frac{1}{2^m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}\right\}\right) > 1 - \frac{1}{3}\epsilon. \quad (4.5)$$

对于给定的 $\epsilon > 0$, 令 $\mathcal{Z}_\epsilon = \mathcal{Z}_{1,\epsilon} \cap \mathcal{Z}_{2,\epsilon} \cap \mathcal{Z}_{3,\epsilon}$, 其中

$$\mathcal{Z}_{1,\epsilon} = \{z \in C([-\rho, 0]; l^2) : \|z(0)\| \leq R_1(\epsilon)\}, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{Z}_{2,\epsilon} = \left\{z \in C([-\rho, 0]; l^2) : \sup_{-\rho \leq s < r \leq 0} \frac{\|z(r) - z(s)\|}{|r - s|^{\frac{1}{8}}} \leq R_2(\epsilon)\right\}, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{Z}_{3,\epsilon} = \left\{z \in C([-\rho, 0]; l^2) : \sup_{-\rho \leq r \leq 0} \sum_{|n| \geq k_m(\epsilon)} |z_n(r)|^2 \leq \frac{1}{2^m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}\right\}. \quad (4.8)$$

从 (4.1)、(4.3) 和 (4.5)–(4.8) 可得, 对所有的 $t \geq 0$, 有

$$P(\{u_t(0,0) \in \mathcal{Z}_\epsilon\}) > 1 - \epsilon.$$

接下来, 将利用 Arzelà-Ascoli 定理证明 $\mathcal{Z}_\epsilon$ 是 $C([-\rho, 0]; l^2)$ 中的预紧集.

根据 (4.7) 可知, $\mathcal{Z}_\epsilon$ 在 $C([-\rho, 0]; l^2)$ 中是等度连续的. 另一方面, 由 (4.6) 和 (4.7) 可得, 对每个 $r \in [-\rho, 0]$, 有

$$\|z(r)\| \leq \|z(r) - z(0)\| + \|z(0)\| \leq R_2(\epsilon)|r|^{\frac{1}{8}} + R_1(\epsilon) \leq \rho^{\frac{1}{8}} R_2(\epsilon) + R_1(\epsilon). \quad (4.9)$$

结合 (4.8) 和 (4.9) 可知, 对于任意固定的 $r \in [-\rho, 0]$, 集合 $\{z(r) : z \in \mathcal{Z}_\epsilon\}$ 在 l^2 中是预紧的. 证毕. $\square$

现在介绍系统 (2.1) 的转移半群. 如果 $\psi : C([- \rho, 0]; l^2) \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界 Borel 函数并且 $0 \leq r \leq t$, 令

$$(P_{r,t}\psi)(\varphi) = E(\psi(u_t(r, \varphi))), \quad \forall \varphi \in C([- \rho, 0]; l^2),$$

则集合族 $\{P_{r,t}\}_{0 \leq r \leq t}$ 是关于 (2.1) 的转移半群, 通常将 $P_{0,t}$ 记作 P_t . 另外, 对于 $G \in \mathcal{B}(C([- \rho, 0]; l^2))$, $0 \leq r \leq t$ 以及 $\varphi \in C([- \rho, 0]; l^2)$, 记

$$p(r, \varphi; t, G) = (P_{r,t}1_G)(\varphi) = E(1_G(u_t(r, \varphi))) = P(\omega \in \Omega : u_t(r, \varphi) \in G),$$

其中 1_G 是 G 的示性函数.

定义 4.1 令 $\mathcal{P}(C([- \rho, 0]; l^2))$ 是 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中所有概率测度构成的空间. 称

$$\mu \in \mathcal{P}(C([- \rho, 0]; l^2))$$

为 (2.1) 的不变测度, 如果对所有的 $t \geq 0$ 以及对每一个有界 Borel 函数 $\psi : C([- \rho, 0]; l^2) \rightarrow \mathbb{R}$, 有

$$\int_{C([- \rho, 0]; l^2)} (P_t\psi)(\varphi) \mu(d\varphi) = \int_{C([- \rho, 0]; l^2)} \psi(\varphi) \mu(d\varphi).$$

现在建立转移半群 $\{P_{r,t}\}_{0 \leq r \leq t}$ 的 Feller 性质. 首先考虑解关于初始条件的局部 Lipschitz 连续性. 给定 $R > 0$, 记

$$\tau_R = \inf\{t \geq 0 : \|u(t, \varphi_1)\| \vee \|u(t, \varphi_2)\| > R\},$$

其中 $u(\cdot, \varphi_1)$ 和 $u(\cdot, \varphi_2)$ 分别是 (2.1) 在初始条件 φ_1 和 φ_2 下的解.

引理 4.2 假设 (A1)、(F1) 和 (F2) 以及 $(\Sigma 1)$ 和 $(\Sigma 2)$ 成立. 如果 $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\Omega, C([- \rho, 0]; l^2))$, 则对于任意 $t \geq 0$, 有

$$E\left(\sup_{-\rho \leq s \leq t} \|u(s \wedge \tau_R, \varphi_1) - u(s \wedge \tau_R, \varphi_2)\|^2\right) \leq (2 + M)e^{Mt}E(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C_\rho}^2),$$

其中 M 是依赖于 R 但不依赖于 t, φ_1 和 φ_2 的常数.

引理 4.2 可由假设 (F1) 和 $(\Sigma 1)$ 以及停时思想和 Itô 公式证得, 详细证明省略.

令 $C_b(C([- \rho, 0]; l^2))$ 是由所有从 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 到 $\mathbb{R}$ 的有界连续函数构成的 Banach 空间, 其范数为

$$\|\psi\|_\infty := \sup_{u \in C([- \rho, 0]; l^2)} |\psi(u)|, \quad \forall \psi \in C_b(C([- \rho, 0]; l^2)).$$

引理 4.3 假设 (A1)、(F1) 和 (F2) 以及 $(\Sigma 1)$ 和 $(\Sigma 2)$ 成立, 则转移半群 $\{P_{r,t}\}_{0 \leq r \leq t}$ 是 Feller 的. 这意味着, 如果 $\psi \in C_b(C([- \rho, 0]; l^2))$, 则对每个 $0 \leq r \leq t$, 有

$$P_{r,t}\psi \in C_b(C([- \rho, 0]; l^2)).$$

证明 给定 $0 \leq r_0 \leq t_0$ 和 $\psi \in C_b(C([- \rho, 0]; l^2))$, 由定义可知, $P_{r_0,t_0}\psi$ 在 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中是有界的. 现在说明 $P_{r_0,t_0}\psi$ 的连续性, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 如果在 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中有 $\varphi_n \rightarrow \varphi$, 则

$$E(\psi(u_{t_0}(r_0, \varphi_n))) \rightarrow E(\psi(u_{t_0}(r_0, \varphi))). \quad (4.10)$$

由于在空间 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中 $\varphi_n \rightarrow \varphi$, 我们知道 $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ 在 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中是有界的. 由定理 2.1 可知, 存在不依赖于 n 的常数 $c_1 > 0$, 使得对所有的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$E\left(\sup_{r_0 - \rho \leq t \leq t_0} \|u(t, r_0, \varphi_n)\|^2\right) + E\left(\sup_{r_0 - \rho \leq t \leq t_0} \|u(t, r_0, \varphi)\|^2\right) \leq c_1. \quad (4.11)$$

通过 (4.11) 可得, 对每个 $\epsilon > 0$, 存在 $R(\epsilon) > 0$, 使得对所有的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$P\left(\left\{\sup_{r_0-\rho \leq t \leq t_0} \|u(t, r_0, \varphi_n)\| > R(\epsilon)\right\}\right) < \frac{1}{2}\epsilon \quad (4.12)$$

以及

$$P\left(\left\{\sup_{r_0-\rho \leq t \leq t_0} \|u(t, r_0, \varphi)\| > R(\epsilon)\right\}\right) < \frac{1}{2}\epsilon. \quad (4.13)$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\tau_n = \inf\{t \geq r_0 : \|u(t, r_0, \varphi)\| \vee \|u(t, r_0, \varphi_n)\| > R(\epsilon)\}. \quad (4.14)$$

由引理 4.2 可得, 存在 $c_2 = c_2(\epsilon) > 0$, 使得对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 以及对每个 $\delta > 0$, 有

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \sup_{r_0-\rho \leq t \leq t_0} \|u(t \wedge \tau_n, r_0, \varphi_n) - u(t \wedge \tau_n, r_0, \varphi)\| \geq \delta\right\}\right) \leq \frac{c_2}{\delta^2} \|\varphi_n - \varphi\|_{C_\rho}^2. \quad (4.15)$$

定义

$$\Omega_n^\epsilon = \left\{\omega \in \Omega : \sup_{r_0 \leq t \leq t_0} \|u(t, r_0, \varphi)\| \leq R(\epsilon), \sup_{r_0 \leq t \leq t_0} \|u(t, r_0, \varphi_n)\| \leq R(\epsilon)\right\}. \quad (4.16)$$

从 (4.12)、(4.13) 和 (4.16) 可得 $P(\Omega \setminus \Omega_n^\epsilon) < \epsilon$. 通过 (4.14) 和 (4.16), 我们看到对所有的 $\omega \in \Omega_n^\epsilon$, 有

$$\tau_n(\omega) \geq t_0.$$

进一步由 (4.15) 得到

$$\begin{aligned} & P(\{\omega \in \Omega : \|u_{t_0}(r_0, \varphi_n) - u_{t_0}(r_0, \varphi)\|_{C_\rho} \geq \delta\}) \\ & \leq \epsilon + P(\{\omega \in \Omega_n^\epsilon : \|u_{t_0}(r_0, \varphi_n) - u_{t_0}(r_0, \varphi)\|_{C_\rho} \geq \delta\}) \\ & \leq \epsilon + P\left(\left\{\omega \in \Omega : \sup_{t_0-\rho \leq t \leq t_0} \|u(t \wedge \tau_n, r_0, \varphi_n) - u(t \wedge \tau_n, r_0, \varphi)\| \geq \delta\right\}\right) \\ & \leq \epsilon + \frac{c_2}{\delta^2} \|\varphi_n - \varphi\|_{C_\rho}^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

由于 φ_n 在 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中收敛于 φ , 并且 $\epsilon > 0$ 是任意的, 因此从 (4.17) 可以得出, 对每个 $\delta > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : \|u_{t_0}(r_0, \varphi_n) - u_{t_0}(r_0, \varphi)\|_{C_\rho} \geq \delta\}) = 0.$$

因此, 存在 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 的一个子序列 $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, 使得在空间 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中,

$$u_{t_0}(r_0, \varphi_{n_k}) \rightarrow u_{t_0}(r_0, \varphi) \quad \text{a.s.} \quad (4.18)$$

由 ψ 在 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 上的连续性、有界性和 Lebesgue 控制收敛定理, 通过 (4.18) 可得, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$E(\psi(u_{t_0}(r_0, \varphi_{n_k}))) \rightarrow E(\psi(u_{t_0}(r_0, \varphi))). \quad (4.19)$$

然后利用 (4.19) 以及反证法, 可得序列 $\{E(\psi(u_{t_0}(r_0, \varphi_n)))\}_{n=1}^\infty$ 是收敛的, 由此可得 (4.10). $\square$

参考文献 [35, 第 250–252 页], 可以得到转移半群 $\{P_{r,t}\}_{0 \leq r \leq t}$ 的下述性质.

引理 4.4 假设 (A1)、(F1) 和 (F2) 以及 $(\Sigma 1)$ 和 $(\Sigma 2)$ 成立, 则有

(i) $\{P_{r,t}\}_{0 \leq r \leq t}$ 是齐次的, 即

$$p(r, \varphi; t, \cdot) = p(0, \varphi; t - r, \cdot), \quad \forall 0 \leq r \leq t, \quad \varphi \in C([- \rho, 0]; l^2);$$

(ii) 对 $r \geq 0$ 以及 $\varphi \in C([- \rho, 0]; l^2)$, $\{u_t(r, \varphi)\}_{t \geq r}$ 是一个 $C([- \rho, 0]; l^2)$ - 值的 Markov 过程;

(iii) 如果 $\psi : C([- \rho, 0]; l^2) \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界 Borel 函数, 则

$$(P_{s,t}\psi)(\varphi) = (P_{s,r}(P_{r,t}\psi))(\varphi), \quad \forall 0 \leq s \leq r \leq t, \quad \varphi \in C([- \rho, 0]; l^2).$$

特别地, 下面的 Chapman-Kolmogorov 方程成立:

$$p(s, \varphi; t, G) = \int_{C([- \rho, 0]; l^2)} p(s, \varphi; r, dy) p(r, y; t, G), \quad \forall \varphi \in C([- \rho, 0]; l^2), \quad G \in \mathcal{B}(C([- \rho, 0]; l^2)).$$

4.2 定理 2.2 的证明

基于前面的分析, 下面将证明系统 (2.1) 不变测度的存在性.

首先, 由引理 4.3 和 4.4 可以分别得到 Feller 性和 Markov 性. 另一方面, 由引理 4.1 知, $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $C([- \rho, 0]; l^2)$ 中是胎紧的. 因此存在概率测度 μ , 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\mu_n \rightarrow \mu$. 由 Chapman-Kolmogorov 方程可知, 对每个 $t \geq 0$ 以及 $\psi \in C_b(C([- \rho, 0]; l^2))$, 有

$$\begin{aligned} \int_{C([- \rho, 0]; l^2)} \psi(y) \mu(dy) &= \int_{C([- \rho, 0]; l^2)} \left(\int_{C([- \rho, 0]; l^2)} \psi(y) p(0, \xi; t, dy) \right) \mu(d\xi) \\ &= \int_{C([- \rho, 0]; l^2)} (P_t \psi)(\xi) \mu(d\xi). \end{aligned} \quad (4.20)$$

由 (4.20) 以及定义 4.1 可知, μ 是 (2.1) 的不变测度.

致谢 感谢审稿人对本文提出的建设性意见.

参考文献

- 1 Beyn W J, Pilyugin S Y. Attractors of reaction diffusion systems on infinite lattices. J Dynam Differential Equations, 2003, 15: 485–515
- 2 Caraballo T, Morillas F, Valero J. Asymptotic behaviour of a logistic lattice system. Discrete Contin Dyn Syst, 2014, 34: 4019–4037
- 3 Chow S N, Mallet-Paret J, Shen W. Traveling waves in lattice dynamical systems. J Differential Equations, 1998, 149: 248–291
- 4 Huang J, Han X, Zhou S. Uniform attractors for non-autonomous Klein-Gordon-Schrödinger lattice systems. Appl Math Mech (English Ed), 2009, 30: 1597–1607
- 5 Van Vleck E, Wang B. Attractors for lattice FitzHugh-Nagumo systems. Phys D, 2005, 212: 317–336
- 6 Wang B. Dynamics of systems on infinite lattices. J Differential Equations, 2006, 221: 224–245
- 7 Wang R, Li Y. Regularity and backward compactness of attractors for non-autonomous lattice systems with random coefficients. Appl Math Comput, 2019, 354: 86–102
- 8 Bates P W, Lisei H, Lu K. Attractors for stochastic lattice dynamical systems. Stoch Dyn, 2006, 6: 1–21
- 9 Bates P W, Lu K, Wang B. Attractors of non-autonomous stochastic lattice systems in weighted spaces. Phys D, 2014, 289: 32–50
- 10 Caraballo T, Morillas F, Valero J. Attractors of stochastic lattice dynamical systems with a multiplicative noise and non-Lipschitz nonlinearities. J Differential Equations, 2012, 253: 667–693

- 11 Han X. Random attractors for stochastic sine-Gordon lattice systems with multiplicative white noise. *J Math Anal Appl*, 2011, 376: 481–493
- 12 Han X, Shen W, Zhou S. Random attractors for stochastic lattice dynamical systems in weighted spaces. *J Differential Equations*, 2011, 250: 1235–1266
- 13 Wang B. Dynamics of stochastic reaction-diffusion lattice systems driven by nonlinear noise. *J Math Anal Appl*, 2019, 477: 104–132
- 14 Wang B, Wang R. Asymptotic behavior of stochastic Schrödinger lattice systems driven by nonlinear noise. *Stoch Anal Appl*, 2020, 38: 213–237
- 15 Caraballo T, Morillas F, Valero J. On differential equations with delay in Banach spaces and attractors for retarded lattice dynamical systems. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2014, 34: 51–77
- 16 Chen T, Zhou S, Zhao C. Attractors for discrete nonlinear Schrödinger equation with delay. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2010, 26: 633–642
- 17 Han X, Kloeden P E. Non-autonomous lattice systems with switching effects and delayed recovery. *J Differential Equations*, 2016, 261: 2986–3009
- 18 Hale J K, Lunel S M V. *Introduction to Functional Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1993
- 19 Liu L, Caraballo T, Kloeden P E. The asymptotic behaviour of fractional lattice systems with variable delay. *Fract Calc Appl Anal*, 2019, 22: 681–698
- 20 Zhao C, Zhou S. Compact uniform attractors for dissipative lattice dynamical systems with delays. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2008, 21: 643–663
- 21 Butkovsky O, Scheutzow M. Invariant measures for stochastic functional differential equations. *Electron J Probab*, 2017, 22: 1–23
- 22 Schmalfuss B, Garrido-Atienza M, Caraballo T. Existence of exponentially attracting stationary solutions for delay evolution equations. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2007, 18: 271–293
- 23 Es-Sarhir A, van Gaans O, Scheutzow M. Invariant measures for stochastic functional differential equations with superlinear drift term. *Differential Integral Equations*, 2010, 23: 189–200
- 24 Garrido-Atienza M J, Ogrowsky A, Schmalfuss B. Random differential equations with random delays. *Stoch Dyn*, 2011, 11: 369–388
- 25 Liu L, Caraballo T. Analysis of a stochastic 2D-Navier-Stokes model with infinite delay. *J Dynam Differential Equations*, 2019, 31: 2249–2274
- 26 Mohammed S E A. *Stochastic Functional Differential Equations*. New York: Longman, 1986
- 27 Wang X, Lu K, Wang B. Random attractors for delay parabolic equations with additive noise and deterministic nonautonomous forcing. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2015, 14: 1018–1047
- 28 Wang X, Lu K, Wang B. Exponential stability of non-autonomous stochastic delay lattice systems with multiplicative noise. *J Dynam Differential Equations*, 2016, 28: 1309–1335
- 29 Bo L, Yuan C. Stochastic delay differential equations with jump reflection: Invariant measure. *Stochastics*, 2016, 88: 841–863
- 30 Chen L, Dong Z, Jiang J, et al. On limiting behavior of stationary measures for stochastic evolution systems with small noise intensity. *Sci China Math*, 2020, 63: 1463–1504
- 31 Scheutzow M. Exponential growth rate for a singular linear stochastic delay differential equation. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2013, 18: 1683–1696
- 32 Wu F, Yin G, Mei H. Stochastic functional differential equations with infinite delay: Existence and uniqueness of solutions, solution maps, Markov properties, and ergodicity. *J Differential Equations*, 2017, 262: 1226–1252
- 33 Chen Z, Li X, Wang B. Invariant measures of stochastic delay lattice systems. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2021, 26: 3235–3269
- 34 Mao X. *Stochastic Differential Equations and Applications*, 2nd ed. Cambridge: Woodhead Publishing, 2011
- 35 Da Prato G, Zabczyk J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992

Invariant measures of stochastic Schrödinger delay lattice systems

Zhang Chen, Bixiang Wang & Li Yang

Abstract In this paper, we investigate stochastic Schrödinger lattice systems with time delay, whose drift and diffusion coefficients are locally Lipschitz continuous. Firstly, some uniform estimates of solutions are established, which include higher-order moment estimates and uniform tail-estimates. Then the tightness of a family of probability distributions of solutions in $C([- \rho, 0]; l^2)$ is proved by the Arzelà-Ascoli theorem and the technique of diadic division. Finally, the existence of invariant measures for the Markov semigroup of the system is proved by the Krylov-Bogolyubov method.

Keywords invariant measure, stochastic discrete Schrödinger equation, nonlinear noise, delay, tail-estimate

MSC(2020) 34K50, 37L40, 37L55, 60H10

doi: 10.1360/SCM-2021-0034