基于重数延长法提升加细向量函数的逼近阶*

杨守志** 彭立中

(汕头大学数学系，汕头 515063) (LMAM, 北京大学数学科学学院，北京 100871)

摘要 基于任意给定的伸缩因子为 a 的正交多尺度函数，给出一种提升其逼近阶的算法. 设 $\Phi(x)=[\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_r(x)]^{\mathrm{T}}$ 是伸缩因子为 a, 逼近阶为 m 的正交多尺度函数，则可以构造出一个重数为 $r+s$, 逼近阶为 $m+L$ $(L\in\mathbb{Z}_+)$ 的新正交多尺度函数 $\Phi^{\mathrm{new}}(x)=[\Phi^{\mathrm{T}}(x),\phi_{r+1}(x),\phi_{r+2}(x),\cdots,\phi_{r+s}(x)]^{\mathrm{T}}$. 换言之，通过增加多尺度函数的重数提升了它的逼近阶. 另外，讨论了一个特殊情形：如果所给的正交多尺度函数 $\Phi(x)=[\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_r(x)]^{\mathrm{T}}$ 是对称的，则新构造的多尺度函数 $\Phi^{\mathrm{new}}(x)$ 不仅能提升其逼近阶，而且还保持对称性. 给出了若干构造算例.

关键词 正交 多尺度函数 逼近阶 对称性

1 引言

在小波文献中，有一些研究伸缩因子 $a>2$ 时紧支撑正交尺度函数和小波的理论. 对伸缩因子 $a>2$ 情形的研究一方面是由于 a- 通道波滤器理论的需要 (见文献 [1~4]), 另一方面是为了得到比伸缩因子 $a=2$ 更灵活的时频分析工具. 在最近几年内，多小波被广泛研究，其中对伸缩因子 $a>2$ 的多小波理论的研究尤为关注 (如文献 [5~10] 等). 在小波的应用中，多尺度函数和多小波的很多良好性质是非常需要的，如正交性、对称性和逼近阶等，有大量的文章讨论了多小波的这些性质，其中逼近阶是这些性质中最具有实际意义的性质之一 (见文献 [11~15]).

2005-02-20 收稿，2005-06-30 收修改稿

* 国家自然科学基金 (批准号：90104004, 10471002) 、国家重点基础研究发展规划 (批准号：G1999075105) 、广东省自然科学基金 (批准号：05008289, 032038) 和广东省自然科学基金博士基金 (批准号：04300917) 资助项目

** E-mail: szyang@stu.edu.cn

而提升多小波的逼近阶的方法有两尺度相似变换法 (TSTs) (如文献 [12,13]) 和提升格式 (如文献 [14,15]). 本文基于 Chui 和 Lian1) 的思想，给出一种重数延长法提升伸缩因子为 a 的正交多尺度函数逼近阶的算法. 特别地，如果所给的正交多尺度函数 $\Phi(x)$ 具有对称性，则新构造的多尺度函数 $\Phi^{\mathrm{new}}(x)$ 不仅可以提升其逼近阶，而且还能保持对称性.

2 基本概念和引理

设

$$\Phi(x)=[\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_r(x)]^{\mathrm{T}}\quad(\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_r(x)\in L^2(\mathbb{R}))$$

满足下列两尺度矩阵加细方程：

$$\Phi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}P_k\Phi(ax-k),\tag{1}$$

其中 $a\times a$ 矩阵序列 $\{P_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 称为 $\Phi(x)$ 的两尺度矩阵序列. 为了简便，也不失一般性，假设有有限个 P_k 不为零，因此所有的 $\phi_j(x)$ 都具有紧支撑性.

称一个紧支撑加细向量函数 $\Phi(x)$ 是一个正交的多尺度函数，如果它的分量的整数平移 $\{\phi_l(x-k),\ 1\leqslant l\leqslant r,\ k\in\mathbb{Z}\}$ 构成它们线性扩张子空间的正交基. $a-1$ 个 r 维向量函数

$$\Psi^\mu(x)=[\psi_1^\mu(x),\psi_2^\mu(x),\cdots,\psi_r^\mu(x)]^{\mathrm{T}}\quad(\mu=1,2,\cdots,a-1)$$

称为对应于尺度函数 $\Phi(x)$ 的正交多小波，如果

$$\{\psi_{l:j,k}^\mu(x),\ 1\leqslant l\leqslant r;\ \mu=1,2,\cdots,a-1;\ j,k\in\mathbb{Z}\}$$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交基.

定义向量值函数 $\Psi^\mu(x)$ $(1\leqslant\mu\leqslant a-1)$ 如下：

$$\Psi^\mu(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}Q_k^\mu\Phi(ax-k),\quad \mu=1,2,\cdots,a-1.\tag{2}$$

分别对 (1) 和 (2) 式两边作 Fourier 变换，得

$$\hat{\Phi}(w)=P(e^{-iw/a})\hat{\Phi}\Big(\frac{w}{a}\Big),\quad P(z)=\frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}}P_kz^k,\tag{3}$$

$$\hat{\Psi}^\mu(w)=Q^\mu(e^{-iw/a})\hat{\Phi}\left(\frac{w}{a}\right),\quad Q^\mu(z)=\frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}}Q_k^\mu z^k,\quad \mu=1,2,\cdots,a-1,\tag{4}$$

其中多项式矩阵 $P(z)$ 称为 $\Phi(x)$ 的两尺度符号，$Q^\mu(z)$ $(\mu=1,2,\cdots,a-1)$ 称为 $\Psi^\mu(x)$ $(\mu=1,2,\cdots,a-1)$ 的两尺度符号.

设 $\Phi(x)$ 是伸缩因子为 a 的正交多尺度函数，$\Psi^\mu(x)(\mu=1,2,\cdots,a-1)$ 是对应的正交多小波，$P(z)$ 和 $Q^\mu(z)$ $(\mu=1,2,\cdots,a-1)$ 为对应的两尺度符号，则

1) Chui C K, Lian J A. Construction of orthonormal multi-wavelets with additional vanishing moments. Adv in Comp Math (待发表)

$P(z)$ 和 $Q^{\mu}(z)$ 满足下列方程 (见文献 [13, 14]):

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{a-1} P(z_k)P(z_k)^* = I_{r\times r}, \\ \sum\limits_{k=0}^{a-1} P(z_k)Q^{\mu}(z_k)^* = O_{r\times r}, \quad \mu=1,2,\cdots,a-1, \\ \sum\limits_{k=0}^{a-1} Q^{\mu'}(z_k)Q^{\mu}(z_k)^* = \delta_{\mu,\mu'}I_{r\times r}, \quad \mu,\mu'=1,2,\cdots,a-1. \end{cases} \tag{5}$$

本文中，$z_k = e^{-i(w+\frac{2k\pi}{a})}$, B^* 表示矩阵 B 的共轭转置，$I_{n\times n}$ 和 $O_{n\times n}$ 分别表示 $n\times n$ 的单位矩阵和零矩阵.

引理 1 设 $\Phi(x)$ 是伸缩因子为 a 的正交多尺度函数，$\Psi^{\mu}(x)$ $(\mu=1,2,\cdots,a-1)$ 是对应的正交多小波，$P(z)$ 和 $Q^{\mu}(z)$ $(\mu=1,2,\cdots,a-1)$ 分别为多尺度函数 $\Phi(x)$ 和对应的多小波 $\Psi^{\mu}(x)$ 的两尺度符号．设 $Q_j^{\mu}(z)$ 是两尺度符号 $Q^{\mu}(z)$ 的第 j 行，则

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{a-1} P(z_k)Q_j^{\mu}(z_k)^* = O_{r\times 1}, \quad j=1,\cdots,r;\ \mu=1,\cdots,a-1, \\ \sum\limits_{k=0}^{a-1} Q_h^{\mu'}(z_k)Q_j^{\mu}(z_k)^* = \delta_{\mu,\mu'}\delta_{h,j}, \quad h,j=1,\cdots,r;\ \mu,\mu'=1,\cdots,a-1. \end{cases} \tag{6}$$

证 根据 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 的正交性得到 $P(z)$ 和 $Q^{\mu}(z)$ 满足 (5) 式．将

$$Q_j^{\mu}(z) = [Q_1^{\mu}(z)^*, Q_2^{\mu}(z)^*, \cdots, Q_r^{\mu}(z)^*]^*$$

代入到 (5) 式即可得到 (6) 式.

称矩阵 $P(1)$ 满足条件 E, 如果 1 是矩阵 $P(1)$ 的简单特征值 (重数为 1), 且它的其余特征值 λ 的模都小于 1.

重复应用 (3) 式，得到

$$\hat{\Phi}(w) = \prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-iw/a^j})\hat{\Phi}(0).$$

如果上面定义的无穷矩阵乘积 $\prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-iw/a^j})$ 收敛，则通过上式可很好地定义 $\hat{\Phi}(w)$, 且称 $\Phi(x)$ 是由两尺度矩阵符号 $P(w)$ 生成.

下面给出无穷矩阵乘积收敛的两个引理 (见文献 [16]).

引理 2 无穷矩阵乘积 $\prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-iw/a^j})$ 在紧支集上一致收敛于连续的矩阵值函数的充分必要条件是矩阵 $P(1)$ 的特征值

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s = 1, \quad s \geqslant 1,$$

且其余特征值 λ 的模都小于 1.

对连续正交加细函数而言，1 必须是矩阵 $P(1)$ 的简单特征值 (见文献 [17]), 即

引理 3 假设两尺度矩阵符号 $P(w)$ 生成的 $\Phi(x)$ 是连续的，且 $\Phi(x)$ 的整数平移构成正交系，则矩阵 $P(1)$ 满足条件 E.

3 正交多尺度函数的重数延长

本节给出构造正交多尺度函数的重数延长法，即基于任意给定伸缩因子为 a 的正交多尺度函数，通过延长其重数构造新的正交多尺度函数的方法.

设 $h_{i,j}(z)$ $(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s)$ 满足下列条件：

(i) 对任意的整数 i $(1\leqslant i\leqslant s)$, $\sum_{j=1}^{r}|h_{i,j}(z^a)|^2=C$, 其中 $0<C<1$;

(ii) 对任意的整数 i,k $(1\leqslant i<k\leqslant s)$, $\sum_{j=1}^{r}h_{i,j}(z^a)h_{k,j}(z^a)^*=0$,

定义 $s\times r$ 矩阵 $H(z)$ 为

$$H(z)=\begin{bmatrix} h_{1,1}(z^a) & h_{1,2}(z^a) & \cdots & h_{1,r}(z^a)\\ h_{2,1}(z^a) & h_{2,2}(z^a) & \cdots & h_{2,r}(z^a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ h_{s,1}(z^a) & h_{s,2}(z^a) & \cdots & h_{s,r}(z^a)\end{bmatrix}.$$

构造 $s\times r$ 矩阵 $A(z)$ 如下：

$$A(z)=H(z)Q^\mu(z)=H(z)\begin{bmatrix} Q_1^\mu(z)\\ Q_2^\mu(z)\\ \vdots\\ Q_r^\mu(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{r}h_{1,j}(z^a)Q_j^\mu(z)\\ \sum\limits_{j=1}^{r}h_{2,j}(z^a)Q_j^\mu(z)\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{r}h_{s,j}(z^a)Q_j^\mu(z)\end{bmatrix}. \tag{7}$$

引理 4 设 $\Phi(x)$ 是伸缩因子为 a 的正交多尺度函数，$\Psi^\mu(x)$ $(\mu=1,2,\cdots,a-1)$ 是对应的正交多小波，$P(z)$ 和 $Q^\mu(z)$ $(\mu=1,2,\cdots,a-1)$ 分别为尺度函数 $\Phi(x)$ 和对应的小波 $\Psi^\mu(x)$ 的两尺度矩阵符号，$A(z)$ 是 (7) 式定义的 $s\times r$ 矩阵，则

$$\sum_{k=0}^{a-1}A(z_k)A(z_k)^*=I_{s\times s}, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{a-1}P(z_k)A(z_k)^*=O_{r\times s}, \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{a-1}A(z_k)Q^\mu(z_k)^*=H(z). \tag{10}$$

证 由于

$$A(z)A(z)^*=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{r}h_{1,j}(z^a)Q_j^\mu(z)\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{r}h_{s,j}(z^a)Q_j^\mu(z)\end{bmatrix}\left[\sum_{k=1}^{r}h_{1,k}(z^a)^*Q_k^\mu(z),\cdots,\sum_{k=1}^{r}h_{s,k}(z^a)^*Q_k^\mu(z)\right]$$

$$
= \begin{bmatrix} W_{1,1} & \cdots & W_{1,s} \\ \vdots & & \vdots \\ W_{s,1} & \cdots & W_{s,s} \end{bmatrix},
$$

其中

$$
W_{n,m} = \sum_{j,k=1}^{r} h_{n,j}(z^a) h_{m,k}(z^a)^* Q_j^{\mu}(z) Q_k^{\mu}(z)^*, \quad n,m = 1,2,\cdots,s.
$$

根据 (5) 式和 $h_{i,j}(z)$ 满足的条件，得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{a-1} A(z_k)A(z_k)^* &= \mathrm{diag}\left(\sum_{j=1}^{r} |h_{1,j}(z^a)|^2, \sum_{j=1}^{r} |h_{2,j}(z^a)|^2, \cdots, \sum_{j=1}^{r} |h_{s,j}(z^a)|^2\right) \\
&= CI_{s\times s}.
\end{aligned}
$$

上式意味着 (8) 式成立. 应用引理 1, (9) 和 (10) 式可以类似地证明.

定理 1　假设 $s\times s$ 矩阵 $B(z)$ 满足条件

$$
\sum_{k=0}^{a-1} B(z_k)B(z_k)^* = (1-C)I_{s\times s}, \quad 0<C<1,
$$

定义矩阵

$$
P^{\mathrm{new}}(z) = \begin{bmatrix} P(z) & O \\ A(z) & B(z) \end{bmatrix}, \tag{11}
$$

则在引理 4 的条件下，成立

$$
\sum_{k=0}^{a-1} P^{\mathrm{new}}(z_k) P^{\mathrm{new}}(z_k)^* = I_{(r+s)\times(r+s)}. \tag{12}
$$

证　根据引理 4, 得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{a-1} P^{\mathrm{new}}(z_k) P^{\mathrm{new}}(z_k)^* \\
= &\sum_{k=0}^{a-1} \begin{bmatrix} P(z_k) & 0 \\ A(z_k) & B(z_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(z_k)^* & A(z_k)^* \\ 0 & B(z_k)^* \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{a-1} P(z_k)P(z_k)^* & \sum_{k=0}^{a-1} P(z_k)A(z_k)^* \\ \sum_{k=0}^{a-1} A(z_k)P(z_k)^* & \sum_{k=0}^{a-1} [A(z_k)A(z_k)^* + B(z_k)B(z_k)^*] \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times s} \\ O_{s\times r} & I_{s\times s} \end{bmatrix} = I_{(r+s)\times(r+s)}.
\end{aligned}
$$

定理 2 假设矩阵 $B(1)$ 的所有特征值的模都小于 1, 如果矩阵 $P(1)$ 满足条件 E, 则 (11) 式定义的矩阵 $P^{\rm new}(1)$ 也满足条件 E.

由文献 [17] 知，无穷乘积 $\prod_{j=1}^{\infty} P^{\rm new}(e^{-iw/2^j})$ 收敛，因此新的重数为 $r+s$ 的正交尺度函数 $\Phi^{\rm new}(x)$ 可通过它的 Fourier 变换很好地定义，即

$$\begin{aligned}&\hat{\Phi}^{\rm new}(w)\\&=[\hat{\phi}_1(w),\cdots,\hat{\phi}_r(w),\hat{\phi}_{r+1}(w),\cdots,\hat{\phi}_{r+s}(w)]^{\rm T}\\&=\begin{bmatrix} P(e^{-iw/a}) & 0\\ A(e^{-iw/a}) & B(e^{-iw/a})\end{bmatrix}\left[\hat{\phi}_1\left(\frac{w}{a}\right),\cdots,\hat{\phi}_r\left(\frac{w}{a}\right),\hat{\phi}_{r+1}\left(\frac{w}{a}\right),\cdots,\hat{\phi}_{r+s}\left(\frac{w}{a}\right)\right]^{\rm T}.\end{aligned}$$

显然新的尺度函数

$$\begin{aligned}\Phi^{\rm new}(x)&=[\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_r(x),\phi_{r+1}(x),\phi_{r+2}(x),\cdots,\phi_{r+s}(x)]^{\rm T}\\&=[\Phi(x)^{\rm T},\phi_{r+1}(x),\phi_{r+2}(x),\cdots,\phi_{r+s}(x)]^{\rm T},\end{aligned}$$

即 $\Phi^{\rm new}(x)$ 是原尺度函数 $\Phi(x)$ 的延长.

基于上面的讨论，得到下面的构造定理：

定理 3 设 $\Phi(x)$ 是伸缩因子为 a 的正交多尺度函数，$\Psi^{\mu}(x)(\mu=1,2,\cdots,a-1)$ 是对应的正交多小波，$P(z)$ 和 $Q^{\mu}(z)$ $(\mu=1,2,\cdots,a-1)$ 分别为多尺度函数 $\Phi(x)$ 和其对应的多小波 $\Psi^{\mu}(x)$ 的两尺度矩阵符号，则在定理 1 和 2 的条件下，存在 s 个函数 $\phi_{r+1}(x),\phi_{r+2}(x),\cdots,\phi_{r+s}(x)$, 使得

$$\Phi^{\rm new}(x)=[\Phi^{\rm T}(x),\phi_{r+1}(x),\phi_{r+2}(x),\cdots,\phi_{r+s}(x)]^{\rm T}$$

构成一个新的重数为 $r+s$ 的正交多尺度函数，其对应的两尺度矩阵符号为 (11) 式定义的矩阵 $P^{\rm new}(z)$.

4 逼近阶的提升

称多尺度函数 $\Phi(x)$ 具有 m 逼近阶 $(m\geqslant 1)$, 如果最多存在 m 个向量 $\{\mathbf{y}^l\}_{l=0}^{m-1}\subset\mathbb{R}^{1\times r}$, 且 $\mathbf{y}^0\neq O_{1\times r}$, 使得对所有 $l=0,1,\cdots,m-1$ 和 $h=0,1,\cdots,a-1$ 有下式成立：

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-i)^{l-k}a^k\mathbf{y}^kD^{l-k}P(e^{-2\pi hi/a})=\delta_{0,h}\mathbf{y}^l, \tag{13}$$

其中 D 表示微分算子.

(13) 式等价于

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k a^{-k}\mathbf{y}^{l-k}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(aj+h)^kP_{aj+h}=\frac{1}{a^l}\mathbf{y}^l,\quad h=0,1,\cdots,a-1. \tag{14}$$

关于逼近阶的详细内容可以见文献 [12~15]. 众所周知，如果多尺度函数有 m 逼近阶，则其对应的多小波具有 m 阶消失矩.

本节讨论第 3 节中构造出的新的正交多尺度函数的逼近阶．设

$$\begin{cases} b_u(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j^u z^j = \dfrac{1}{a^m}\left(\dfrac{1+z+\cdots+z^{a-1}}{a}\right)^{n_u} h_u(z), \\ h_u(1) = 1, \end{cases} \tag{15}$$

其中 $u = 1, 2, \cdots, s,\ n_u \in \mathbb{Z}_+$. 利用 (15) 式定义的 $b_u(z)$ 构造 $s\times s$ 对角矩阵

$$B(z) = \mathrm{diag}\,[b_1(z), b_2(z), \cdots, b_s(z)], \tag{16}$$

则有下面的引理：

引理 5　设 $\{b_j^u\}$ 是 (15) 式定义的 $b_u(z)$ 的符号对应的序列，则

$$a^{m+1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_{aj}^u = a^{m+1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_{aj+1}^u = \cdots = a^{m+1} b_{aj+a-1}^u = 1, \quad u = 1, 2, \cdots, s,$$

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (aj)^k b_{aj}^u &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (aj+1)^k b_{aj+1}^u = \cdots \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (aj+a-1)^k b_{aj+a-1}^u, \quad k = 1, 2, \cdots, n_u - 1. \end{aligned}$$

更进一步地，假设

$$B(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} B_j z^j, \quad L = \min\{n_1, n_2, \cdots, n_s\},$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (aj)^k B_{aj} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (aj+1)^k B_{aj+1} = \cdots \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (aj+a-1)^k B_{aj+a-1}, \quad k = 1, 2, \cdots, L - 1. \end{aligned}$$

引理 6　如果所有的 $b_u(z)$ $(u = 1, 2, \cdots, s)$ 都满足

$$\sum_{k=0}^{a-1} b_u(z_k) b_u(z_k)^* = \frac{1}{a^{2m}},$$

则

$$\sum_{k=0}^{a-1} B(z_k) B(z_k)^* = \left[1 - \frac{a^{2m}-1}{a^{2m}}\right] I_{s\times s}. \tag{17}$$

定理 4　设

$$\Phi(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_r(x)]^{\mathrm{T}}$$

是具有 m 逼近阶的正交多尺度函数，对应的两尺度符号为 $P(z)$; $\Psi^\mu(x)$ $(\mu = 1, 2, \cdots, a-1)$ 是对应的 $a-1$ 个正交多小波，$Q^\mu(z)$ $(\mu = 1, 2, \cdots, a-1)$ 分别为对应的两尺度矩阵符号．假设 (16) 式定义的矩阵 $B(z)$ 满足 (17) 式，(7) 式定义的矩阵 $A(z)$ 满足

$$\sum_{k=0}^{a-1} A(z_k) A(z_k)^* = \frac{a^{2m}-1}{a^{2m}},$$

则 (11) 式定义的两尺度矩阵符号 $P^{\rm new}(z)$ 可生成新的正交多尺度函数

$$\Phi^{\rm new}(x)=[\Phi^{\rm T}(x),\phi_{r+1}(x),\cdots,\phi_{r+s}(x)]^{\rm T},$$

且 $\Phi^{\rm new}(x)$ 具有 $m+L$ 逼近阶.

证 由定理 3 可知 $P^{\rm new}(z)$ 可生成一个新的正交多尺度函数 $\Phi^{\rm new}(x)$. 由于 $\Phi(x)$ 的逼近阶为 m, 所以必存在 m 个向量 $\mathbf{y}^l\in\mathbb{R}^r$ $(l=0,1,\cdots,m-1)$, 且 $\mathbf{y}^0\neq O_{1\times r}$, 使得对于 $h=0,1,\cdots,a-1$, 成立

$$\mathbf{y}^l\left(\sum_{j\in Z}P_{aj+h}-\frac{1}{a^l}I_{r\times r}\right)=-\sum_{k=0}^{l-1}\binom{l}{k}\frac{(-1)^{l-k}}{a^{l-k}}\mathbf{y}^k\sum_{j\in Z}(aj+h)^{l-k}P_{aj+h}. \tag{18}$$

下面仅需证明新的正交多尺度函数 $\Phi^{\rm new}(x)$ 具有 $m+L$ 逼近阶，即寻找 $m+L$ 个向量 $\mathbf{w}^l\in\mathbb{R}^{r+s}$, $l=0,1,\cdots,m+L-1$, 且 $\mathbf{w}^0\neq O_{1\times(r+s)}$, 使得有下式成立即可：

$$\begin{aligned}&\mathbf{w}^l\left(\begin{bmatrix}\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}P_{aj+h} & O_{r\times s}\\ \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}A_{aj+h} & \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}B_{aj+h}\end{bmatrix}-\frac{1}{a^l}I_{(r+s)\times(r+s)}\right)\\ &=-\sum_{k=0}^{l-1}\binom{l}{k}\frac{(-1)^{l-k}}{a^{l-k}}\mathbf{w}^k\begin{bmatrix}\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}(aj+h)^{l-k}P_{aj+h} & O_{r\times s}\\ \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}(aj+h)^kA_{aj+h} & \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}(aj+h)^kB_{aj+h}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{19}$$

显然

$$\mathbf{w}^l=[\mathbf{y}^l,0,0,\cdots,0]\in\mathbb{R}^{r+s}\quad(l=0,1,\cdots,m-1)$$

满足 (19) 式，因此将其作为满足 (19) 式的前 m 个向量. 余下的 L 个向量记为

$$\mathbf{w}^{m+l}=[\mathbf{y}^{m+l},c_{m+l}^1,c_{m+l}^2,\cdots,c_{m+l}^s],\quad l=0,1,\cdots,L-1.$$

显然向量 $\mathbf{w}^m$ 必须满足

$$\sum_{j=1}^s|c_m^j|\neq0.$$

事实上，如果所有的 $c_m^j=0$, 则

$$\mathbf{w}^m=[\mathbf{y}^m,0,0,\cdots,0],$$

这意味着 $\Phi(x)$ 的逼近阶为 $m+1$, 与条件相矛盾. 为了叙述的方便，对所有的

$$l=0,1,\cdots,m-1,m,\cdots,m+L-1$$

都用

$$\mathbf{w}^l=[\mathbf{y}^l,c_l^1,c_l^2,\cdots,c_l^s]$$

表示，则对于 $j=1,2,\cdots,s$ 和 $l=0,1,\cdots,m-1$ 有 $c_l^j=0$, 因此 (19) 式等价于下面两式：

$$\begin{aligned}&\mathbf{y}^l\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}P_{aj+h}-\frac{1}{a^l}I_{r\times r}\right)+[c_l^1,c_l^2,\cdots,c_l^s]\sum_{j\in Z}A_{aj+h}\\&=-\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(-1)^{l-k}}{a^{l-k}}\binom{l}{k}\left[\mathbf{y}^k\sum_{j\in\mathbb{Z}}(aj+h)^{l-k}P_{aj+h}+[c_k^1,c_k^2,\cdots,c_k^s]\sum_{j\in\mathbb{Z}}(aj)^{l-k}A_{aj+h}\right],\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}&[c_l^1,c_l^2,\cdots,c_l^s]\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}}B_{aj+h}-\frac{1}{a^l}I_{s\times s}\right]\\&=-\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(-1)^{l-k}}{a^{l-k}}\binom{l}{k}[c_k^1,c_k^2,\cdots,c_k^s]\sum_{j\in\mathbb{Z}}(aj+h)^{l-k}B_{aj+h}.\end{aligned}\tag{21}$$

由于对 $j=1,2,\cdots,s$ 和 $l=0,1,\cdots,m-1$ 都有 $c_l^j=0$, 故可重写 (21) 式为下面两式：

$$[c_m^1,c_m^2,\cdots,c_m^s]\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}}B_{aj+h}-\frac{1}{a^m}I_{s\times s}\right]=O_{s\times s},\tag{22}$$

$$\begin{aligned}&[c_{m+l}^1,c_{m+l}^2,\cdots,c_{m+l}^s]\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}}B_{aj+h}-\frac{1}{a^{m+l}}I_{s\times s}\right]\\&=-\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(-1)^{l-k}}{a^{l-k}}\binom{m+l}{l-k}[c_{m+k}^1,c_{m+k}^2,\cdots,c_{m+k}^s]\sum_{j\in\mathbb{Z}}(aj+h)^{l-k}B_{aj+h},\\&\qquad l=1,2,\cdots,L-1.\end{aligned}\tag{23}$$

由引理 5 知

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}B_{aj+h}=\frac{1}{a^m}I_{s\times s},$$

因此有

$$\sum_{j\in Z}B_{aj+h}-\frac{1}{a^{m+l}}I_{s\times s}=\frac{a^l-1}{a^{m+l}}I_{s\times s}.$$

所以

$$\begin{aligned}&[c_{m+l}^1,c_{m+l}^2,\cdots,c_{m+l}^s]\\&=-\frac{a^m}{a^l-1}\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^{l-k}a^k\binom{m+l}{l-k}[c_{m+k}^1,c_{m+k}^2,\cdots,c_{m+k}^s]\sum_{j\in Z}(aj+h)^{l-k}B_{aj+h},\\&\qquad l=1,2,\cdots,L-1.\end{aligned}\tag{24}$$

任取

$$[c_m^1,c_m^2,\cdots,c_m^s]\neq O_{1\times s},$$

根据 (24) 式可以求出

$$[c^1_{m+l}, c^2_{m+l}, \cdots, c^s_{m+l}], \quad l = 1, 2, \cdots, L-1.$$

再应用 (20) 式，求出对应的 $\mathbf{y}^{m+l}$, 即得到余下的 $L-1$ 个向量

$$\mathbf{w}^{m+l} = [\mathbf{y}^{m+l}, c^1_{m+l}, c^2_{m+l}, \cdots, c^s_{m+l}] \quad (l = 1, 2, \cdots, L-1),$$

从而证明了 $\Phi^{\text{new}}(x)$ 具有 $m+L$ 逼近阶.

注 当 h $(h \in \{0, 1, \cdots, a-1\})$ 取不同的值时，对于同一个 $[c^1_m, c^2_m, \cdots, c^s_m]$ 而言，引理 5 可以保证 (24) 式求出的 $[c^1_{m+l}, c^2_{m+l}, \cdots, c^s_{m+l}]$ $(l = 1, 2, \cdots, L-1)$ 是相同的.

5 对称性的保持

本文简称多尺度函数或多小波是对称的，如果多尺度函数或多小波的所有分量要么是对称的，要么是反对称的．由文献 [7,10,13], 得

引理 7 设 $\Phi(x)$ 是伸缩因子为 a 的正交多尺度函数，$\Psi^\mu(x)$ $(\mu = 1, 2, \cdots, a-1)$ 是对应的正交多小波, $P(z)$ 和 $Q^\mu(z)$ $(\mu = 1, 2, \cdots, a-1)$ 分别为多尺度函数 $\Phi(x)$ 和其对应的多小波 $\Psi^\mu(x)$ 的两尺度矩阵符号, 则 $\Phi(x)$ 和 $\Psi^\mu(x)$ $(\mu = 1, 2, \cdots, a-1)$ 是对称的充分必要条件是

$$S_{0,r} P(z) S_{0,r} = D_{0,r}(z^a) \overline{P(z)} D_{0,r}(\overline{z}), \tag{25}$$

$$S_{\mu,r} Q^\mu(z) S_{0,r} = D_{\mu,r}(z^a) \overline{Q^\mu(z)} D_{0,r}(\overline{z}), \quad \mu = 1, 2, \cdots, a-1, \quad |z| = 1, \tag{26}$$

其中

$$S_{\mu,r} = \text{diag}[(-1)^{k^\mu_1}, \cdots, (-1)^{k^\mu_r}],$$

$$D_{\mu,r}(z) = \text{diag}[z^{a^\mu_1 + b^\mu_1}, z^{a^\mu_2 + b^\mu_2}, \cdots, z^{a^\mu_r + b^\mu_r}],$$

$\mu = 0, 1, \cdots, a-1$, k^μ_l 等于 0 或 1. 当 k^μ_l 等于 0 时表明 $\Phi(x)$ 或 $\Psi^\mu(x)$ 的对应的分量是对称的，当 k^μ_l 等于 1 时表明 $\Phi(x)$ 或 $\Psi^\mu(x)$ 的对应的分量是反对称的，且每个分量的支撑区间为

$$\text{supp}\, \phi_l(x) = [a^0_l, b^0_l], \quad \text{supp}\, \psi^\mu(x) = [a^\mu_l, b^\mu_l], \quad l = 1, 2, \cdots, r.$$

定理 5 设多尺度函数 $\Phi(x)$ 和对应的多小波 $\Psi^\mu(x)$ $(\mu = 1, 2, \cdots a-1)$ 都是对称的,

$$D_s(z) = \text{diag}[z^{c_1}, z^{c_2}, \cdots, z^{c_s}],$$

$$S_s = \text{diag}[(-1)^{\lambda_1}, (-1)^{\lambda_2}, \cdots, (-1)^{\lambda_s}],$$

其中 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, s)$ 要么等于 0, 要么等于 1. 如果下列两式成立:

$$S_s A(z) S_{0,r} = D_s(z^a) \overline{A(z)} D_{0,r}(\overline{z}), \tag{27}$$

$$S_s B(z) S_s = D_s(z^a) \overline{B(z)} D_s(\overline{z}), \tag{28}$$

则在定理 4 的条件下，由两尺度符号 $P^{\rm new}(z)$ 生成的正交多尺度函数的逼近阶被提升，同时还保持原有的对称性.

证　由于 $\Phi(x)$ 和 $\Psi^{\mu}(x)$ $(\mu=1,2,\cdots,a-1)$ 是对称的，所以存在 $S_{\mu,r}$, $D_{\mu,r}(z)$ $(\mu=0,1,\cdots,a-1)$, 使得 (25) 和 (26) 式成立．再应用 (27) 和 (28) 式，可以推出

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} S_{0,r} & O \\ O & S_s \end{bmatrix} P^{\rm new}(z) \begin{bmatrix} S_{0,r} & O \\ O & S_s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} S_{0,r} & O \\ O & S_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(z) & O \\ A(z) & B(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{0,r} & O \\ O & S_s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} S_{0,r}P(z)S_{0,r} & O \\ S_sA(z)S_{0,r} & S_sB(z)S_s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} D_{0,r}(z^a)\overline{P(z)}D_{0,r}(\overline{z}) & O \\ D_s(z^a)\overline{A(z)}D_{0,r}(\overline{z}) & D_s(z^a)\overline{B(z)}D_s(\overline{z}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} D_{0,r}(z^a) & O \\ O & D_s(z^a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{P(z)} & O \\ \overline{A(z)} & \overline{B(z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{0,r}(\overline{z}) & O \\ O & D_s(\overline{z}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} D_{0,r}(z^a) & O \\ O & D_s(z^a) \end{bmatrix} \overline{P^{\rm new}(z)} \begin{bmatrix} D_{0,r}(\overline{z}) & O \\ O & D_s(\overline{z}) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

因此根据引理 7 知，$\Phi^{\rm new}(x)$ 保持原有的对称性.

6　构造算例

例 1 ($r=2,\ s=1$ 和 $a=2$ 的情形：逼近阶从 2 提升到 4)　设

$$\Phi(x)=[\phi_1(x),\phi_2(x)]^{\rm T}$$

是一个逼近阶为 2 (即 $m=2$) 的正交多尺度函数，满足下列方程 [18]:

$$\Phi(x)=P_0\Phi(2x)+P_1\Phi(2x-1)+P_2\Phi(2x-2),$$

其中

$$P_0=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2+\sqrt{7}}{4} \\ 0 & \dfrac{2-\sqrt{7}}{4} \end{bmatrix},\quad P_1=\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix} \dfrac{2-\sqrt{7}}{4} & 0 \\ \dfrac{2+\sqrt{7}}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

对应的正交多小波 $\Psi(x)$ 满足的方程为

$$\Psi(x)=Q_0\Phi(2x)+Q_1\Phi(2x-1)+Q_2\Phi(2x-2),$$

其中

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{2+\sqrt{7}}{4} & -\dfrac{2-\sqrt{7}}{4} \\ -\dfrac{2-\sqrt{7}}{4} & -\dfrac{2+\sqrt{7}}{4} \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{bmatrix},$$

因此

$$P(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{6}z + \dfrac{2-\sqrt{7}}{8}z^2 & \dfrac{2+\sqrt{7}}{8} + \dfrac{1}{8}z \\ \dfrac{1}{8}z + \dfrac{2+\sqrt{7}}{8}z^2 & \dfrac{2-\sqrt{7}}{8} + \dfrac{3}{8}z \end{bmatrix},$$

$$Q(z) = \begin{bmatrix} -\dfrac{2+\sqrt{7}}{8}z + \dfrac{1}{8}z^2 & \dfrac{3}{8} - \dfrac{2-\sqrt{7}}{8}z \\ -\dfrac{2-\sqrt{7}}{8}z + \dfrac{3}{8}z^2 & \dfrac{1}{8} - \dfrac{2+\sqrt{7}}{8}z \end{bmatrix}.$$

取

$$B(z) = \left[\frac{1+z}{2}\right]^2 \frac{(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})z}{8},$$

$$A(z) = \frac{\sqrt{15}}{4}Q^2(z) = \frac{\sqrt{15}}{4}\Big[-\frac{2-\sqrt{7}}{4}z + \frac{3}{4}z^2, \ \frac{1}{4} - \frac{2+\sqrt{7}}{4}z\Big],$$

容易验证

$$B(z)B(z)^* + B(-z)B(-z)^* = 1 - \frac{a^{2m}-1}{a^{2m}} = 1 - \frac{15}{16},$$

$$A(z)A(z)^* + A(-z)A(-z)^* = \frac{a^{2m}-1}{a^{2m}} = \frac{15}{16}.$$

根据 (11) 式，可以构造

$$P^{\text{new}}(z) = \begin{bmatrix} \frac{3}{8}z + \frac{2-\sqrt{7}}{8}z^2 & \frac{2+\sqrt{7}}{8} + \frac{1}{8}z & 0 \\ \frac{1}{8}z + \frac{2+\sqrt{7}}{8}z^2 & \frac{2-\sqrt{7}}{8} + \frac{3}{8}z & 0 \\ -\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{105}}{16}z + \frac{3\sqrt{15}}{16}z^2 & \frac{\sqrt{15}}{16} - \frac{2\sqrt{15}+\sqrt{105}}{16}z & \left[\frac{1+z}{2}\right]^2 \frac{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})z}{8} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

再根据定理 3, (29) 式定义的两尺度符号 $P^{\text{new}}(z)$ 可以生成新的正交多尺度函数

$$\Phi^{\text{new}}(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)]^{\mathrm{T}}.$$

更进一步，由定理 4 知 $\Phi^{\text{new}}(x)$ 的逼近阶为 4, 换言之，$\Phi(x)$ 的逼近阶从 2 提升到 4.

例 2 ($r = 1, \ s = 1$ 和 $a = 3$ 的情形：逼近阶从 1 提升到 2 并保持对称性) 设 $\phi_1(x)$ 是一个伸缩因子为 3, 逼近阶为 2 (即 $m = 2$) 的正交尺度函数，满足方

程 [19]

$$\phi_1(x) = \frac{2-\sqrt{6}}{4}\phi_1(3x) + \frac{1}{2}\phi_1(3x-1) + \frac{2+\sqrt{6}}{4}\phi_1(3x-2) + \frac{2+\sqrt{6}}{4}\phi_1(3x-3) + \frac{1}{2}\phi_1(3x-4) + \frac{2-\sqrt{6}}{4}\phi_1(3x-5),$$

对应的两个正交小波 $\psi^1(x)$ 和 $\psi^2(x)$ 满足的方程为

$$\psi^1(x) = -\frac{2-\sqrt{6}}{4}\phi(3x) - \frac{1}{2}\phi(3x-1) - \frac{2+\sqrt{6}}{4}\phi(2x-2) + \frac{2+\sqrt{6}}{4}\phi(3x-3) + \frac{1}{2}\phi(3x-4) + \frac{2-\sqrt{6}}{4}\phi(3x-5),$$

$$\psi^2(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\phi(3x) + \sqrt{2}\phi(3x-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\phi(3x-3).$$

设 $\phi_1(x)$, $\psi^1(x)$ 和 $\psi^2(x)$ 的两尺度符号分别为 $P(z)$, $Q^1(z)$ 和 $Q^2(z)$. 取

$$A(z) = \frac{2\sqrt{2}}{3}Q^1(z), \quad B(z) = \frac{1}{3}\Big[\frac{1+z+z^2}{3}\Big].$$

容易验证

$$\sum_{k=0}^{2} A(z_k)A(z_k)^* = \frac{8}{9}, \quad \sum_{k=0}^{2} B(z_k)B(z_k)^* = 1 - \frac{8}{9}.$$

构造矩阵

$$P^{\rm new}(z) = \begin{bmatrix} P(z) & 0 \\ A(z) & B(z) \end{bmatrix}.$$

由定理 3 和 4 知，$P^{\rm new}(z)$ 生成一个伸缩因子为 3 的 2 重正交多尺度函数

$$\Phi^{\rm new}(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x)]^{\rm T},$$

其逼近阶由原来的 1 提升到 2, 但 $\Phi^{\rm new}(x)$ 不再具有对称性.

但如果取

$$A(z) = \frac{2\sqrt{2}}{3}zQ^2(z), \quad B(z) = \frac{1}{3}P(z),$$

则 $A(z)$ 和 $B(z)$ 满足定理 5 中的 (27) 和 (28) 式，其中

$$S_1 = S_{0,1} = 1, \quad D_1(z) = D_{0,1}(z) = z^{5/2}.$$

类似地可以验证 $A(z)$ 和 $B(z)$ 满足定理 4 和 5 的其他条件．构造

$$P^{\rm new}(z) = \begin{bmatrix} P(z) & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}zQ^2(z) & \frac{1}{3}P(z) \end{bmatrix},$$

由定理 4 和 5 知，如此定义的 $P^{\rm new}(z)$ 生成的正交多尺度函数 $\Phi^{\rm new}(x)$ 不仅可以提升逼近阶 (从 1 阶提升到 2 阶), 而且还保持对称性.

致谢　作者感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参　考　文　献

1 Vetterli M. Perfect reconstruction FIR filter banks: Some properties and factorization. IEEE Trans Acoust Speech Signal Process, 1989, 37: 1057～1071

2 Jia R Q, Zhou D X. Convergence of subdivision schemes associated with nonnegative masks. SIAM J Matrix Anal Appl, 1999, 21: 418～430

3 Han B, Jia R Q. Multivariate refinement equations and convergence of subdivision schemes. SIAM J Math Anal, 1998, 29: 1177～1199

4 Han B. Vector cascade algorithms and refinable function vectors in Sobolev spaces. J Approx Theory, 2003, 124: 44～88

5 Han B, Mo Q. Multiwavelet frames from refinable function vectors. Adv Comp Math, 2003, 18: 211～245

6 Zhou D X. Interpolatory orthogonal multiwavelets and refinable functions. IEEE Trans Signal Processing, 2002, 50: 520～527

7 Chui C K, Lian J A. A study on orthonormal multiwavelets. J Appl Numer Math, 1996, 20: 273～298

8 杨守志，程正兴．[0,1] 区间上的多小波基．数学学报，2002, 45: 789～796

9 Yang S Z, Cheng Z X, Wang H Y. Construction of biorthogonal multiwavelets. J Math Anal Appl, 2002, 276: 1～12

10 Yang S Z. A fast algorithm for constructing orthogonal multiwavelets. ANZIAM Journal, 2004, 46: 185～202

11 Lian J A. On the order of polynomial reproduction for multi-scaling functions. Appl Comp Harm Anal, 1996, 3: 358～365

12 Plonka G. Approximation order provided by refinable function vectors. Constr Approx, 1997, 13: 221～244

13 Plonka G, Strela V. Construction of multiscaling functions with approximation and symmetry. SIAM J Math Anal Appl, 1998, 29: 481～510

14 Li H G, Wang Q, Wu L N. A novel design of lifting scheme from general wavelet. IEEE Trans Signal Process, 2001, 49: 1714～1717

15 Fritz K. Raising multiwavelet approximation order through lifting. SIAM J Math Anal, 2001, 32: 1032～1049

16 He W J, Lai M J. Construction of bivariate compactly supported biorthogonal box spline wavelets with arbitrarily high regularities. Appl Comput Harmon Anal, 1999, 6: 53～74

17 Cabrelli C, Heil C, Molter U. Accuracy of lattice translates of several multidimensional refinable functions. J Approx Theory, 1996, 95: 5～52

18 Strela V, Heller P N, Strang G, et al. The application of multiwavelet filterbanks to image processing. IEEE Trans Image Process, 1999, 8: 548～563

19 彭立中，王永革．3 带正交小波系统的参数化和代数结构．中国科学，A 辑，2001, 31: 602～614