



矩相关保费原理中风险保费的经验厘定

章溢^{1*}, 李志龙¹, 温利民²

1. 江西财经大学统计学院, 南昌 330013;

2. 江西师范大学数学与信息科学学院, 南昌 330022

E-mail: yizi85820@163.com, zhilongli77@sohu.com, wlmjxnu@163.com

收稿日期: 2017-07-16; 接受日期: 2018-04-21; 网络出版日期: 2019-04-16; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 71761019 和 11561026)、江西省自然科学基金 (批准号: 20171ACB21022) 和江西省人文社科基金 (批准号: 15WTTZD10) 资助项目

摘要 在传统的 Bühlmann 信度理论中, 信度估计仅仅适合净保费原理, 并且很难直接推广到更一般的保费原理中. 本文根据随机变量的矩母函数定义一种统一的保费原理—矩相关保费原理, 进而, 将信度理论的思想运用于估计风险随机变量的矩母函数, 给出矩相关保费原理中风险保费的经验厘定估计, 并证明估计的统计性质. 结果表明, 在净保费原理和指数保费原理中, 已有的信度估计是本文估计的特殊情形; 在方差保费原理中, 本文得到的估计要优于已有的信度估计. 最后, 通过数值模拟的方法验证新的信度估计的相合性和渐近正态性, 并在小样本条件下比较本文估计与已有估计的均方误差.

关键词 矩相关保费原理 信度估计 强相合性 渐近正态性 经验 Bayes 估计

MSC (2010) 主题分类 91B30, 62P05

1 引言

信度理论, 也称为保费的经验厘定, 是精算师通过综合运用风险的先验信息和索赔信息对保费进行估计并校正的定价方法. 在经典的信度理论中, 信度估计常常表达为个体保费和聚合保费加权平均, 其中权重称为信度因子. 由于信度估计形式简单, 容易执行且易于解释, 因而被广泛运用于汽车损失保险、责任保险、责任准备评估等非寿险精算领域. 现代的“无分布”信度理论可追溯到 Bühlmann^[1]. 对信度理论的详细介绍, 可参见文献 [2–5].

根据破产理论^[6,7], 若保险公司仅仅收取保单的净保费, 则保险人必将破产. 从风险度量的角度来看, 由于不满足保费原理的非负安全负荷性, 净保费原理在实际中不能被运用. 因此, 各种保费原理下风险保费的经验厘定研究成为信度理论的热门领域, Bühlmann^[7] 研究了方差保费原理中近似信度估计问题, 而 Gerber^[8] 将平方损失函数修改为指数加权损失函数, 给出了 Esscher 保费原理下的信度估计. 然而, 文献 [9] 证明了 Gerber- 型信度保费并不满足统计中的重要性质—相合性, 提出了

英文引用格式: Zhang Y, Li Z L, Wen L M. Experience rating of risk premium for moment-related premium principle (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1041–1062, doi: 10.1360/SCM-2017-0466

Esscher 保费原理下新的信度估计, 并证明了新的信度估计满足相合性. 文献 [10,11] 利用类似的方法研究了广义加权保费和指数保费原理中风险保费的信度估计问题. 然而, 由于大部分保费原理并不是通过损失函数来定义的, 因而文献 [8–11] 通过修改损失函数的方法并不适用于更一般的保费原理. 另一方面, 从文献 [8–11] 给出的信度估计来看, 他们给出的信度估计具有较为复杂的形式, 其中包含的未知结构参数难以估计.

注意到, 风险 X 的保费原理实际上是风险的分布函数 $F_X(x)$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个泛函, 而随机变量的分布函数又与矩母函数相互唯一决定. 从非寿险精算中常用的保费原理的定义来看, 有很大一部分保费原理是通过风险的矩母函数定义的. 因此, 本文根据随机变量的矩母函数定义一种新的保费原理—矩相关保费原理. 矩相关保费原理包括了非寿险精算中大部分常用的保费原理, 如净保费原理、期望值原理、方差保费原理、标准差保费原理、修改方差保费原理、Esscher 保费原理和指数保费原理等. 进而, 通过将传统的信度理论方法运用于矩母函数的估计, 得到矩相关保费原理中风险保费的信度估计. 在保单组合的风险模型中, 我们运用经验 Bayes 方法得到结构参数的估计, 给出矩相关保费原理中风险保费的经验 Bayes 估计.

本文余下内容安排如下: 第 2 节介绍矩相关保费原理的概念和性质; 第 3 节给出矩相关保费原理的信度估计, 并证明信度估计的相合性和渐近正态性; 第 4 节给出结构参数的估计及其统计性质; 第 5 节利用数值模拟的方法验证信度估计的大样本性质, 并在净保费原理、方差保费原理、Esscher 保费原理和指数保费原理中比较本文提出的信度估计与已有的信度估计的均方误差; 最后一节对全文进行了总结, 提出今后进一步的研究方向.

2 矩相关保费原理的概念和性质

风险的本质就是不确定性. 关于风险不确定性研究可参见文献 [12–15]. 显然, 随机变量是描述风险的最佳工具. 设 χ 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的非负随机变量集合, 则保费原理 $H(X)$ 实际上就是从 χ 到 $\mathbb{R}_+$ 的一个泛函. 关于保费原理的详细介绍, 可参见文献 [16].

对某个风险 X , 定义 $\Phi(t) = E(e^{Xt})$, 称为风险随机变量 X 的矩母函数. 注意到随机变量的矩很容易通过矩母函数得到, 例如,

$$E(X) = \Phi'(0), \quad \text{Var}(X) = \Phi''(0) - [\Phi'(0)]^2, \quad E(e^{\alpha X}) = \Phi(\alpha), \quad E(Xe^{\alpha X}) = \Phi'(\alpha). \quad (2.1)$$

而非寿险精算中的大部分保费原理都可以通过风险随机变量的矩来表出, 例如下面的一些保费原理:

(1) 期望值原理:

$$H_1(X) = (1 + \alpha)E(X) = (1 + \alpha)\Phi'(0),$$

当 $\alpha = 0$ 时退化为净保费原理;

(2) 方差原理:

$$H_2(X) = E(X) + \alpha \text{Var}(X) = \Phi'(0) + \alpha[\Phi''(0) - (\Phi'(0))^2];$$

(3) 修正方差原理:

$$H_3(X) = E(X) + \alpha \frac{\text{Var}(X)}{E(X)} = \Phi'(0) + \alpha \frac{\Phi''(0) - (\Phi'(0))^2}{\Phi'(0)};$$

(4) 标准差原理:

$$H_4(X) = E(X) + \alpha\sqrt{\text{Var}(X)} = \Phi'(0) + \alpha\sqrt{\Phi''(0) - (\Phi'(0))^2};$$

(5) Esscher 保费原理:

$$H_5(X) = \frac{E(Xe^{\alpha X})}{E(e^{\alpha X})} = \frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)};$$

(6) 指数保费原理:

$$H_6(X) = \frac{1}{\alpha} \log(E(e^{\alpha X})) = \frac{1}{\alpha} \log(\Phi(\alpha)).$$

在上面的保费原理中, 参数 $\alpha > 0$ 一般为已知的安全负荷系数, α 的大小衡量了保险人对待风险的态度.

受此启发, 我们综合以上几种保费原理, 定义一类新的保费原理—矩相关保费原理.

定义 2.1 对风险随机变量 $X \in \chi$ 及常数 $\alpha > 0$, 定义矩相关保费原理为

$$H(X) = g(\Phi'(0), \Phi''(0), \Phi(\alpha), \Phi'(\alpha)), \quad (2.2)$$

其中 g 为某个已知的多元连续函数.

显然, 上面提到的 6 种保费原理都可以通过取不同的函数 g 得到. 另外, 如果令 $g(x, y, z, w) = x + \alpha h(y - x^2)$, 其中 $h(x)$ 为一元连续函数, 这时有

$$H(X) = \Phi'(0) + \alpha h(\Phi''(0) - (\Phi'(0))^2) = E(X) + \alpha h(\text{Var}(X)). \quad (2.3)$$

保费原理 (2.3) 首次由 Guerra 和 Centeno^[17] 提出, 称为方差相关保费原理, 可参见文献 [18, 19].

3 风险保费的信度估计

类似于经典的信度理论, 假设某个保单组合包含 K 个保单, 每个保单具有表征该风险特征的风险参数 θ_i . 由于风险的非齐次性, 风险参数 θ_i 为随机变量, 具有相同的先验分布 $\pi(\theta)$. 另外, 对保单合同 i , 假设已经有 n_i 年的损失样本 $(X_{ij}, j = 1, 2, \dots, n_i)$, 其中 $i = 1, 2, \dots, K$. 我们给出下面的假设.

假设 3.1 给定 θ_i , 假设 $X_{i1}, \dots, X_{i,n_i}, X_{i,n_i+1}, \dots$ 相互独立同分布, 其共同的条件分布函数和条件矩母函数分别为

$$F(x; \theta_i) = \Pr(X_{ij} \leq x \mid \theta_i), \quad \Phi(t; \theta_i) = E(e^{tX_{ij}} \mid \theta_i),$$

其中 $X_i^T = (X_{i1}, \dots, X_{i,n_i})$ 为第 i 份保单的索赔纪录, 这里上标 T 表示向量的转置. X_{i,n_i+1} 为第 i 份保单在未来年的可能损失, 其中 $i = 1, 2, \dots, K$.

假设 3.2 风险参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$ 是相互独立的随机变量, 具有相同的先验分布 $\pi(\theta)$.

由假设 3.1 和 3.2 可知 $(\theta_1, X_1^T), \dots, (\theta_K, X_K^T)$ 相互独立. 记

$$\Phi'(0; \theta_i) = \left. \frac{\partial \Phi(t; \theta_i)}{\partial t} \right|_{t=0}, \quad \Phi''(0; \theta_i) = \left. \frac{\partial^2 \Phi(t; \theta_i)}{\partial t^2} \right|_{t=0}, \quad \Phi'(\alpha; \theta_i) = \left. \frac{\partial \Phi(t; \theta_i)}{\partial t} \right|_{t=\alpha}.$$

根据矩母函数与矩的关系, 得到

$$E(X_{i,n_i+1} \mid \theta_i) = \Phi'(0; \theta_i), \quad \text{Var}(X_{i,n_i+1} \mid \theta_i) = \Phi''(0; \theta_i) - [\Phi'(0; \theta_i)]^2$$

以及

$$E(\exp(\alpha X_{i,n_i+1}) | \theta_i) = \Phi(\alpha; \theta_i), \quad E(X_{i,n_i+1} \exp(\alpha X_{i,n_i+1}) | \theta_i) = \Phi'(\alpha; \theta_i).$$

在矩相关保费原理中, 未来风险 X_{i,n_i+1} 的条件保费为

$$H(X_{i,n_i+1}; \theta_i) = g(\Phi'(0; \theta_i), \Phi''(0; \theta_i), \Phi(\alpha; \theta_i), \Phi'(\alpha; \theta_i)).$$

由于 $H(X_{i,n_i+1}; \theta_i)$ 仅仅依赖于风险参数 θ_i , 我们简单记为 $R(\theta_i)$, 即

$$R(\theta_i) = g(\Phi'(0; \theta_i), \Phi''(0; \theta_i), \Phi(\alpha; \theta_i), \Phi'(\alpha; \theta_i)), \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (3.1)$$

注意到 $R(\theta_i)$ 实际上就是保单 i 的在未来年的保费. 由于 θ_i 是不可观测的随机变量, 因而, $R(\theta_i)$ 也是未知且不可观测的, 需要通过已有的信息来估计. 在信度理论中称 $R(\theta_i)$ 为保单 i 的风险保费 (参见文献 [5]).

我们的目标就是通过 K 个保单的样本数据 $\underline{X}_{nK} = (X_1^T, X_2^T, \dots, X_K^T)^T$ 去估计或预测矩相关保费原理中的风险保费 $R(\theta_i)$. 从风险保费的定义来看, 如果能得到条件矩母函数 $\Phi(t; \theta_i)$ 的合适估计 $\hat{\Phi}(t; \theta_i)$, 则可以通过“代入”准则得到 $R(\theta_i)$ 的估计, 即有

$$\widehat{R(\theta_i)} = g(\hat{\Phi}'(0; \theta_i), \hat{\Phi}''(0; \theta_i), \hat{\Phi}(\alpha; \theta_i), \hat{\Phi}'(\alpha; \theta_i)).$$

注意到 $\Phi(t; \theta_i) = E(e^{tX_{ij}} | \theta_i)$, 在模型假设 3.1 和 3.2 条件下, 为了构建合适的估计 $\hat{\Phi}(t; \theta_i)$, 我们利用信度理论的思想, 将 $\Phi(t; \theta_i)$ 的估计限定在某种估计类中, 通过最小化决策风险函数得到该估计类中 $\Phi(t; \theta_i)$ 的最优估计.

根据矩母函数的定义和性质, 记

$$\Pi = \left\{ \beta_0 + \sum_{s=1}^K \sum_{j=1}^{n_s} \beta_{sj} e^{X_{sj}t}, \beta_0, \beta_{sj} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3.2)$$

求解下面的最优化问题:

$$\min_{h \in \Pi} E \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) (\Phi(t; \theta_i) - h)^2 dt \right] = \min_{\beta_0, \beta_{sj} \in \mathbb{R}} E \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) \left(\Phi(t; \theta_i) - \beta_0 - \sum_{s=1}^K \sum_{j=1}^{n_s} \beta_{sj} e^{X_{sj}t} \right)^2 dt \right], \quad (3.3)$$

其中 $\beta_0, \beta_{sj} \in \mathbb{R}$, 而 $\omega(t) \geq 0$ 为已知的权重函数.

为了解 (3.3), 我们给出下面的引理, 类似的结论可参见文献 [20–22].

引理 3.1 设 $Y(t), X_1(t), \dots, X_n(t)$ 为随机序列, 且记 $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))^T$, 而 $A = (a_1, \dots, a_n)$ 为非随机向量, 则当

$$\begin{cases} \hat{A} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t) \text{Cov}(Y(t), X(t)) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t) \text{Var}(X(t)) dt \right)^{-1}, \\ \hat{a}_0 = E[Y(t)] - \hat{A}E[X(t)] \end{cases}$$

时, 积分加权期望平方损失

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t) E \left(Y(t) - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i X_i(t) \right)^2 dt \quad (3.4)$$

达到最小.

证明 注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y(t) - a_0 - AX(t))^2 &= \text{Var}(Y(t) - AX(t)) + [\mathbf{E}(Y(t)) - a_0 - \mathbf{E}AX(t)]^2 \\ &\geq \text{Var}(Y(t) - AX(t)), \end{aligned}$$

则 a_0 的最优选取应使得 $\mathbf{E}(Y(t)) - a_0 - \mathbf{E}AX(t) = 0$, 即有

$$\hat{a}_0 = \mathbf{E}[Y(t)] - \mathbf{E}AX(t). \quad (3.5)$$

将之代入 (3.4), 则最小化问题 (3.4) 转化为

$$\min_{A \in \mathbb{R}^n} \Omega = \min_{A \in \mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \mathbf{E}[(Y(t) - \mathbf{E}(Y(t))) - A(X(t) - \mathbf{E}(X(t)))]^2 dt. \quad (3.6)$$

对 Ω 关于向量 A 求导, 并令导数为零, 得到下面的方程:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} w(t) \mathbf{E}[(Y(t) - \mathbf{E}(Y(t))) - A(X(t) - \mathbf{E}(X(t)))](X(t) - \mathbf{E}(X(t))) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t) [\text{Cov}(Y(t), X(t)) - A \text{Var}(X(t))] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

容易得到向量 A 的最优解为

$$\hat{A} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t) \text{Cov}(Y(t), X(t)) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t) \text{Var}(X(t)) dt \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

将 (3.7) 代入 (3.5) 得到 $\hat{a}_0 = \mathbf{E}[Y(t)] - \hat{A} \mathbf{E}[X(t)]$. 因此完成了引理的证明. $\square$

类似于经典的信度理论^[5], 我们称 (3.4) 的最优解为随机变量 $Y(t)$ 在 $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))^T$ 生成的线性空间上的正交投影.

记 $Y_{sj}(t) = e^{tX_{sj}}$, $Y_s(t) = (Y_{s1}(t), \dots, Y_{sn_s}(t))^T$, $Y(t) = (Y_1^T(t), Y_2^T(t), \dots, Y_K^T(t))^T$, 其中 $s = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, n_s$.

根据假设 3.1 和 3.2 可知, $Y_1^T(t), Y_2^T(t), \dots, Y_K^T(t)$ 相互独立. 由引理 3.1 可知, 通过求解 (3.3) 得到的条件矩母函数 $\Phi(t; \theta_i)$ 的最优估计为

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(t; \theta_i) &= \mathbf{E}[\Phi(t; \theta_i)] + \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t) \text{Cov}(\Phi(t; \theta_i), Y_i(t)) dt \right) \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t) \text{Var}(Y_i(t)) dt \right)^{-1} [Y_i(t) - \mathbf{E}(Y_i(t))]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

为了简化 $\hat{\Phi}(t; \theta_i)$ 的表达, 引入下面的记号:

$$\mathbf{E}[\Phi(t; \theta_i)] = \Phi_0(t), \quad \text{Var}(\Phi(t; \theta_i)) = \tau^2(t),$$

以及

$$\text{Var}(e^{tX_{ij}} | \theta_i) = \sigma^2(t; \theta_i), \quad \mathbf{E}[\sigma^2(t; \theta_i)] = \sigma^2(t).$$

引理 3.2 在假设 3.1 和 3.2 的条件下, 得到

(1) 随机向量 $Y_i(t)$ 的数学期望为

$$E[Y_i(t)] = \Phi_0(t)\mathbf{1}_{n_i}, \quad (3.9)$$

其中 $\mathbf{1}_{n_i}$ 是分量全为 1 的 n_i 维向量.

(2) $\Phi(t; \theta_i)$ 与 $Y_i(t)$ 的协方差为

$$\text{Cov}(\Phi(t; \theta_i), Y_i(t)) = \tau^2(t)\mathbf{1}_{n_i}^T. \quad (3.10)$$

(3) 随机向量 $Y_i(t)$ 的协方差矩阵为

$$\text{Var}(Y_i(t)) = (\mathbf{1}_{n_i}\mathbf{1}_{n_i}^T)\tau^2(t) + I_{n_i}\sigma^2(t), \quad (3.11)$$

其中 I_{n_i} 是维数为 n_i 的单位矩阵.

(4) 随机向量 $Y_i(t)$ 的协方差矩阵的逆矩阵为

$$[\text{Var}(Y_i(t))]^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(t)} \left(I_{n_i} - \frac{\tau^2(t)}{\sigma^2(t) + n_i\tau^2(t)} \mathbf{1}_{n_i}\mathbf{1}_{n_i}^T \right). \quad (3.12)$$

证明 首先, 根据双重期望公式容易得到 $E(Y_{sj}(t)) = E[E(Y_{sj}(t) | \theta)] = \Phi_0(t)$, 因此, (3.9) 成立. 其次, 注意到

$$\text{Cov}(\Phi(t; \theta_i), Y_{ij}(t)) = \text{Cov}(\Phi(t; \theta_i), E(Y_{ij}(t) | \theta)) = \tau^2(t),$$

因此有 $\text{Cov}(\Phi(t; \theta_i), Y_i(t)) = \mathbf{1}_{n_i}^T \tau^2(t)$. 再次, 根据

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_{ik}(t), Y_{ij}(t)) &= E[\text{Cov}(Y_{ik}(t), Y_{ij}(t) | \theta)] + \text{Cov}(E(Y_{ik}(t) | \theta), E(Y_{ij}(t) | \theta)) \\ &= \begin{cases} \tau^2(t), & k \neq j, \\ \tau^2(t) + \sigma^2(t), & k = j, \end{cases} \end{aligned}$$

可得到

$$\text{Var}(Y_i(t)) = (\mathbf{1}_{n_i}\mathbf{1}_{n_i}^T)\tau^2(t) + I_{n_i}\sigma^2(t).$$

为了证明 (3.12), 注意到矩阵求逆公式

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}, \quad (3.13)$$

因此有

$$((\mathbf{1}_{n_i}\mathbf{1}_{n_i}^T)\tau^2(t) + I_{n_i}\sigma^2(t))^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(t)} \left(I_{n_i} - \frac{\tau^2(t)}{\sigma^2(t) + n_i\tau^2(t)} \mathbf{1}_{n_i}\mathbf{1}_{n_i}^T \right).$$

得到 (3.12). □

根据引理 3.2 以及 (3.8), 我们得到下面的定理.

定理 3.1 在假设 3.1 和 3.2 成立时, 通过求解最优化问题 (3.3) 得到条件矩母函数 $\Phi(t; \theta_i)$ 的最优估计为

$$\hat{\Phi}(t; \theta_i) = Z_i\Phi_i(t) + (1 - Z_i)\Phi_0(t), \quad (3.14)$$

其中 $\Phi_i(t) := \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} e^{tX_{ij}}$ 为第 i 份保单样本产生的经验矩母函数, 而

$$Z_i = \frac{n_i \tau^2}{n_i \tau^2 + \sigma^2} \quad (3.15)$$

为权重函数, 这里

$$\tau^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) \tau^2(t) dt, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) \sigma^2(t) dt.$$

证明 根据引理 3.2, 容易得到

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t) \text{Cov}(\Phi(t; \theta_i), Y_i(t)) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t) \text{Var}(Y_i(t)) dt \right)^{-1} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t) \tau^2(t) \mathbf{1}_{n_i}^T dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t) [(\mathbf{1}_{n_i} \mathbf{1}_{n_i}^T) \tau^2(t) + I_{n_i} \sigma^2(t)] dt \right)^{-1} \\ &= \tau^2 \mathbf{1}_{n_i}^T ((\mathbf{1}_{n_r} \mathbf{1}_{n_r}^T) \tau^2 + I_{n_r} \sigma^2)^{-1} \\ &= \frac{\tau^2}{\sigma^2} \mathbf{1}_{n_i}^T \left(I_{n_i} - \frac{\tau^2 (\mathbf{1}_{n_i} \mathbf{1}_{n_i}^T)}{\sigma^2 + n_i \tau^2} \right) \\ &= \frac{\tau^2 \mathbf{1}_{n_i}^T}{\sigma^2 + n_i \tau^2}. \end{aligned}$$

因此, 由 (3.8) 得到

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(t; \theta_i) &= \Phi_0(t) + \frac{\tau^2 \mathbf{1}_{n_i}^T}{\sigma^2 + n_i \tau^2} [Y_i(t) - \Phi_0(t) \mathbf{1}_{n_i}] \\ &= \Phi_0(t) + \frac{\tau^2}{\sigma^2 + n_i \tau^2} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij}(t) - \Phi_0(t)) \\ &= \Phi_0(t) + \frac{n_i \tau^2}{\sigma^2 + n_i \tau^2} (\Phi_i(t) - \Phi_0(t)) \\ &= Z_i \Phi_i(t) + (1 - Z_i) \Phi_0(t). \end{aligned}$$

证毕. □

注 3.1 与文献 [22] 类似, 我们都假设结构参数 $\sigma^2(t)$ 与 $\tau^2(t)$ 对任意 t 存在且有限. 然而, 在实际中有可能出现 $\sigma^2(t)$ 与 $\tau^2(t)$ 取值无穷的情形. 事实上, 本文得到的关于矩母函数的信度估计所有结论稍加修改后可推广到特征函数的信度估计问题. 与矩母函数不同的是, 随机变量的特征函数 $\phi_X(t) = E(e^{itX})$ 对任意 t 都是存在的, 因此, 结构参数 $\sigma^2(t)$ 与 $\tau^2(t)$ 也是对任意 t 存在的.

根据定理 3.1, 估计 $\hat{\Phi}(t; \theta_i)$ 恰好是第 i 份保单样本的经验矩母函数 $\Phi_i(t)$ 和聚合矩母函数 $\Phi_0(t)$ 的加权和. 这个结论类似于经典的 Bühlmann 信度估计 (参见文献 [5]). 因此也称 $\hat{\Phi}(t; \theta_i)$ 为信度估计, 而将权重 Z_i 称为信度因子. 对信度因子 Z_i , 显然有 $0 \leq Z_i \leq 1$, 且当 $n_i \rightarrow \infty$ 时有 $Z_i \rightarrow 1$; 当 $n_i \rightarrow 0$ 时有 $Z_i \rightarrow 0$. 这也说明定理 3.1 得到的信度估计满足传统的信度理论解释: 样本数据越多, 则在经验矩母函数 $\Phi_i(t)$ 上分配的权重越大, 反之亦然.

为了得到风险保费 $R(\theta_i)$ 的估计, 记 $E(X_{ij}^k | \theta_i) = \mu_k(\theta_i)$, $E(X_{ij} e^{\alpha X_{ij}} | \theta_i) = \gamma(\alpha; \theta_i)$ 以及

$$E[\mu_k(\theta_i)] = \mu_k, \quad E[\gamma(\alpha; \theta_i)] = \gamma(\alpha), \quad k = 1, 2.$$

另外, 引入下面的记号:

$$\overline{X_i^1} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad \overline{X_i^2} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2, \quad \overline{\gamma_i}(\alpha) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} e^{\alpha X_{ij}},$$

则风险保费 $R(\theta_i)$ 可以表达为

$$R(\theta_i) = g(\mu_1(\theta_i), \mu_2(\theta_i), \Phi(\alpha; \theta_i), \gamma(\alpha; \theta_i)).$$

得到下面的命题.

命题 3.1 在矩相关保费原理中, 基于矩母函数信度估计 $\widehat{\Phi}(t; \theta_i)$ 得到风险保费 $R(\theta_i)$ 的信度估计为

$$\widehat{R(\theta_i)} = g(\widehat{\mu_1(\theta_i)}, \widehat{\mu_2(\theta_i)}, \widehat{\Phi}(\alpha; \theta_i), \widehat{\gamma}(\alpha; \theta_i)), \quad (3.16)$$

其中

$$\widehat{\mu_1(\theta_i)} = Z_i \overline{X_i^1} + (1 - Z_i) \mu_1, \quad \widehat{\mu_2(\theta_i)} = Z_i \overline{X_i^2} + (1 - Z_i) \mu_2 \quad (3.17)$$

以及

$$\widehat{\Phi}(\alpha; \theta_i) = Z_i \Phi_i(\alpha) + (1 - Z_i) \Phi_0(\alpha), \quad \widehat{\gamma}(\alpha; \theta_i) = Z_i \overline{\gamma_i}(\alpha) + (1 - Z_i) \gamma(\alpha). \quad (3.18)$$

证明 注意到

$$\left. \frac{\partial \Phi_i(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \overline{X_i^1}, \quad \left. \frac{\partial^2 \Phi_i(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \overline{X_i^2}, \quad \left. \frac{\partial \Phi_i(t)}{\partial t} \right|_{t=\alpha} = \overline{\gamma_i}(\alpha)$$

以及

$$\left. \frac{\partial \Phi_0(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \mu_1, \quad \left. \frac{\partial^2 \Phi_0(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \mu_2, \quad \left. \frac{\partial \Phi_0(t)}{\partial t} \right|_{t=\alpha} = \gamma(\alpha).$$

通过“代入”原则, 容易得到 (3.16). $\square$

根据 g 的具体不同表达式, 可得到第 2 节中提到的 6 种保费原理中相应风险保费的信度估计, 叙述为下面的推论.

推论 3.1 在期望值保费原理、方差保费原理、修正方差保费原理、标准差保费原理、Esscher 保费原理和指数保费原理中, 第 i 份保单的风险保费及其信度估计分别具有以下表达式:

(1) 期望值原理中风险保费为 $R_1(\theta_i) = (1 + \alpha)\mu_1(\theta_i)$, 其信度估计为

$$\widehat{R_1(\theta_i)} = (1 + \alpha)[Z_i \overline{X_i^1} + (1 - Z_i) \mu_1]. \quad (3.19)$$

当 $\alpha = 0$ 时即为净保费下的信度估计, 参见文献 [1].

(2) 方差保费原理中风险保费为 $R_2(\theta_i) = \mu_1(\theta_i) + \alpha[\mu_2(\theta_i) - (\mu_1(\theta_i))^2]$, 相应的信度估计为

$$\widehat{R_2(\theta_i)} = Z_i \overline{X_i^1} + (1 - Z_i) \mu_1 + \alpha[Z_i \overline{X_i^2} + (1 - Z_i) \mu_2 - (Z_i \overline{X_i^1} + (1 - Z_i) \mu_1)^2]. \quad (3.20)$$

(3) 修正方差原理中风险保费为 $R_3(\theta_i) = \mu_1(\theta_i) + \alpha \frac{\mu_2(\theta_i) - (\mu_1(\theta_i))^2}{\mu_1(\theta_i)}$, 其信度估计为

$$\widehat{R_3(\theta_i)} = Z_i \overline{X_i^1} + (1 - Z_i) \mu_1 + \frac{\alpha[Z_i \overline{X_i^2} + (1 - Z_i) \mu_2 - (Z_i \overline{X_i^1} + (1 - Z_i) \mu_1)^2]}{Z_i \overline{X_i^1} + (1 - Z_i) \mu_1}. \quad (3.21)$$

(4) 标准差保费原理中风险保费为 $R_4(\theta_i) = \mu_1(\theta_i) + \alpha\sqrt{\mu_2(\theta_i) - (\mu_1(\theta_i))^2}$, 相应的信度估计为

$$\widehat{R_4(\theta_i)} = Z_i \overline{X_i^1} + (1 - Z_i)\mu_1 + \alpha\sqrt{Z_i \overline{X_i^2} + (1 - Z_i)\mu_2 - (Z_i \overline{X_i^1} + (1 - Z_i)\mu_1)^2}.$$

(5) Esscher 保费原理中风险保费为 $R_5(\theta_i) = \frac{\gamma(\alpha; \theta_i)}{\Phi(\alpha; \theta_i)}$, 其信度估计为

$$\widehat{R_5(\theta_i)} = \frac{Z_i \bar{\gamma}_i(\alpha) + (1 - Z_i)\gamma(\alpha)}{Z_i \Phi_i(\alpha) + (1 - Z_i)\Phi_0(\alpha)}. \quad (3.22)$$

(6) 指数保费原理中风险保费为 $R_6(\theta_i) = \frac{1}{\alpha} \log(\Phi(\alpha; \theta_i))$, 相应的信度估计如下:

$$\widehat{R_6(\theta_i)} = \frac{1}{\alpha} \log(Z_i \Phi_i(\alpha) + (1 - Z_i)\Phi_0(\alpha)). \quad (3.23)$$

对固定的 i , 若 $n_i \rightarrow \infty$, 则 $Z_i \rightarrow 1$. 根据强大数定律^[23] 得到

$$\overline{X_i^1} \rightarrow \mu_1(\theta_i), \quad \overline{X_i^2} \rightarrow \mu_2(\theta_i), \quad \text{a.s.},$$

以及

$$\Phi_i(t) \rightarrow \Phi(t; \theta_i), \quad \bar{\gamma}_i(\alpha) \rightarrow \gamma(\alpha; \theta_i), \quad \text{a.s.},$$

因此,

$$\widehat{\Phi}(t; \theta_i) \rightarrow \Phi(t; \theta_i), \quad \text{a.s.}$$

根据连续性定理, 有

$$\widehat{R(\theta_i)} \rightarrow g(\mu_1(\theta_i), \mu_2(\theta_i), \Phi(\alpha; \theta_i), \gamma(\alpha; \theta_i)) = R(\theta_i), \quad \text{a.s.}$$

因此证明了 $\widehat{\Phi}(t; \theta_i)$ 和 $\widehat{R(\theta_i)}$ 都是强相合估计.

定理 3.2 对给定的 t , 若 $n_i \rightarrow \infty$, 则信度估计 $\widehat{\Phi}(t; \theta_i)$ 是渐近正态估计, 即有

$$\frac{\sqrt{n_i}(\widehat{\Phi}(t; \theta_i) - \Phi(t; \theta_i))}{\sigma(t; \theta_i)} \rightarrow N(0, 1), \quad \text{当 } n_i \rightarrow \infty \text{ 时},$$

其中 $N(0, 1)$ 表示标准正态分布的随机变量.

证明 根据中心极限定理, 得到

$$\sqrt{n_i}(\Phi_i(t) - \Phi(t; \theta_i)) \rightarrow N(0, \sigma^2(t; \theta_i)).$$

进而, 有

$$\sqrt{n_i}(\widehat{\Phi}(t; \theta_i) - \Phi(t; \theta_i)) - \sqrt{n_i}(\Phi_i(t) - \Phi(t; \theta_i)) = \frac{\sqrt{n_i}\sigma^2}{n_i\tau^2 + \sigma^2}(\Phi_0(t) - \Phi_i(t)) \rightarrow 0.$$

根据 Slutsky 定理^[23], 得到

$$\sqrt{n_i}(\widehat{\Phi}(t; \theta_i) - \Phi(t; \theta_i)) \rightarrow N(0, \sigma^2(t; \theta_i)),$$

因此有

$$\frac{\sqrt{n_i}(\widehat{\Phi}(t; \theta_i) - \Phi(t; \theta_i))}{\sigma(t; \theta_i)} \rightarrow N(0, 1).$$

用类似的方法, 容易验证 $\widehat{\mu_1(\theta_i)}$ 、 $\widehat{\mu_2(\theta_i)}$ 和 $\widehat{\gamma}(\alpha; \theta_i)$ 都具有渐近正态性, 其渐近方差分别为 $\text{Var}(X_{ij} | \theta_i)$ 、 $\text{Var}(X_{ij}^2 | \theta_i)$ 和 $\text{Var}(X_{ij}e^{\alpha X_{ij}} | \theta_i)$. 再根据 Cramér 定理^[23], 容易验证风险保费 $\widehat{R(\theta_i)}$ 是渐近正态估计. $\square$

4 结构参数的估计

在实际运用中, 我们发现信度估计 $\widehat{\Phi}(t; \theta_i)$ 和 $\widehat{R}(\theta_i)$ 中仍然包含一些未知的参数, 如 $\tau^2(t)$ 、 $\sigma^2(t)$ 和 $\Phi_0(t)$. 这些参数依赖于先验分布 $\pi(\theta)$, 在非寿险精算中常称为结构参数, 在 Bayes 统计中称为超参数. 在实际运用中, 由于先验分布 $\pi(\theta)$ 常常是未知的, 因此, 结构参数也是未知的. 为了使得信度估计 $\widehat{\Phi}(t; \theta_i)$ 和 $\widehat{R}(\theta_i)$ 能直接运用, 我们需要对这些结构参数进行估计.

注意到 $E[\Phi_i(t)] = \Phi_0(t)$, 即所有的经验矩母函数 $\Phi_1(t), \dots, \Phi_K(t)$ 都是 $\Phi_0(t)$ 的无偏估计. 因此, 任何下面的加权组合:

$$\widehat{\Phi_0(t)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^K w_i} \sum_{i=1}^K w_i \Phi_i(t)$$

都是 $\Phi_0(t)$ 的无偏估计. 在实际中, 为了简化, 常取每份保单的样本容量作为权重, 即 $w_i = n_i$, 因此得到 $\Phi_0(t)$ 的一个无偏估计为

$$\widehat{\Phi_0(t)}^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^K n_i} \sum_{i=1}^K n_i \Phi_i(t). \quad (4.1)$$

当条件

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{n_K^2}{(\sum_{i=1}^K n_i)^2} < \infty \quad (4.2)$$

满足时, 根据独立不同分布的强大数定律容易验证 $\widehat{\Phi_0(t)}^* \rightarrow \Phi_0(t)$, 即 $\widehat{\Phi_0(t)}^*$ 是 $\Phi_0(t)$ 的强相合估计.

在下面的部分, 我们将给出结构参数 $\sigma^2(t)$ 和 $\tau^2(t)$ 的合适估计.

命题 4.1 结构参数 $\sigma^2(t)$ 的一个无偏估计为

$$\widehat{\sigma^2(t)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^K (n_i - 1)} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} (e^{tX_{ij}} - \Phi_i(t))^2. \quad (4.3)$$

进而, 当 $K \rightarrow \infty$ 且满足条件 (4.2) 时, $\widehat{\sigma^2(t)} \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2(t)$, 即 $\widehat{\sigma^2(t)}$ 是 $\sigma^2(t)$ 的强相合估计.

证明 为了简化表达式, 临时省略变量 t 并记

$$Y_{ij} = e^{tX_{ij}}, \quad Y_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{in_i})^T, \quad \bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_i$$

以及

$$\bar{Y}_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, K,$$

则有

$$E(Y_i) = \Phi_0(t)\mathbf{1}, \quad \text{Var}(Y_i) = \sigma^2(t)I + \tau^2(t)\mathbf{1}\mathbf{1}^T,$$

其中 I 为单位矩阵, 而 $\mathbf{1}$ 为分量全为 1 的向量, 均具有合适的维数. 注意到

$$S_i^2 \triangleq \sum_{j=1}^{n_i} (e^{tX_{ij}} - \Phi_i(t))^2 = Y_i^T \left(I - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n_i} \right) Y_i,$$

则有

$$\begin{aligned}
 E(S_i^2) &= E\left[\text{trace}\left[Y_i^T\left(I - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n_i}\right)Y_i\right]\right] \\
 &= \text{trace}\left[\left(I - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n_i}\right)E(Y_i Y_i^T)\right] \\
 &= \text{trace}\left[\left(I - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n_i}\right)\text{Var}(Y_i) + E(Y_i)E(Y_i^T)\right] \\
 &= \sigma^2(t)\text{trace}\left(I - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n_i}\right) + (\tau^2(t) + \Phi_0(t))\left[\left(I - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n_i}\right)\mathbf{1}\mathbf{1}^T\right] \\
 &= (n_i - 1)\sigma^2(t),
 \end{aligned}$$

其中 trace 表示矩阵的迹. 这时有

$$E[\widehat{\sigma^2(t)}] = \frac{1}{\sum_{i=1}^K (n_i - 1)} \sum_{i=1}^K (n_i - 1)\sigma^2(t) = \sigma^2(t).$$

因此证明了估计 $\widehat{\sigma^2(t)}$ 的无偏性. 下面将证明 $\widehat{\sigma^2(t)}$ 的相合性. 由于

$$\begin{aligned}
 E[S_i^4] &= E\left[\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 (Y_{ik} - \bar{Y}_i)^2\right] \\
 &\leq E\left[\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} (Y_{ij}^2 + \bar{Y}_i^2)(Y_{ik}^2 + \bar{Y}_i^2)\right] \\
 &= E\left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij}^2 + \bar{Y}_i^2)\right)^2\right] \\
 &\leq E[(2n_i \bar{Y}_i^2)^2] \\
 &= 4n_i^2 [E(\bar{Y}_i^2)^2 + \text{Var}(\bar{Y}_i^2)] \\
 &= 4n_i^2 \left[(\Phi_0(2t))^2 + \frac{\sigma^2(2t)}{n_i} + \tau^2(2t)\right] \\
 &\leq 4n_i^2 [(\Phi_0(2t))^2 + \sigma^2(2t) + \tau^2(2t)],
 \end{aligned}$$

由条件 (4.2) 可得

$$\begin{aligned}
 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(S_K^2)}{(\sum_{i=1}^K (n_i - 1))^2} &\leq \sum_{K=1}^{\infty} \frac{E[S_K^4]}{(\sum_{i=1}^K (n_i - 1))^2} \\
 &\leq \sum_{K=1}^{\infty} \frac{4[(\Phi_0(2t))^2 + \sigma^2(2t) + \tau^2(2t)]n_K^2}{(\sum_{i=1}^K (n_i - 1))^2} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

根据 Kolmogorov 独立不同分布的强大数定律可知, $\widehat{\sigma^2(t)} \rightarrow \sigma^2(t)$, a.s. □

命题 4.2 结构参数 $\tau^2(t)$ 的一个无偏估计为

$$\widehat{\tau^2(t)} = \frac{\sum_{i=1}^K n_i}{(\sum_{i=1}^K n_i)^2 - \sum_{i=1}^K n_i^2} \left[\sum_{i=1}^K n_i (\Phi_i(t) - \widehat{\Phi_0(t)})^2 - (K-1)\widehat{\sigma^2(t)} \right], \quad (4.4)$$

即 $E(\widehat{\tau^2(t)}) = \tau^2(t)$. 进而, 当 $K \rightarrow \infty$ 时, 若满足条件 (4.2), 则有 $\widehat{\tau^2(t)} \rightarrow \tau^2(t)$, a.s.

证明 为了符号的方便, 记 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_K)^T$,

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_K)', \quad \mathbf{N} = \text{diag}(n_1, n_2, \dots, n_K),$$

其中 $\text{diag}(n_1, n_2, \dots, n_K)$ 表示以 $n_1, n_2, \dots, n_K$ 为对角元素的对角矩阵, 则根据方差的双重期望公式得到

$$\text{Var}(\bar{Y}_i) = \text{Var}\left(\frac{\mathbf{1}^T \mathbf{Y}_i}{n_i}\right) = n_i^{-2} \mathbf{1}^T (\sigma^2(t)I + \tau^2(t)\mathbf{1}\mathbf{1}^T) \mathbf{1} = \frac{\sigma^2(t)}{n_i} + \tau^2(t).$$

因此有

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = \Phi_0(t)\mathbf{1}, \quad \text{Var}(\mathbf{Y}) = \sigma^2(t)\mathbf{N}^{-1} + \tau^2(t)I.$$

引入下面的符号:

$$T = \sum_{i=1}^K n_i (\Phi_i(t) - \widehat{\Phi_0(t)})^2 = \sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i^2 - \frac{[\sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i]^2}{\sum_{i=1}^K n_i}. \quad (4.5)$$

注意到 T 可以表达为向量形式:

$$T = \mathbf{Y}^T \left(\mathbf{N} - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{\mathbf{1}^T \mathbf{n}} \right) \mathbf{Y}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= \mathbb{E} \left[\text{trace} \left(\mathbf{Y}^T \left(\mathbf{N} - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{\mathbf{1}^T \mathbf{n}} \right) \mathbf{Y} \right) \right] \\ &= \text{trace} \left(\mathbb{E}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T) \left(\mathbf{N} - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{\mathbf{1}^T \mathbf{n}} \right) \right) \\ &= [\Phi_0(t)]^2 \text{trace} \left[\mathbf{1}\mathbf{1}^T \left(\mathbf{N} - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{\mathbf{1}^T \mathbf{n}} \right) \right] + \text{trace} \left[(\sigma^2(t)\mathbf{N}^{-1} + \tau^2(t)I) \left(\mathbf{N} - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{\mathbf{1}^T \mathbf{n}} \right) \right] \\ &= \sigma^2(t) \text{trace} \left[\mathbf{N}^{-1} \left(\mathbf{N} - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{\mathbf{1}^T \mathbf{n}} \right) \right] + \tau^2(t) \text{trace} \left[\left(\mathbf{N} - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{\mathbf{1}^T \mathbf{n}} \right) \right] \\ &= (K-1)\sigma^2(t) + \frac{(\sum_{i=1}^K n_i)^2 - \sum_{i=1}^K n_i^2}{\sum_{i=1}^K n_i} \tau^2(t). \end{aligned}$$

这即证明了估计 $\widehat{\tau^2(t)}$ 的无偏性. 又因为

$$\bar{Y}_i^2 - \bar{Y}_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i) \geq 0, \quad \text{Var}(\bar{Y}_i^2) = \frac{\sigma^2(2t)}{n_i} + \tau^2(2t) \leq \sigma^2(2t) + \tau^2(2t),$$

所以,

$$\text{Var}(\Phi_i^2(t)) \leq \mathbb{E}[(\bar{Y}_i^2)^2] \leq \mathbb{E}[(\bar{Y}_i^2)^2] \leq [\Phi_0(2t)]^2 + \sigma^2(2t) + \tau^2(2t). \quad (4.6)$$

根据 (4.2), 有

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{n_K^2 \text{Var}(\Phi_K^2(t))}{(\sum_{i=1}^K n_i)^2} \leq \sum_{K=1}^{\infty} \frac{n_K^2 ((\Phi_0(2t))^2 + \sigma^2(2t) + \tau^2(2t))}{(\sum_{i=1}^K n_i)^2} < \infty.$$

根据 Kolmogorov 强大数定律, 当 $K \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{\sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i^2}{\sum_{i=1}^K n_i} - \mathbb{E} \left[\frac{\sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i^2}{\sum_{i=1}^K n_i} \right] \rightarrow 0, \quad \text{a.s.} \quad (4.7)$$

又因为 $E(\sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i / \sum_{i=1}^K n_i) = \Phi_0(t)$, 容易验证

$$\frac{\sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^K n_i} \rightarrow \Phi_0(t), \quad \text{a.s.}$$

因此, 根据 Slutsky 定理^[23], 可得

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^K n_i} \right)^2 \rightarrow \Phi_0^2(t) = \left[E \left(\frac{\sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^K n_i} \right) \right]^2, \quad \text{a.s.}$$

在条件 (4.2) 成立时, 有

$$E \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^K n_i} \right)^2 \right] - \left[E \left(\frac{\sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^K n_i} \right) \right]^2 = \text{Var} \left[\frac{\sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^K n_i} \right] \rightarrow 0, \quad \text{a.s.}, \quad (4.8)$$

即

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^K n_i} \right)^2 - E \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^K n_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^K n_i} \right)^2 \right] \rightarrow 0, \quad \text{a.s.} \quad (4.9)$$

结合 (4.5)、(4.7) 和 (4.9) 得到

$$\frac{T}{\sum_{i=1}^K n_i} - E \left[\frac{T}{\sum_{i=1}^K n_i} \right] \rightarrow 0, \quad \text{a.s.} \quad (4.10)$$

显然, 在条件 (4.2) 成立时, 有

$$\frac{(\sum_{i=1}^K n_i)^2}{(\sum_{i=1}^K n_i)^2 - \sum_{i=1}^K n_i^2} \rightarrow 1. \quad (4.11)$$

根据 (4.10)、(4.11) 以及估计 $\widehat{\sigma^2(t)}$ 的相合性, 可以得到

$$\widehat{\tau^2(t)} \rightarrow E[\tau^2(t)], \quad \text{a.s.}, \quad (4.12)$$

即 $\widehat{\tau^2(t)} \rightarrow \tau^2(t)$, a.s. 因此完成了命题的证明. $\square$

注 4.1 在实际保险数据中, 计算得到的 $\widehat{\tau^2(t)}$ 可能为负值, 因此, 在实际中一般取

$$\widehat{\tau^2(t)}^* = \max(0, \widehat{\tau^2(t)}).$$

但 $\widehat{\tau^2(t)}^*$ 不再具有无偏性.

注 4.2 在具体的保费原理中, 仍然有一些未知的参数, 如 μ_1 、 μ_2 或 $\gamma(\alpha)$, 但这些参数都可以根据估计 $\widehat{\Phi_0(t)}^*$ 得到, 例如,

$$\widehat{\mu_1} = \frac{\partial \widehat{\Phi_0(t)}^*}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad \widehat{\mu_2} = \frac{\partial^2 \widehat{\Phi_0(t)}^*}{\partial t^2} \Big|_{t=0}, \quad \widehat{\gamma(\alpha)} = \frac{\partial \widehat{\Phi_0(t)}^*}{\partial t} \Big|_{t=\alpha}.$$

最后, 根据结构参数的估计, 我们得到信度因子 Z_i 的估计为

$$\widehat{Z}_i = \frac{n_i \widehat{\tau^2}}{n_i \widehat{\tau^2} + \widehat{\sigma^2}},$$

其中

$$\widehat{\tau^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) \widehat{\tau^2(t)} dt, \quad \widehat{\sigma^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) \widehat{\sigma^2(t)} dt.$$

则 $\Phi(t; \theta_i)$ 和 $\widehat{R(\theta_i)}$ 的二次估计为

$$\widehat{\Phi}^{\text{exp}}(t; \theta_i) = \widehat{Z}_i \Phi_i(t) + (1 - \widehat{Z}_i) \widehat{\Phi_0(t)}^*, \quad i = 1, \dots, K,$$

以及

$$\widehat{R(\theta_i)}^{\text{exp}} = g\left(\frac{\partial \widehat{\Phi}^{\text{exp}}(t; \theta_i)}{\partial t} \Big|_{t=0}, \frac{\partial^2 \widehat{\Phi}^{\text{exp}}(t; \theta_i)}{\partial t^2} \Big|_{t=0}, \widehat{\Phi}^{\text{exp}}(\alpha, \theta_i), \frac{\partial \widehat{\Phi}^{\text{exp}}(t; \theta_i)}{\partial t} \Big|_{t=\alpha}\right).$$

注意到二次估计 $\widehat{\Phi}^{\text{exp}}(t; \theta_i)$ 和 $\widehat{R(\theta_i)}^{\text{exp}}$ 不再依赖于任何未知参数, 完全能通过样本数据得到. 在 Bayes 统计中, 称这种方法为经验 Bayes 方法, 且称估计 $\widehat{\Phi}^{\text{exp}}(t; \theta_i)$ 和 $\widehat{R(\theta_i)}^{\text{exp}}$ 为经验 Bayes 估计. 经验 Bayes 方法最早来源于文献 [24, 25], 在非寿险精算中得到广泛的运用, 可参考文献 [26-28].

5 数值模拟与比较

本节将评估本文提出的信度估计与已有信度估计的优劣. 为了计算方便, 假设 $n_1 = n_2 = \dots = n_K = n$. 下面的内容分为三个部分. 首先, 利用数值模拟的方法验证相关保费原理中风险保费的信度估计在不同样本容量 n 时收敛性和收敛速度情形, 并检查渐近正态性情形. 其次, 将在净保费原理、方差保费原理、Esscher 保费原理和指数保费原理下比较本文得到的信度估计与已有信度估计的差异. 最后, 将利用数值模拟的方法验证代入结构参数的估计后经验 Bayes 估计与信度估计的均方误差大小.

在数值模拟中, 假定 $\theta_i \sim U(0, 1)$, 且假设给定风险参数 θ_i 条件下, 风险 X_{ij} 服从 Bernoulli 分布, 即对 $i = 1, \dots, K, j = 1, \dots, n$, 有 $\Pr(X_{ij} = 1 | \theta_i) = \theta_i = 1 - \Pr(X_{ij} = 0 | \theta_i)$. 容易得到

$$\begin{aligned} \Phi(t; \theta_i) &= \theta_i(e^t - 1) + 1, \quad \sigma^2(t; \theta_i) = \theta_i(e^{2t} - 2e^t + 1) - \theta_i^2(e^t - 1)^2, \\ \Phi_0(t) &= \frac{1}{2}(e^t + 1), \quad \tau^2(t) = \frac{(e^t - 1)^2}{12}, \quad \sigma^2(t) = \frac{(e^t - 1)^2}{6}. \end{aligned}$$

因此, $\mu_1(\theta_i) = \mu_2(\theta_i) = \theta_i$, $\gamma(\alpha; \theta_i) = \theta_i e^\alpha$. 为了保证结构参数 τ^2 和 σ^2 的存在性, 取权重函数

$$w(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-M, M), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 M 为某个已知的较大的常数, 则此时信度因子为

$$Z_i = \frac{n_i \tau^2}{n_i \tau^2 + \sigma^2} = \frac{n \int_{-M}^M \tau^2(t) dt}{n \int_{-M}^M \tau^2(t) dt + \int_{-M}^M \sigma^2(t) dt} = \frac{n}{n+2}, \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

5.1 相合性和渐近正态性的模拟

对不同的样本容量 n , 取 $K = 3$, $\alpha = 0.3$, 分别在 $\theta_1 = 0.2$, $\theta_2 = 0.5$ 和 $\theta_3 = 0.8$ 下进行 10,000 次重复模拟, 得到估计 $\widehat{R_k(\theta_i)}$ 的平均值及其均方误差. 相应的结果见表 1.

从表 1 可以看出, 6 种保费原理中风险保费的信度估计的均方误差随着样本容量的增大快速减少的趋势, 说明信度估计 $\widehat{R_1(\theta_i)}, \dots, \widehat{R_6(\theta_i)}$ 都满足相合性.

表 1 在不同样本容量下估计 $\widehat{R_k(\theta_i)}$ 及其均方误差的平均值

n θ_i	$n = 10$			$n = 100$			$n = 500$		
	0.2	0.5	0.8	0.2	0.5	0.8	0.2	0.5	0.8
$R_1(\theta_i)$	0.260	0.650	1.040	0.260	0.650	1.040	0.260	0.650	1.040
$\widehat{R_1(\theta_i)}$	0.322	0.645	0.973	0.267	0.648	1.032	0.261	0.649	1.038
MSE ₁	0.149	0.169	0.153	0.051	0.064	0.051	0.023	0.028	0.023
$R_2(\theta_i)$	0.248	0.575	0.848	0.248	0.575	0.848	0.248	0.575	0.848
$\widehat{R_2(\theta_i)}$	0.300	0.566	0.802	0.254	0.573	0.842	0.249	0.574	0.846
MSE ₂	0.129	0.131	0.103	0.046	0.049	0.032	0.021	0.021	0.014
$R_3(\theta_i)$	0.440	0.650	0.860	0.440	0.650	0.860	0.440	0.650	0.860
$\widehat{R_3(\theta_i)}$	0.473	0.647	0.824	0.444	0.649	0.855	0.440	0.649	0.859
MSE ₃	0.080	0.091	0.082	0.027	0.034	0.027	0.012	0.015	0.012
$R_4(\theta_i)$	0.320	0.650	0.920	0.320	0.650	0.920	0.320	0.650	0.920
$\widehat{R_4(\theta_i)}$	0.372	0.641	0.873	0.326	0.648	0.914	0.321	0.649	0.918
MSE ₄	0.133	0.131	0.100	0.048	0.049	0.030	0.022	0.021	0.013
$R_5(\theta_i)$	0.252	0.574	0.843	0.252	0.574	0.843	0.252	0.574	0.843
$\widehat{R_5(\theta_i)}$	0.304	0.566	0.798	0.258	0.572	0.838	0.253	0.573	0.842
MSE ₅	0.128	0.128	0.102	0.046	0.048	0.032	0.021	0.021	0.014
$R_6(\theta_i)$	0.225	0.537	0.822	0.225	0.532	0.822	0.225	0.537	0.822
$\widehat{R_6(\theta_i)}$	0.322	0.645	0.973	0.267	0.648	1.032	0.261	0.649	1.038
MSE ₆	0.122	0.129	0.110	0.043	0.049	0.036	0.019	0.021	0.016

为了验证估计 $\widehat{R_1(\theta_i)}, \dots, \widehat{R_6(\theta_i)}$ 的渐近正态性, 取 $\theta = 0.5$, $n = 80$, 利用 R 软件画出不同样本容量下估计的分位数 - 分位数图 (plot of sample quantiles vs. theoretical quantiles, QQ-plot) 如图 1 所示.

显然, 在中等样本容量 $n = 80$ 下, 所有的分位数 - 分位数图基本呈现一条直线, 说明 6 种保费原理中的信度估计都能满足渐近正态性.

5.2 与已有的信度估计的模拟比较

至今为止, 在信度理论中, 已有较多的文献讨论各种保费原理下风险保费的信度估计问题, 如净保费原理^[1]、方差保费原理^[7]、Esscher 保费原理^[9, 28]和指数保费原理^[11]. 我们将本文得到的信度估计与这些信度估计一一比较.

5.2.1 净保费原理

在净保费原理中, Bühlmann^[1] 首次给出了下面的信度保费公式:

$$\widehat{\mu_1(\theta_i)}^B = Z_i^B \overline{X_i^1} + (1 - Z_i^B) \mu_1, \quad (5.1)$$

其中信度因子为

$$Z_i^B = \frac{n_i}{n_i + \text{E}[\text{Var}(X_{ij} | \theta_i)] / \text{Var}[\text{E}(X_{ij} | \theta_i)]}.$$

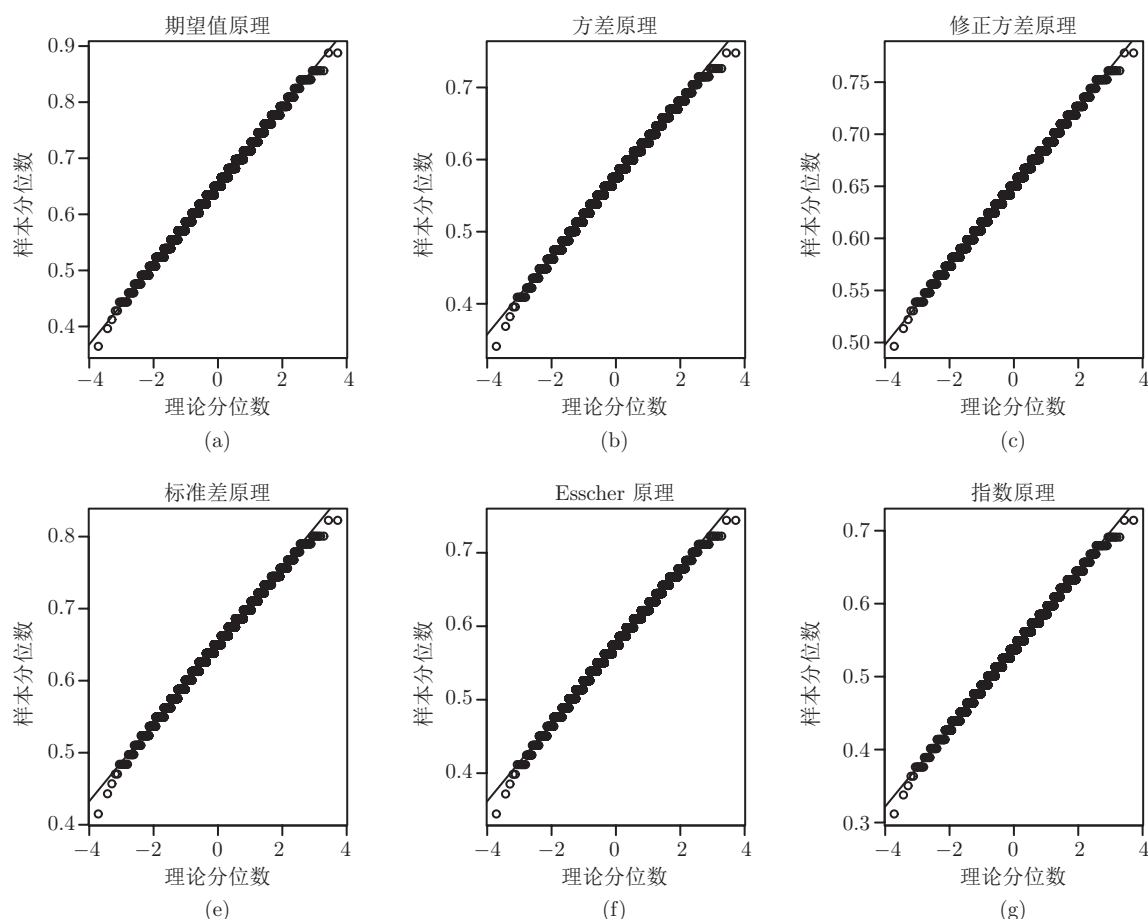


图 1 当样本容量 $n = 80$ 时 6 种保费原理中信用估计的渐近正态性 QQ- 图

在本文的期望值保费原理的信用估计 (3.19) 中, 令 $\alpha = 0$, 则得到净保费原理下风险保费 $\mu_1(\theta_i)$ 的信用估计

$$\widehat{R_0(\theta_i)} = Z_i \overline{X_i^1} + (1 - Z_i) \mu_1. \quad (5.2)$$

显然, 信用估计 (5.1) 与 (5.2) 有非常相近的形式, 差别仅仅体现在信用因子上. 在本文的例子中, 容易验证 $Z_i^B = Z_i$, 因此, 本文得到的信用估计与 Bühlmann 信用估计恰好相等.

5.2.2 方差保费原理

在方差保费原理中, 风险保费与本文得到的信用估计分别为

$$R_2(\theta_i) = \theta_i + \alpha \theta_i (1 - \theta_i)$$

以及

$$\widehat{R_2(\theta_i)} = \frac{n \overline{X_i^1} + 1}{n + 2} + \frac{\alpha [(n \overline{X_i^2} + 1)(n + 2) - (n \overline{X_i^1} + 1)^2]}{(n + 2)^2}, \quad (5.3)$$

对 $i = 1, \dots, K$. 记

$$E[\text{Var}(X_{ij} | \theta_i)] = \tau_B^2, \quad \text{Var}[E(X_{ij} | \theta_i)] = \sigma_B^2.$$

经过一些简单的数学计算, Bühlmann^[7] 给出的方差保费原理中的信度保费公式可以表达为

$$\widehat{R_2(\theta_i)}^B = \frac{n\overline{X_i^1} + 1}{n+2} + \alpha \left(cS_i^2 + \frac{1-c}{6} + \frac{1}{6(n+2)} \right), \quad (5.4)$$

其中 $S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \overline{X_i^1})^2$ 为样本方差, 而

$$c = \frac{1}{1 + 180\mathbb{E}[\text{Var}(S_i^2 | \theta_i)]}.$$

由于 $\text{Var}(S_i^2 | \theta)$ 涉及 X_{ij} 的条件四阶矩的计算, Bühlmann^[7] 在某种假设下建议使用

$$\frac{2[\text{Var}(X_{ij} | \theta_i)]^2}{n-1} = \frac{2\theta_i^2(1-\theta_i)^2}{n-1}$$

作为 $\text{Var}(S_i^2 | \theta_i)$ 的近似值. 这时得到 c 的近似表达式为

$$c = \frac{1}{1 + 180\mathbb{E}[\frac{2\theta_i^2(1-\theta_i)^2}{n-1}]} = \frac{n-1}{n+11}.$$

与 Bühlmann^[7] 信度估计相比, 本文的信度估计具有表达式上的优势, 因为估计 (5.3) 仅仅涉及风险的前两阶矩, 也不需要利用某种假设下的近似计算. 为了进一步比较两个信度估计的差异, 下面利用数值模拟的方法比较两者的均方误差, 得到下面的表 2.

在表 2 中, Std_2 和 Std_B 分别表示本文的信度估计 $\widehat{R_2(\theta_i)}$ 和 Bühlmann^[7] 的信度估计 $\widehat{R_2(\theta_i)}^B$ 的均方标准差. 显然, 在各种样本容量和 θ_i 中, 本文得到的信度估计的均方标准差都比 Bühlmann^[7] 得到的均方标准差更小, 因此, 本文的估计有更高的精确度.

5.2.3 Esscher 保费原理

在 Esscher 保费原理中, 风险保费为

$$R_5(\theta_i) = \frac{\gamma(\alpha; \theta_i)}{\Phi(\alpha; \theta_i)} = \frac{\theta_i e^\alpha}{\theta_i(e^\alpha - 1) + 1}. \quad (5.5)$$

Gerber^[8] 首次给出了该风险保费的信度估计, 下面称之为 Gerber- 型信度保费. 然而, Pan 等^[9] 证明了 Gerber- 型信度保费不满足估计的相合性, 他们提出改进的信度估计公式, 称之为 Pan- 型信度估计. 类似的研究可参见文献 [10]. 注意到, Pan- 型信度一般没有显示表达式, 并且很难得到信度因子中结构参数的估计. 文献 [28] 再次对 Pan- 型信度估计进行改进, 得到的估计称为 Wen- 型信度保费.

(1) Gerber- 型信度保费. 为了得到 Gerber- 型信度保费, 首先定义新的概率分布

$$\text{Pr}^*(\theta_i \in A) = \frac{\mathbb{E}[I_A(\theta_i)\Phi(\alpha; \theta_i)]}{\Phi_0(\alpha)}, \quad i = 1, \dots, K. \quad (5.6)$$

表 2 方差保费原理中信度估计的 100 倍均方标准差

n	$n = 10$			$n = 30$			$n = 100$		
θ_i	0.2	0.5	0.8	0.2	0.5	0.8	0.2	0.5	0.8
100 Std ₂	11.793	12.216	12.487	7.228	7.404	7.602	4.083	4.203	4.294
100 Std _B	11.802	12.234	12.539	7.229	7.416	7.624	4.083	4.206	4.310

因此, θ_i 在新的概率分布下的密度为

$$\pi_{\theta_i}^*(\theta) = \frac{2(e^\alpha - 1)\theta}{e^\alpha + 1} + \frac{2}{e^\alpha + 1}, \quad \theta \in (0, 1). \quad (5.7)$$

因此,

$$\text{Var}_*(\mu_1(\theta_i)) = \frac{e^{2\alpha} + 4e^\alpha + 1}{18(e^\alpha + 1)}, \quad E_*[\sigma^2(\theta_i)] = \frac{1}{6}, \quad E_*[\mu_1(\theta_i)] = \frac{2e^\alpha + 1}{3(e^\alpha + 1)},$$

以及

$$R_5 = \frac{E[X_{ij}e^{\alpha X_{ij}}]}{E[e^{\alpha X_{ij}}]} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1}, \quad \text{Cov}_*(R_5(\theta), \mu_1(\theta)) = \frac{e^\alpha}{3(e^\alpha + 1)^2}.$$

得到

$$Z^G = \frac{\text{Cov}_*(R_5(\theta_i), \mu_1(\theta_i))}{\text{Var}_*(\mu_1(\theta_i)) + \frac{1}{n}E_*[\sigma^2(\theta_i)]} = \frac{6ne^\alpha}{n(e^\alpha + 1)(e^{2\alpha} + 4e^\alpha + 1) + 3(e^\alpha + 1)^2},$$

则 Gerber- 型信度保费为

$$H_G(i) = Z^G \left(\overline{X_i^1} - \frac{2e^\alpha + 1}{3(e^\alpha + 1)} \right) + \frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1}, \quad i = 1, \dots, K. \quad (5.8)$$

(2) Pan- 型信度保费. 定义

$$H_i = \frac{\sum_{j=1}^n X_{ij}e^{\alpha X_{ij}}}{\sum_{j=1}^n e^{\alpha X_{ij}}}, \quad P_i(\theta_i) = E(H_i | \theta_i),$$

信度因子定义为

$$Z^P = \frac{\text{Cov}_*(R_5(\theta_i), P_i(\theta_i))}{\text{Var}_*[P_i(\theta_i)] + E_*[\text{Var}(H_i | \theta_i)]},$$

则第 i 份合同的 Pan- 型信度保费为

$$H_P(i) = Z^P H_i + R_5 - Z^P E_*[P_i(\theta_i)], \quad i = 1, \dots, K,$$

其中 Var_* 、 Cov_* 和 E_* 为根据 θ_i 的新的概率分布 (5.7) 得到的方差、协方差和数学期望. 由于 $P_i(\theta_i) = E(H_i | \theta_i)$ 在实际中没有显示表达式, 因此, Pan- 型信度保费只能通过模拟得到.

(3) Wen- 型信度保费. 首先, 定义两个信度因子

$$Z^{W1} = \frac{n \text{Var}[E(X_{ij}e^{\alpha X_{ij}} | \theta_i)]}{n \text{Var}[E(X_{ij}e^{\alpha X_{ij}} | \theta_i)] + E[\text{Var}(X_{ij}e^{\alpha X_{ij}} | \theta_i)]} = \frac{n}{n+2}$$

以及

$$Z^{W2} = \frac{n \text{Var}[E(e^{\alpha X_{ij}} | \theta_i)]}{n \text{Var}[E(e^{\alpha X_{ij}} | \theta_i)] + E[\text{Var}(e^{\alpha X_{ij}} | \theta_i)]} = \frac{n}{n+2}.$$

显然, $Z^{W1} = Z^{W2}$, 因而统一记为 Z^W . 得到 Wen- 型信度估计为

$$H_W(i) = \frac{Z^W \bar{\gamma}_i(\alpha) + (1 - Z^W) \gamma(\alpha)}{Z^W \Phi_i(\alpha) + (1 - Z^W) \Phi_0(\alpha)}, \quad i = 1, \dots, K, \quad (5.9)$$

其中

$$\gamma(\alpha) = E[X_{ij}e^{\alpha X_{ij}}] = e^\alpha, \quad \Phi_0(\alpha) = E[e^{\alpha X_{ij}}] = e^\alpha + 1,$$

$$\bar{\gamma}_i(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij} e^{\alpha X_{ij}}, \quad \Phi_i(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{\alpha X_{ij}}.$$

(4) 本文的信度估计. 在 Esscher 保费中, 本文得到的信度估计记为 $H_{\text{cu}}(i)$. 根据 (3.22), 有

$$H_{\text{cu}}(i) = \frac{Z_i \bar{\gamma}_i(\alpha) + (1 - Z_i) \gamma(\alpha)}{Z_i \Phi_i(\alpha) + (1 - Z_i) \Phi_0(\alpha)}, \quad i = 1, \dots, K.$$

由于 $Z_i = Z_W$, 因此, $H_W(i) = H_{\text{cu}}(i)$. 从结果可看出, 本文得到的信度估计等同于 Wen- 型信度估计.

对估计 H_k ($k = G, W, \text{cu}$), 定义均方误差为

$$V_k(i) = E[(H_k(i) - R_5(\theta_i))^2], \quad k = G, P, \text{cu}.$$

对不同的样本容量, 分别计算 V_k , $k = G, P, \text{cu}$. 经过 10,000 次重复模拟, 得到 $H_k(i)$ 的均方误差 (见表 3).

根据表 3, 我们得到下面几个结论. 首先, Gerber- 型信度估计仅当 $\theta_i = 0.5 = E(\theta_i)$ 时具有最小的均方误差. 但值得注意的是, Gerber- 型信度估计并不满足相合性, 即使样本容量增长, 其均方误差也不收敛到 0. 其次, 本文得到的信度估计显然比 Pan- 型信度估计有更小的均方误差. 另外, 从模拟可以看出, 本文得到信度估计有显式表达式, 而 Pan- 型信度估计只能通过 Monte Carlo 模拟方法得到.

5.2.4 指数保费原理

在指数保费原理中, 第 i 份保单的风险保费为

$$R_6(\theta_i) = \frac{1}{\alpha} \log E[e^{\beta X_{ij}} | \theta_i] = \frac{1}{\alpha} \log[\theta_i(e^\alpha - 1) + 1]. \quad (5.10)$$

文献 [11] 得到了指数保费风险原理中风险保费的信度估计如下:

$$H_W(i) = \frac{1}{\alpha} \log[Z_W \Phi_i(\alpha) + (1 - Z_W) \Phi_0(\alpha)], \quad (5.11)$$

其中

$$Z_W = \frac{n \text{Var}[E(e^{\beta X} | \theta)]}{n \text{Var}[E(e^{\beta X} | \theta)] + E[\text{Var}(e^{\beta X} | \theta)]} = \frac{n}{n+2}.$$

容易看出, 估计 $H_W(i)$ 恰好与本文 (3.23) 给出的信度估计 $\widehat{R_6(\theta_i)}$ 相同.

5.3 经验 Bayes 估计的绩效评估

本小节将在小样本和中等样本容量下, 分析矩母函数的经验 Bayes 估计 $\hat{\Phi}^{\text{exp}}(t; \theta_i)$ 与信度估计 $\hat{\Phi}(t; \theta_i)$ 的差别, 以及矩相关保费原理中风险保费的经验 Bayes 估计及信度估计的差别.

表 3 Esscher 保费原理中风险保费的信度估计及其均方标准差

n θ_i	$n = 10$			$n = 100$			$n = 500$		
	0.2	0.5	0.8	0.2	0.5	0.8	0.2	0.5	0.8
Std_G	0.2025	0.0618	0.1698	0.1876	0.0232	0.1555	0.1863	0.0138	0.1544
Std_P	0.1359	0.1285	0.0958	0.0481	0.0483	0.0319	0.0275	0.0287	0.0252
Std_{cu}	0.1305	0.1286	0.0962	0.0458	0.0476	0.0321	0.0210	0.0217	0.0149

首先, 注意到, 如果没有任何样本信息, 则 $\Phi_0(t)$ 是条件矩母函数 $\Phi(t; \theta_i)$ 的一个估计. 从统计观点来看, 显然, $\Phi_0(t)$ 是一个最差的估计.

因此, 我们定义矩母函数的经验 Bayes 估计 $\hat{\Phi}^{\text{exp}}(t; \theta_i)$ 关于 $\hat{\Phi}(t; \theta_i)$ 的估计的效率为

$$\text{Efficiency} = \frac{\text{ISE}_0 - \text{ISE}_{\text{exp}}}{\text{ISE}_0 - \text{ISE}_{\text{cre}}}. \quad (5.12)$$

从理论上来看, 应有 $0 \leq \text{Efficiency} \leq 1$.

取 $K = 10$, $n = 5$, 权重函数

$$w(t) = \begin{cases} 1, & t = \alpha, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

经过 10,000 次重复模拟得到 $\hat{\Phi}^{\text{exp}}(t; \theta_i)$ 的积分均方误差 (integral mean square error, ISE) 及相应的效率列在表 4 中.

从表 4 中的模拟结果看, 经验 Bayes 估计比信度估计的 ISE 更大. 这主要是因为结构参数的二次估计将增大误差. 然而, 所有的效率都大于 95%, 说明这种效率的损失非常小, 满足实际使用的需要.

在模拟中, 我们又计算了矩相关保费原理中的 6 种风险保费的经验 Bayes 估计及其相应的效率, 得到下面的表 5.

从表 5 中可以看出, 6 种保费原理中的经验 Bayes 估计都有较小的均方误差, 且所有的效率都大于 90%.

表 4 信度估计与经验 Bayes 估计的积分均方误差 ($\alpha = 0.5$)

保单的名称 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
信度估计的 ISE	0.00144	0.00144	0.00141	0.00145	0.00146	0.00144	0.00145	0.00144	0.00145	0.00144
经验 Bayes 估计的 ISE	0.00154	0.00152	0.00151	0.00153	0.00156	0.00154	0.00156	0.00152	0.00153	0.00152
经验 Bayes 估计的效率	0.98895	0.99027	0.98840	0.99114	0.98920	0.98799	0.98757	0.99093	0.99158	0.99088

表 5 矩相关保费原理中经验 Bayes 估计的均方标准误差和效率比较

保单的名称 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
净保费原理的标准误差	0.0532	0.0547	0.0531	0.0552	0.0521	0.0539	0.0552	0.0534	0.0548	0.0548
净保费原理的效率	0.9384	0.9419	0.9380	0.9415	0.9402	0.9465	0.9368	0.9393	0.9415	0.9401
方差原理的标准误差	0.0249	0.0253	0.0247	0.0258	0.0246	0.0250	0.0253	0.0248	0.0252	0.0254
方差原理的效率	0.9115	0.9100	0.9041	0.9168	0.9073	0.9157	0.8965	0.9058	0.9141	0.9117
修正方差原理的标准误差	0.0059	0.0060	0.0059	0.0061	0.0058	0.0059	0.0061	0.0059	0.0060	0.0060
修正方差原理的效率	0.9133	0.9151	0.9086	0.9166	0.9120	0.9210	0.9061	0.9119	0.9155	0.9128
标准差原理的标准误差	0.0265	0.0267	0.0261	0.0273	0.0260	0.0265	0.0266	0.0262	0.0266	0.0268
标准差原理的效率	0.9028	0.8988	0.8953	0.9097	0.8987	0.9067	0.8826	0.8950	0.9065	0.9022
Esscher 原理的标准误差	0.0238	0.0240	0.0235	0.0246	0.0234	0.0239	0.0241	0.0236	0.0240	0.0242
Esscher 原理的效率	0.9337	0.9350	0.9316	0.9324	0.9233	0.9346	0.9261	0.9265	0.9363	0.9411
指数原理的标准误差	0.0236	0.0241	0.0235	0.0245	0.0233	0.0238	0.0242	0.0236	0.0241	0.0242
指数原理的效率	0.9336	0.9364	0.9322	0.9326	0.9247	0.9338	0.9292	0.9288	0.9366	0.9399

6 结论

本文通过矩母函数作为媒介, 发展了一种新的经验厘定法. 结合矩母函数、经典的 Bühlmann 信度理论和经验 Bayes 方法, 对矩相关保费原理中风险保费的信度估计和经验 Bayes 估计进行了研究.

与已有的保费原理中风险保费的信度估计相比, 本文推广了矩相关保费原理的信度估计问题. 得到了期望值原理 (净保费原理)、标准差原理、修正方差原理、Esscher 保费原理中和指数保费原理中风险保费的信度估计. 与文献 [8–11] 通过修改损失函数得到某些保费原理中风险保费的信度估计方法相比, 本文得到的信度估计不仅具有较简单的形式, 容易验证相应的统计性质, 而且容易得到结构参数的估计. 从模拟的效果来看, 本文得到的估计具有较大的优势. 在净保费原理、Esscher 保费原理和指数保费原理中, 本文得到的信度估计与文献 [11, 22] 的信度估计相同, 而优于文献 [7–9] 的信度估计. 另外, 经验 Bayes 的效率都能达到 90% 以上, 满足实际使用的需要.

致谢 感谢审稿人和编委对本文的审稿并给出很好的修改意见.

参考文献

- 1 Bühlmann H. Experience rating and credibility. *Astin Bull*, 1967, 4: 199–207
- 2 Landsman Z, Makov U E. Exponential dispersion models and credibility. *Scand Actuar J*, 1998, 1998: 89–96
- 3 Norberg R. Credibility theory. In: *Encyclopedia of Actuarial Science*. Chichester: John Wiley & Sons, 2004, 398–406
- 4 Gómez-Déniz E, Pérez-Sánchez J M, Vázquez-Polo F J. On the use of posterior regret Γ -minimax actions to obtain credibility premiums. *Insurance Math Econom*, 2006, 39: 115–121
- 5 Bühlmann H, Gisler A. *A Course in Credibility Theory and Its Applications*. Berlin-Heidelberg: Springer, 2005
- 6 Asumussen S. *Ruin Probabilities*. Singapore: World Scientific, 2000
- 7 Bühlmann H. *Mathematical Methods in Risk Theory*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970
- 8 Gerber H U. Credibility for Esscher premium. *Mitteilungen der VSVM*, 1980, 3: 307–312
- 9 Pan M L, Wang R, Wu X. On the consistency of credibility premiums regarding Esscher principle. *Insurance Math Econom*, 2008, 42: 119–126
- 10 Wen L M, Wu X Y, Zhao X B. The credibility premiums under generalized weighted loss functions. *J Ind Manag Optim*, 2009, 5: 893–910
- 11 温利民, 吴贤毅. 指数保费原理下的经验厘定. *中国科学: 数学*, 2011, 41: 861–876
- 12 Liu B. *Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty*. Berlin: Springer-Verlag, 2010
- 13 Li S, Peng J, Zhang B. The uncertain premium principle based on the distortion function. *Insurance Math Econom*, 2013, 53: 317–324
- 14 Liu Y, Li X Z, Liu Y L. The bounds of premium and optimality of stop loss insurance under uncertain random environments. *Insurance Math Econom*, 2015, 64: 273–278
- 15 Yao K, Qin Z. A modified insurance risk process with uncertainty. *Insurance Math Econom*, 2015, 62: 227–233
- 16 Young V R. Premium principles. In: *Encyclopedia of Actuarial Science*. New York: John Wiley & Sons, 2004, 1322–1331
- 17 Guerra M, Centeno M L. Optimal reinsurance for variance related premium calculation principles. *Astin Bull*, 2010, 40: 97–121
- 18 Wen L M, Zhang L N, Zhang M, et al. The nonparametric estimation of risk premium under variance related premium principle. *J Jiangxi Normal Univ*, 2015, 39: 355–359
- 19 Chi Y C. Optimal reinsurance under variance related premium principles. *Insurance Math Econom*, 2012, 51: 310–321
- 20 Zheng D, Zhang Y, Wen L M. The credibility models with time changeable effects. *J Jiangxi Normal Univ*, 2012, 36: 249–252
- 21 Fang J, Zhang Y, Wen L M. The credibility estimation for the collective models. *J Jiangxi Normal Univ*, 2012, 36: 607–611
- 22 Wen L M, Yu J, Mei G P, et al. The credibility premiums based on estimated moment-generating function. *Comm Statist Theory Methods*, 2017, 46: 1090–1106
- 23 Ferguson T S. *A Course in Large Sample Theory*. London: Chapman & Hall, 1996

- 24 Robbins H. An empirical Bayes approach to statistics. In: Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability. Berkeley: University of California Press, 1955, 157–164
- 25 Robbins H. The empirical Bayes approach to statistical decision problems. *Ann Math Statist*, 1964, 35: 1–20
- 26 Mashayekhi M. On asymptotic optimality in empirical Bayes credibility. *Insurance Math Econom*, 2002, 31: 285–295
- 27 Mashayekhi M. A note on linear empirical Bayes estimation of finite population means. *J Statist Plann Inference*, 2003, 112: 77–88
- 28 Wen L, Wang J, Wu X Y. A new class of credibility estimators under the generalized weighted premium principle. *Comm Statist Theory Methods*, 2013, 42: 447–465

Experience rating of risk premium for moment-related premium principle

Yi Zhang, Zhilong Li & Limin Wen

Abstract The traditional experience ratemaking in terms of Bühlmann’s credibility theory can only compute experience net premiums and is difficult to be transplanted to general premium calculation principles. This paper unifies a dictionary of moment-related premium principles that can be expressed as functionals of moment generating functions. The credibility idea is applied to moment generating functions and the empirical Bayesian estimates of risk premiums are established. Theoretical properties of this new ratemaking are also discussed. The results show that our premiums are exactly the same as the classical ones under net and exponential principles and are better than that of existing estimates under variance premium principle. We also provide some simulations to examine the consistency and asymptotic normality of the premiums and to compare these newly proposed premiums with existing ones under a few premium principles.

Keywords moment-related premium principle, credibility estimation, strong consistency, asymptotic normality, empirical Bayesian estimation

MSC(2010) 91B30, 62P05

doi: 10.1360/SCM-2017-0466