



## 论 文

## 一类完备的正交分段多项式函数系及其应用

熊刚强<sup>①②\*</sup>, 齐东旭<sup>②③</sup>, 郭芬红<sup>②④</sup>

① 广东医学院信息工程学院, 东莞 523808

② 中山大学信息科学与技术学院, 广州 510275

③ 澳门科技大学资讯科技学院, 澳门

④ 北方工业大学理学院, 北京 100144

\* 通信作者. E-mail: xionggq@yahoo.cn

收稿日期: 2010-08-11; 接受日期: 2010-12-30

国家自然科学基金(批准号: 10631080)、澳门科学技术发展基金(批准号: 045/2006/A)和北京市教委面上项目(批准号: KM2009-10009001)资助

**摘要** 在几何图形或图像边界的频谱分析应用中, 用 Fourier 三角基表示间断图形时必然会出现 Gibbs 现象, 而用 Walsh 函数表示时, 因其收敛速度慢而效果欠佳. 本文首先构造了一类分段点在四进制有理数点处的分段多项式函数集(简称四进制 U-系统, QU-系统), 它是  $L^2[0, 1]$  空间上的完备的正交函数系, 并研究了它的性质、基函数与 Fourier-QU 系数的计算公式, 同时, 也给出了 1~3 次 QU-系统的一组显式表达式. 然后, 使用 Fourier-QU 级数的有限项和表示图像轮廓线, 提出用有限的 Fourier-QU 系数描述几何图形或图像轮廓线, 并由此得到了一类新的多项式描述子——QU 描述子, 而归一化 QU 描述子是一类基于平移、旋转与尺度变换的特征不变量. 最后, 通过数值实验证实了使用 Fourier-QU 级数逼近一元平方可积函数时, 其收敛速率要优于 Fourier 级数、Walsh 级数和 Fourier-BU 级数, 同样也验证了 QU 描述子是一类有效的形状描述子, 用图像间的 QU 距离能准确地描述图像间的相似性.

**关键词** 分段多项式 正交函数 四进制 U-系统 Fourier 级数 Walsh 函数 图像轮廓线 形状描述子

## 1 引言

在计算机几何设计 (CAGD) 的应用中, 如何选择一组多项式表示几何模型是我们特别关注的问题, 例如, 用正交多项式表示几何模型就是一种常用的几何图形表示方法<sup>[1,2]</sup>. 另外, 用正交基表示几何图形之后, 我们就可以使用正交变换系数分析几何图形所隐藏的几何信息, 因此, 文献 [3] 就提出使用正交基表示几何图形, 然后, 分析几何图形的几何频谱. 事实上, 在计算机视觉与模式识别应用中, 正交表示是一种普遍使用的数据表示方法, 例如: Fourier 描述子与小波描述子<sup>[4~7]</sup>, 因此, 正交基的研究是 CAGD、信号与图像处理、模式识别与计算机视觉等领域中的基本问题.

研究正交基的目的在于寻找一个合理的正交系表示几何图形、信号与图像, 在 Fourier 分析中, 三角基是一类高度光滑的函数, 用它表示非连续的信号时会产生 Gibbs 现象; 而 Walsh 系是一类强间断

的正交系, 用 Walsh 函数逼近几何图形时, 会因其收敛速度慢而影响它的应用. 文献 [3] 尝试使用一类正交分段多项式 (简称 U-系统) 表示几何图组, 因为 U-系统是一类  $L^2[0, 1]$  上的完备的正交系 [8], 并且, 它既含有连续的基函数又含有间断的基函数, 因此, 可以用 U-系统精确地表示一类多项式模型 (如样条函数) 的几何图形, 这一点是 Fourier 三角函数与 Walsh 函数无法比拟的. 文献 [9] 应用 U-系统研究几何图形的频谱特征, 提出用 Fourier-U 系数 (即 U 描述子) 描述几何图形, 并论证了 U 描述子是几何图形与图像分类识别应用中的一类特征不变量. 文献 [10] 应用 U-系统的函数生成元构造了另一类  $L^2[0, 1]$  上的完备的正交函数系 (简称 V-系统), 事实上, U-系统是一类高次 Walsh 系, 比如, 0 次 U-系统就是 Walsh 系, 1 次 U-系统就是斜变换的解析表达式 [11], 而 V-系统则是一类高次 Haar 系, 而且 U-系统的函数生成元是一类分段多项式多小波, 很明显, 0 次 U-系统的函数生成元就是 Haar 小波, 而 1 次 U-系统的函数生成元就是 Slantlet [12].

由文献 [4] 定义的构造算法可以构造出“一类”分段多项式正交函数系, 且都是完备的, 根据不同的光滑性条件可构造出不同的分段多项式正交函数系, 并且, 所构造的分段多项式正交系有一个明显的特征, 也就是说, 它们的基是用函数生成元经过  $2^n$  ( $n$  是正整数) 倍压缩后, 再交替地使用复制与反复制方法而得到, 且函数生成元的分段点在  $x = \frac{1}{2}$  处, 因此, 本文称文献 [8] 所构造的正交系为二进制 U-系统 (binary U-system, BU-系统). 如果考虑用  $3^n$  倍、 $4^n$  倍压缩或者其他倍数压缩, 是否可以构造出不同于文 [8] 的分段多项式正交系呢? 本文扩展了文献 [8] 的构造算法, 构造了一类四进制 U-系统 (Quaternary U-System, QU-系统), 然后用 Fourier-QU 系数表示几何图形与图像轮廓线, 并对几何形状进行频谱分析, 从而得到了一类新的分段多项式描述子 (即 QU 描述子), 最后, 通过实验验证了用有限的 Fourier-QU 系数表示几何图形或图像轮廓线是非常有效的, 同时也证实了 QU 描述子是一类有效的多项式描述子.

## 2 四进制 U-系统的构造

为了描述方便, 我们引进符号  $\mathbb{Z} \triangleq \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{Z}^+ \triangleq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbf{I}_k \triangleq \{0, 1, \dots, k\}$ , 运算符  $[\cdot]$  表示取整运算. 像文献 [8] 一样, 四进制 U-系统也是由 Legendre 多项式构造出来的.

### 2.1 函数生成元的构造

设  $\varphi_0^{(0)}(x), \varphi_1^{(0)}(x), \dots, \varphi_{r-1}^{(0)}(x)$  是  $[0, 1]$  上次数小于  $r$  的 Legendre 多项式,  $r \in \mathbb{Z}^+$ , 按照下面的定义构造  $r-1$  次 QU-系统的函数生成元  $\varphi_k^{(1)}(x)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

- (A)  $\varphi_k^{(1)}$  是分段点只在  $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  处的分段  $r-1$  次多项式;
- (B)  $\varphi_k^{(1)}(x)|_{\frac{1}{2} < x < 1} = (-1)^{r+k} \varphi_k^{(1)}(1-x)|_{0 < x < \frac{1}{2}}$ ;
- (C)  $\langle \varphi_k^{(i)}(x), \varphi_l^{(j)}(x) \rangle = \int_0^1 \varphi_k^{(i)}(x) \varphi_l^{(j)}(x) dx = \delta(i-j) \delta(k-l)$ ;
- (D)  $x_0 = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  处定义为  $\varphi_k^{(1)}(x_0) = \frac{1}{2} (\lim_{x \rightarrow x_0^-} \varphi_k^{(1)} + \lim_{x \rightarrow x_0^+} \varphi_k^{(1)})$ , 且  $\varphi_k^{(1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_k^{(1)}$ ,  $\varphi_k^{(1)}(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi_k^{(1)}$ .

显然, 按照上述的定义最多可以构造  $3r$  个函数生成元 (见定理 1).

### 2.2 迭代生成其他函数

假设  $\varphi_k^{(1)}$ ,  $k \in \mathbf{I}_{3r-1}$  是由上述定义所构造的  $r-1$  次 QU-系统的函数生成元, 那么, 把函数生成元压缩 4 倍之后, 交替地使用正复制与反复制的方法, 就可以构造出  $r-1$  次 QU-系统的其他基函数,

具体地说, 按照式 (1) 生成  $r-1$  次 QU-系统的其他基函数.

$$\varphi_{4k+i}^{(j+1)}(x) = \begin{cases} w_{i,0}\varphi_k^{(j)}(4x), & 0 < x < \frac{1}{4}, \\ w_{i,1}\varphi_k^{(j)}(2-4x), & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \\ w_{i,2}\varphi_k^{(j)}(4x-2), & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}, \\ w_{i,3}\varphi_k^{(j)}(4-4x), & \frac{3}{4} < x < 1, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $j \in \mathbb{Z}^+$ ,  $k \in \mathbf{I}_{3r-4j-1-1}$ ,  $i \in \mathbf{I}_3$ ,  $w_{i,j}$  为 4 阶 Walsh 矩阵的元素,  $\varphi_k^{(j+1)}(x)$  在间断点、端点的定义与生成元相同. 记

$$\mathcal{U}_{r-1} \triangleq \{\varphi_0^{(0)}, \dots, \varphi_{r-1}^{(0)}, \varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_{3r-1}^{(1)}, \varphi_{4k+i}^{(j+1)} : j \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbf{I}_{3r-4j-1-1}, i \in \mathbf{I}_3\}, \quad (2)$$

那么, 由式 (2) 所定义的函数序列就是  $r-1$  次 QU-系统, 其中  $r \in \mathbb{Z}^+$ .

### 2.3 四进制 U- 系统的存在性

按函数生成元的定义, 当  $r > 1$  时, 所构造的  $r-1$  次 QU-系统并不是唯一的, 在实际应用中, 可以根据需要构造不同的 QU-系统, 比如: 在信号与图像处理中, 一般要求所构造的 QU-系统在做正交变换之后, 变换域中的能量尽量地集中在少数几个系数上; 在几何形状中表示中, 为了能准确地表示各种几何图形, 会对基函数的光滑性提出不同的要求. 下面的定理说明了 QU-系统的存在性.

**定理 1** 假设  $r \in \mathbb{Z}^+$ , 根据  $r-1$  次 QU-系统的函数生成元的定义, 可以由  $[0, 1]$  区间上次数小于  $r$  的 Legendre 多项式构造出  $3r$  个函数生成元  $\varphi_0^{(1)}(x)$ ,  $\varphi_1^{(1)}(x)$ ,  $\dots$ ,  $\varphi_{3r-1}^{(1)}(x)$ , 这些函数生成元是一类分段多项式, 并且满足下列条件:

$$(A) \text{ 分段多项式 } \varphi_k^{(1)}(x) \text{ 的阶为 } r-1, k \in \mathbf{I}_{3r-1}; \quad (3)$$

$$(B) \varphi_k^{(1)}(x)|_{\frac{1}{2} < x < 1} = (-1)^{r+k} \varphi_k^{(1)}(1-x)|_{0 < x < \frac{1}{2}}; \quad (4)$$

$$(C) S^-(\varphi_k^{(1)}) = r+k, k \in \mathbf{I}_{3r-1}; \quad (5)$$

其中  $S^-(f)$  表示函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上的变号数 (参见文献 [8,13]).

由于 BU-系统是 QU-系统的特例, 因此定理 1 成立. 定理 1 表明一定可以构造  $3r$  个函数生成元, 但是, 所构造的函数生成元不可能都连续, 即有下面的定理成立.

**定理 2** 若函数生成元满足条件 (3)~(5), 那么函数生成元不可能全部在  $[0, 1]$  上连续.

### 2.4 构造实例

显然, 零次 QU-系统 (即  $r=1$ ) 就是 Walsh 函数系, 当  $r=2, 3, 4$  时, 如果要求函数生成元的变号数严格递增且光滑性逐渐减弱, 那么可以构造如表 1 所示的函数生成元 (但不是唯一的), 表 1 只给出了  $(0, \frac{1}{2})$  区间上的函数生成元表达式, 而区间  $(\frac{1}{2}, 1)$  上的函数生成元表达式可由式 (4) 确定.

## 3 QU- 系统的性质

### 3.1 正交性与变号数

1) 正交性.

表 1 当  $r=2,3,4$  时,  $1\sim 3$  次 QU-系统的表达式,  $x \in (0, \frac{1}{2})$

Table 1 Expressions of function-generators of a QU-system of degree  $1\sim 3$  for  $x \in (0, \frac{1}{2})$

$r$	$\varphi_k^{(1)}$	$0 < x < \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$
2	$\varphi_0^{(1)}$	$\sqrt{3}(-1+4x)$	$\sqrt{3}(-1+4x)$
	$\varphi_1^{(1)}$	$\sqrt{\frac{3}{7}}(-3+22x)$	$\sqrt{\frac{3}{7}}(5-10x)$
	$\varphi_2^{(1)}$	$\sqrt{3}(-1+8x)$	$\sqrt{3}(3-8x)$
	$\varphi_3^{(1)}$	$\frac{1}{\sqrt{7}}(-1+12x)$	$\frac{1}{\sqrt{7}}(11-36x)$
	$\varphi_4^{(1)}$	$-1+12x$	$-5+12x$
	$\varphi_5^{(1)}$	$-1+12x$	$-5+12x$
3	$\varphi_0^{(1)}$	$2\sqrt{6}(-3x+14x^2)$	$2\sqrt{6}(-2+13x-18x^2)$
	$\varphi_1^{(1)}$	$\sqrt{\frac{15}{173}}(9-150x+406x^2)$	$\sqrt{\frac{15}{173}}(-23+106x-106x^2)$
	$\varphi_2^{(1)}$	$\sqrt{\frac{3}{7}}(5-74x+192x^2)$	$\sqrt{\frac{3}{7}}(-11+54x-64x^2)$
	$\varphi_3^{(1)}$	$\frac{1}{\sqrt{173}}(13-332x+1240x^2)$	$\frac{1}{\sqrt{173}}(-187+1268x-1960x^2)$
	$\varphi_4^{(1)}$	$\sqrt{\frac{2}{7}}(1-26x+100x^2)$	$\sqrt{\frac{2}{7}}(-19+134x-220x^2)$
	$\varphi_5^{(1)}$	$\sqrt{3}(1-28x+120x^2)$	$\sqrt{3}(17-92x+120x^2)$
	$\varphi_6^{(1)}$	$\sqrt{3}(1-28x+120x^2)$	$\sqrt{3}(17-92x+120x^2)$
	$\varphi_7^{(1)}$	$1-32x+160x^2$	$-25+128x-160x^2$
	$\varphi_8^{(1)}$	$1-32x+160x^2$	$-25+128x-160x^2$
4	$\varphi_0^{(1)}$	$\frac{\sqrt{35}}{17}(3-360x^2+992x^3)$	$\frac{\sqrt{35}}{17}(35-384x+1176x^2-1056x^3)$
	$\varphi_1^{(1)}$	$\sqrt{\frac{14}{29}}(27x-333x^2+814x^3)$	$\sqrt{\frac{14}{29}}(32-357x+1203x^2-1234x^3)$
	$\varphi_2^{(1)}$	$\frac{\sqrt{35}}{17}(-11+306x-1842x^2+3072x^3)$	$\frac{\sqrt{35}}{17}(53-462x+1230x^2-1024x^3)$
	$\varphi_3^{(1)}$	$\sqrt{\frac{10}{667}}(-29+885x-5637x^2+9758x^3)$	$\frac{\sqrt{10}}{667}(195-1803x+5115x^2-4578x^3)$
	$\varphi_4^{(1)}$	$\frac{\sqrt{3}}{17}(-11+476x-3984x^2+8512x^3)$	$\frac{\sqrt{3}}{17}(325-3556x+12144x^2-12992x^3)$
	$\varphi_5^{(1)}$	$\frac{1}{\sqrt{23}}(-3+132x-1128x^2+2464x^3)$	$\frac{1}{\sqrt{23}}(109-1212x+4248x^2-4704x^3)$
	$\varphi_6^{(1)}$	$\sqrt{5}(-1+48x-456x^2+1120x^3)$	$\sqrt{5}(-49+432x-1224x^2+1120x^3)$
	$\varphi_7^{(1)}$	$\sqrt{5}(-1+48x-456x^2+1120x^3)$	$\sqrt{5}(-49+432x-1224x^2+1120x^3)$
	$\varphi_8^{(1)}$	$\sqrt{3}(-1+56x-624x^2+1792x^3)$	$\sqrt{3}(95-776x+2064x^2-1792x^3)$
	$\varphi_9^{(1)}$	$\sqrt{3}(-1+56x-624x^2+1792x^3)$	$\sqrt{3}(95-776x+2064x^2-1792x^3)$
	$\varphi_{10}^{(1)}$	$-1+60x-720x^2+2240x^3$	$-129+1020x-2640x^2+2240x^3$
$\varphi_{11}^{(1)}$	$-1+60x-720x^2+2240x^3$	$-129+1020x-2640x^2+2240x^3$	

定理 3 式 (2) 所定义的函数序列是  $L^2[0, 1]$  上的标准正交系, 即

$$\int_0^1 \varphi_k^{(i)}(x)\varphi_l^{(j)}(x)dx = \delta(i-j)\delta(k-l), \varphi_k^{(i)}, \varphi_l^{(j)} \in \mathcal{U}_{r-1},$$

其中,  $i, j \in \mathbb{Z}$ ; 若  $i = 0$ , 则  $k \in \mathbf{I}_{r-1}$ , 否则,  $k \in \mathbf{I}_{3r \cdot 4^{i-1} - 1}$ ; 若  $j = 0$ , 则  $l \in \mathbf{I}_{r-1}$ , 否则,  $l \in \mathbf{I}_{3r \cdot 4^{j-1} - 1}$ .

2) 变号数.

重排 QU-系统的基函数后, 可以使得它的基函数的变号数严格递增, 即定理 4 成立.

定理 4 假设  $r \in \mathbb{Z}^+$ , 且  $r-1$  次 QU-系统的函数生成元  $\varphi_0^{(1)}(x), \varphi_1^{(1)}(x), \dots, \varphi_{3r-1}^{(1)}(x)$  满足式 (3)~(5), 那么变号数  $S^-(\varphi_k^{(j)}) = r \cdot 4^{(j-1)} + k, k \in \mathbf{I}_{3r \cdot 4^{j-1} - 1}, j \in \mathbb{Z}^+; S^-(\varphi_k^{(0)}) = k, k \in \mathbf{I}_{r-1}$ .

若采用记号  $\varphi_i$  表示基函数  $\varphi_k^{(j)}$ , 其中  $\varphi_k^{(j)} \in \mathcal{U}_{r-1}$ , 而  $i \in \mathbb{Z}$  表示基函数的变号数, 则有下面的关系成立, 即

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(0)}(x), & \text{如果 } i \in \mathbf{I}_{r-1}, \\ \varphi_k^{(j)}(x), & \text{如果 } i = r \cdot 4^{j-1} + k, k \in \mathbf{I}_{3r \cdot 4^{j-1} - 1}, j \in \mathbb{Z}^+. \end{cases} \quad (6)$$

### 3.2 收敛性

1) 多项式模型的精确表示.

**定理 5** 设  $f(x)$  是  $[0, 1]$  区间上的分段  $r-1$  次多项式, 且分段点在二进制有理点处, 即  $x = \frac{p}{q}$ ,  $q = 2^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $p \in \mathbf{I}_{q-1}$ , 那么  $f(x)$  可用式 (2) 的有限项的线性组合表示, 即  $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \varphi_\lambda$ ,  $\Lambda$  为有限的指标集,  $\varphi_\lambda$  由式 (6) 定义.

2) 收敛性.

记  $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$  为  $f(x)$  的  $r-1$  次 Fourier-QU 级数, 称  $a_k \triangleq \langle f, \varphi_k \rangle = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx$  为 Fourier-QU 系数, 其中  $\varphi_k$  由式 (6) 给定, 如果把 Fourier-QU 级数的前  $n$  项部分和记为

$$S_n(f) \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x). \quad (7)$$

那么, 有下面两定理成立, 即:

**定理 6** 若  $f(x) \in L^2[0, 1]$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_{L^2} = 0$ .

**定理 7** 若  $f \in C[0, 1]$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_{r \cdot 4^n}(f)\|_{L^\infty} = 0$ . 且存在连续函数  $f \in C[0, 1]$ , 使得式 (7) 的部分和不一致收敛于  $f$ , 其中  $r-1$  表示 QU-系统的次数.

定理 6 与 7 的证明可以参见文献 [13], 而定理 7 的反例构造可以参见文献 [8], 其中定理 6 说明了 QU-系统是  $L^2[0, 1]$  上的一类完备的正交函数系.

## 4 QU-系统的计算

当已知 QU-系统的函数生成元之后, 可以用式 (1) 迭代生成其他基函数, 但经过复制与反复制得到的基函数的表达式过于复杂, 因此, 直接计算基函数值或者直接计算 Fourier-QU 系数, 就变得非常困难. 下面考虑 QU-系统的计算问题.

### 4.1 基函数值的计算

如果用计算机程序设计语言计算  $r-1$  次 QU-系统的基函数值, 那么最简捷的方式就是通过程序语言的函数嵌套实现, 但是, 函数嵌套并不是很直观, 下面我们讨论基函数的计算公式. 假设  $x \in [0, 1]$ , 那么, 当  $n < 4r$  时, 可以直接代入到相应的 Legendre 多项式和函数生成元的表达式计算基函数值; 当  $n \geq 4r$  时, 可用定理 8 进行计算.

**定理 8** 若  $n \geq 4r$ ,  $x \in [0, 1]$ , 取  $j = \lceil \log_4(\frac{n}{r}) \rceil + 1$ ,  $k = n - r \cdot 4^{j-1}$ ,  $p = \lfloor \frac{k}{4^{j-1}} \rfloor$ ,  $q = k - p \cdot 4^{j-1}$ , 那么

$$\varphi_n(x) = \left( \prod_{i=1}^{j-1} w_{u_i, g_i} \right) \varphi_p^{(1)} \left( (-1)^{v_{j-1}} 4^{j-1} x + 2(-1)^{v_{j-1}+1} \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + (-1)^{v_{j-1}+1} + 1 \right),$$

其中,  $u_i$  是  $q$  的四进制位值, 即  $q = (u_{j-1}u_{j-2} \cdots u_1)_Q$ ;  $v_i$  是  $x$  的四进制位值, 即  $x = (0.v_1v_2 \cdots v_{j-1})_Q$ ,  $N = (v_1v_2 \cdots v_{j-1})_Q$ ,  $(\cdot)_Q$  表示 4 进制数; 而  $(g_1g_2 \cdots g_{j-1})_G$  为  $N$  的四进制 Gray 码,  $w_{i,j}$  为 4 阶 Walsh 矩阵的元素,  $\varphi_p^{(1)} \in \mathcal{U}_{r-1}$ .

若  $N = (v_1v_2 \cdots v_{j-1})_Q$ ,  $N$  的四进制 Gray 码  $(g_1g_2 \cdots g_{j-1})_G$  的计算方法是:  $g_1 = v_1$ ,  $g_2 = v_1 \oplus v_2, \dots, g_n = v_{n-1} \oplus v_n$ , 其中, 符号  $\oplus$  表示四进制异或运算, 即  $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 0 \oplus 2 = 2, 0 \oplus 3 = 3, 1 \oplus 0 = 3, 1 \oplus 1 = 2, 1 \oplus 2 = 1, 1 \oplus 3 = 0, 2 \oplus 0 = 0, 2 \oplus 1 = 1, 2 \oplus 2 = 2, 2 \oplus 3 = 3, 3 \oplus 0 = 3, 3 \oplus 1 = 2, 3 \oplus 2 = 1, 3 \oplus 3 = 0$ .

### 4.2 Fourier-QU 系数的计算

假设  $n \in \mathbb{Z}$  是要计算的  $r-1$  次 Fourier-QU 系数的索引号, 其中积分区间为  $[a, b]$ , 且  $0 \leq a < b \leq 1$ . 如果  $n < r$ , 那么  $a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n^{(0)}(x)dx$ ; 如果  $r \leq n < 4r$ , 那么  $a_n = \int_a^b f(x)\varphi_{n-r}^{(1)}(x)dx$ ; 若  $n \geq 4r$ , 则可以用定理 9 计算  $a_n$ .

**定理 9** 当  $n \geq 4r$  时, 取  $j = \lceil \log_4(\frac{n}{r}) \rceil + 1, k = n - r \cdot 4^{j-1}, p = \lfloor \frac{k}{4^{j-1}} \rfloor, q = k - p \cdot 4^{j-1}$ , 记

$$A = \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} v_i}}{4^{j-1}}, \quad B = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^{i-1} v_i}}{4^i} \left( v_i + \frac{1 - (-1)^{v_i}}{2} \right),$$

$$C = \begin{cases} 0, & \frac{a-B}{A} < 0, \\ \frac{a-B}{A}, & 0 \leq \frac{a-B}{A} \leq 1, \\ 1, & \frac{a-B}{A} > 1, \end{cases} \quad D = \begin{cases} 0, & \frac{b-B}{A} < 0, \\ \frac{b-B}{A}, & 0 \leq \frac{b-B}{A} \leq 1, \\ 1, & \frac{b-B}{A} > 1, \end{cases}$$

那么,  $a_n = \frac{1}{4^{j-1}} \sum_{v_1=0}^3 \cdots \sum_{v_{j-1}=0}^3 (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} v_i} (\prod_{i=1}^{j-1} w_{u_i, v_i} \int_C^D f(Ax+B)\varphi_p^{(1)}(x)dx)$ . 其中,  $u_i$  是  $q$  的四进制位, 即  $q = (u_{j-1}u_{j-2} \cdots u_1)_Q, \varphi_p^{(1)} \in \mathcal{U}_{r-1}$ .

## 5 QU- 系统的应用

### 5.1 函数近似

对于  $L^2[0, 1]$  中的可积函数  $f$ , 用 Fourier-QU 级数的前  $n$  项部分和近似, 产生的截断误差可用

$$E_{rr} = \|f - S_n(f)\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (f - S_n(f))^2 dx \tag{8}$$

进行估计. 为了验证 Fourier-QU 级数的数据逼近性能, 分别考虑  $[0, 1]$  区间上的连续函数  $f(x) = x^2 + \sin(3\pi x + 1)$  和间断函数

$$g(x) = \begin{cases} 32x^2 - 12x + 1, & 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 2 \sin(10x - 2) + 1, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 3e^{(3x-2)} + 2, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 40x^2 - 75x + 34, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

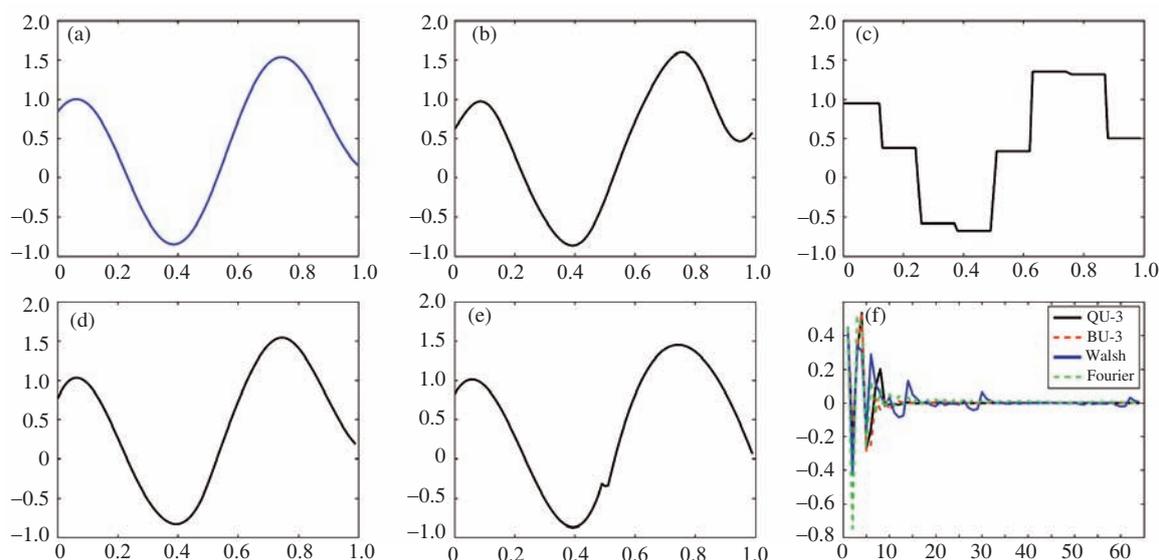


图 1 Fourier, Walsh, QU-3 与 BU-3 的前 8 项近似连续函数的结果

Figure 1 Graph of  $f(x)$  and its reconstructed graphs using the first 8 terms of Fourier, Walsh, QU-3 and BU-3 series, and Frequency coefficients. (a) Original; (b) Fourier; (c) Walsh; (d) QU-3; (e) BU-3; (f) frequency coefficients

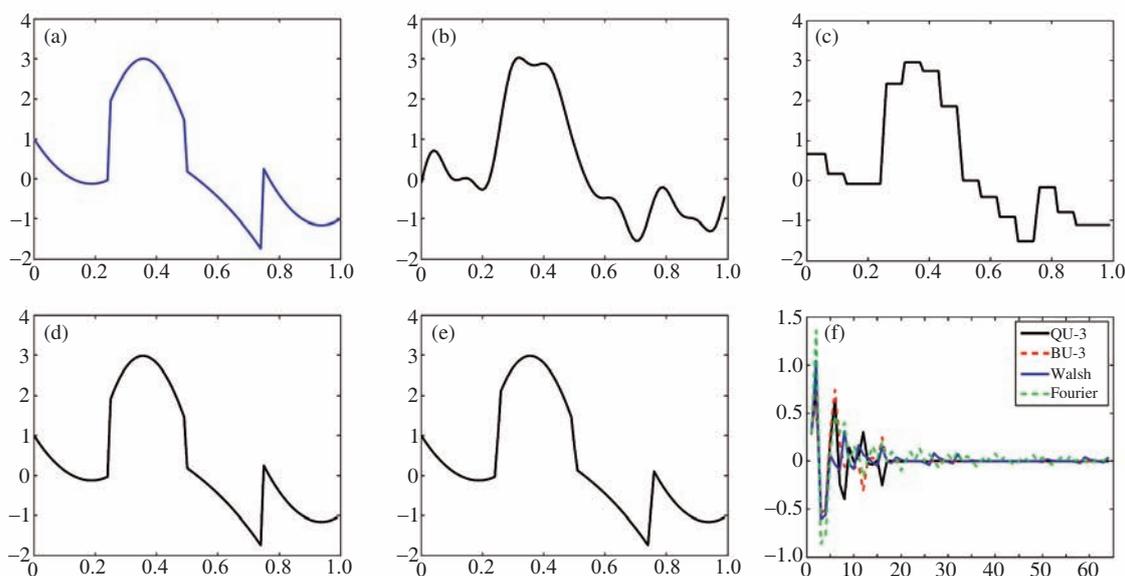


图 2 Fourier, Walsh, QU-3 与 BU-3 的前 16 项近似间断函数的结果

Figure 2 Graph of  $g(x)$  and its reconstructed graphs using the first 16 terms of Fourier, Walsh, QU-3, and BU-3 series, and Frequency coefficients. (a) Original; (b) Fourier; (c) Walsh; (d) QU-3; (e) BU-3; (f) frequency coefficients

的逼近情况, 即用 3 次 Fourier-QU 级数 (简称 QU-3) 的前 8 项进行近似, 并与 Fourier 级数、Walsh 级数以及 3 次 Fourier-BU 级数 (简称 BU-3) 进行对比. 图 1 是连续函数  $f(x)$  的近似结果, 图 2 是间断函数  $g(x)$  的近似结果, 表 2 是用前 8 项与前 16 项分别逼近  $f(x)$  与  $g(x)$  的近似误差, 其中近似误差用式 (8) 的离散形式进行计算 (取 101 个离散点进行统计), 即  $E_{rr} = \sum_{i=0}^{100} (f(x_i) - S_n(f)(x_i))^2$ . 由此可以看出, 在一元函数逼近方面, 用 Fourier-QU 级数的少数几项近似就可以达到理想的效果, 而用

表 2 用级数的部分和近似连续函数与间断函数的误差  
Table 2 Approximation error with the partial sum of a series

Function	Terms	Fourier	Walsh	BU-3	QU-3
$f(x)$	8	0.8563	4.7877	0.3034	0.0378
$g(x)$	16	9.0380	4.6750	2.3914	0.0056

Fourier 级数的少数几项近似时, 在端点与间断点处有较大的误差, 用 Walsh 级数的有限项近似时, 则会出现阶梯状. 由图 1(e) 也可以看出, 用 Fourier-BU 级数的少数几项近似连续函数时, 会在  $x = \frac{1}{2}$  处出现“奇异”现象. 由图 1(f) 与图 2(f) 可知, 除前面几项 Fourier-QU 系数的绝对值较大外, 其余系数都近似为 0.

## 5.2 图像边界的 QU 表示

由于 QU-系统既含有连续的基函数也含有间断的基函数, 因此可以用 Fourier-QU 级数的部分和精确地表示一类多项式模型的几何图形, 而在 CAGD 的应用中, 一般都采用多项式模型表示几何图形, 所以, 我们可以用 Fourier-QU 级数的有限项和对这类多项式模型进行精确重构. 下面我们使用样条模型表示图像轮廓线, 然后用有限的 Fourier-QU 系数重构图像轮廓线, 并对图像进行分析与处理.

用 Fourier-QU 级数表示数字图像的几何边界主要包括 3 个步骤: (1) 对输入的图像进行预处理, 并转换为二进制图像后, 提取图像轮廓线; (2) 对图像轮廓线进行抽样或延拓处理, 并用 3 次样条表示图像轮廓线; (3) 计算图像轮廓线的 Fourier-QU 系数.

### 1) 抽样或延拓处理.

由定理 5 可知, 只有一类分段点在  $x = \frac{m}{2^n} (m \in \mathbf{I}_{2^n-1} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}^+)$  处的分段多项式, 才能用 Fourier-QU 级数的有限项精确表示. 如果图像轮廓线能被抽样成  $2^n + 1$  个点的点列 (其中第一个点和最后一个点是相同的点, 即图像轮廓线是闭合曲线), 那么就可以用  $2^n$  段样条表示, 然后就能用 Fourier-QU 级数的有限项精确地表示该样条模型. 假设所提取的轮廓线的长度为  $N + 1$ , 如果想抽样成指定的  $2^L$  段,  $L$  为整数, 那么, 当  $N > 2^L$  时, 可以采取均匀抽样的方法把轮廓线抽样成  $2^L + 1$  个点的点列; 当  $N < 2^L$  时, 可以用轮廓线的最后一个点做等值延拓, 即用最后一个点的值进行填充, 使得轮廓线的长度为  $2^L + 1$ .

### 2) 图像边界的 QU 表示.

当图像边界  $f(t)$  抽样成  $2^L$  段后, 可以用  $r$  次样条表示图像边界, 这样便可以得到  $2^L$  段的  $r$  次多项式, 即图像边界可以重新表示为  $f(t) \approx x(t) + iy(t)$ , 其中  $x(t)$  与  $y(t)$  是  $[0, 1]$  区间上的分段  $r$  次多项式,  $i = \sqrt{-1}$ , 且分段点在  $t = \frac{q}{2^L} (q \in \mathbf{I}_{2^L-1} \setminus \{0\})$  处, 即  $x(t) = \{x_q(t), t \in [\frac{q-1}{2^L}, \frac{q}{2^L}]: q \in \mathbf{I}_{2^L} \setminus \{0\}\}$ ,  $y(t) = \{y_q(t), t \in [\frac{q-1}{2^L}, \frac{q}{2^L}]: q \in \mathbf{I}_{2^L} \setminus \{0\}\}$ , 其中  $x_q(t)$  与  $y_q(t)$  为  $r$  次多项式. 因此, 图像边界可以用 Fourier-QU 级数的前  $N$  项表示为

$$f(t) \approx x(t) + iy(t) = \left( \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k^{(x)} + i \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k^{(y)} \right) \varphi_k,$$

其中,

$$\lambda_k^{(x)} = \int_0^1 x(t) \varphi_k(t) dt, \lambda_k^{(y)} = \int_0^1 y(t) \varphi_k(t) dt, \quad (9)$$

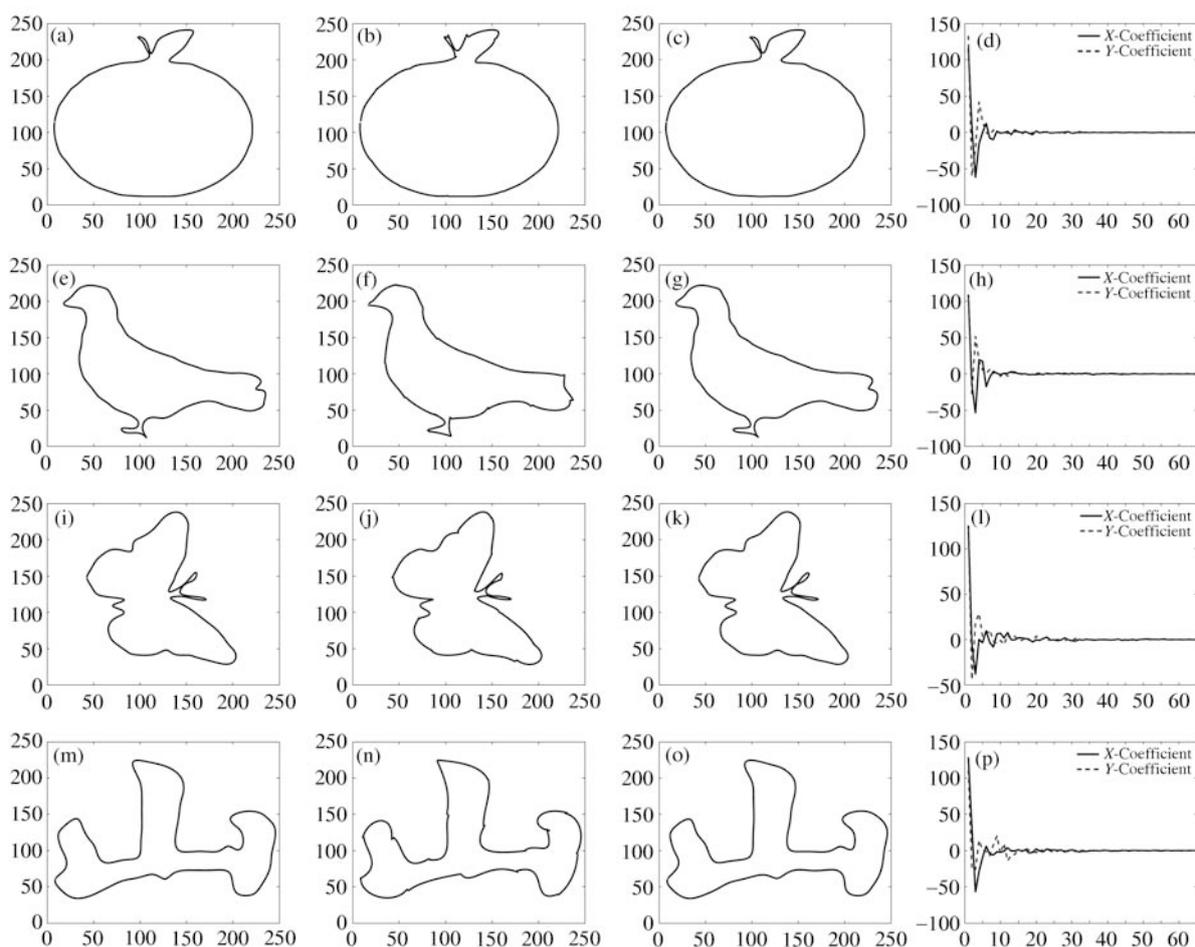


图 3 图像轮廓线的 64 项 Fourier-QU 系数表示与频谱系数

**Figure 3** Image edges, reconstructed edges, and coefficient curves. (a)(e)(i)(m) Original edges; (b)(f)(j)(n) reconstructed edges with 64 coefficients of QU-3; (c)(g)(k)(o) reconstructed edges with 64 Fourier coefficients; (d)(h)(l)(p) coefficients of QU-3 in the  $x$ - and  $y$ -directions. (a) Edge of apple; (b) apple, QU-3; (c) apple, Fourier; (d) coefficients of apple; (e) edge of bird; (f) bird, QU-3; (g) bird, Fourier; (h) coefficients of bird; (i) edge of butterfly; (j) butterfly, QU-3; (k) butterfly, Fourier; (l) coefficients of butterfly; (m) edge of word; (n) word, QU-3; (o) word, Fourier; (p) coefficients of word

其中,  $\varphi_k$  由式 (6) 确定. 如果用 3 次样条表示图像边界, 那么可以用 3 次 Fourier-QU 级数的有限项精确表示该 3 次样条模型, 所用项数不会超过  $4^{\frac{L+1}{2}+1}$ ; 如果用 2 次样条表示图像边界, 那么可以用 2 次 Fourier-QU 级数的有限项精确重构该 2 次样条模型, 所用项数不会超过  $3 \cdot 4^{\frac{L+1}{2}}$ .

图 3 是 4 幅图像用 3 次 Fourier-QU 级数与 Fourier 级数的 64 项重构图像轮廓线的结果, 与原图像轮廓线对比, 用有限的 Fourier-QU 系数可以比较准确地描述图像轮廓线, 这个结果与 Fourier 级数基本相同, 且除前面 10 多项 Fourier-QU 系数之外, 其余的频率系数都近似为 0, 这样的结果说明, 可以用有限的 Fourier-QU 系数来描述图像的轮廓线, 由此可以得到一类新的形状描述子, 即 QU 描述子.

### 5.3 QU 描述子

1) QU 描述子的定义与性质.

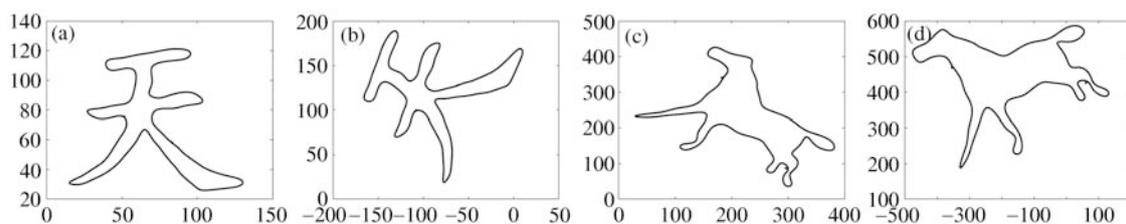


图 4 图像 F1 与 F2 在变换前后的轮廓线与能量值

**Figure 4** Original and transformed shapes of images F1 and F2, together with energy values. (a) Original F1,  $E=8.2052$ ; (b) transformed F1,  $E=8.2052$ ; (c) original F2,  $E=7.6240$ ; (d) transformed F2,  $E=7.6240$

由图 3 的实验可知, 我们可以用 Fourier-QU 级数的前  $N$  项系数来描述图像的几何边界, 假设平面曲线  $f(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $\lambda_k^{(x)}$  与  $\lambda_k^{(y)}$  为  $f(t)$  在  $X$  方向与  $Y$  方向的 Fourier-QU 系数, 如式 (9) 所示. 记  $\lambda(k) = \lambda_k^{(x)} + i\lambda_k^{(y)}$ , 那么称  $\lambda(k)$  为平面曲线  $f(t)$  的第  $k$  个 QU 描述子, 假设  $d(k) = \frac{\|\lambda(k)\|}{\|\lambda(1)\|}$ , 其中,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , 那么称  $d(k)$  为  $f(t)$  的第  $k$  个归一化 QU 描述子. 由文献 [9,10], 我们可以直接得到下面的命题.

**定理 10** 曲线  $f(t)$  经过平移  $x_0$ 、尺度  $\alpha$  与旋转  $\theta$  变换后的第  $k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 个描述子为  $\lambda'(k) = \alpha e^{i\theta}[\lambda(k) + x_0\delta(k)]$ , 其中,  $\lambda(k)$  为  $f(t)$  的第  $k$  ( $k \in \mathbb{Z}^+$ ) 个描述子. 且归一化描述子  $d(k)$  是一类平移、尺度与旋转不变量.

图 4 是两幅图像 F1 与 F2 的轮廓线以及经过平移、旋转与尺度变换后的轮廓线, 图 4 的下方是原始轮廓线的“能量”值与变换后的轮廓线的“能量”值, 其中平移量为  $(-30, 20)$ 、旋转角度为  $\frac{\pi}{3}$ 、伸缩尺度为 1.5, “能量”值用归一化 QU 描述子的和进行计算, 即  $E = \sum_{k=1}^N d(k)$ . 由实验可以看出定理 10 是成立的.

2) 图像间的 QU 距离.

由于归一化 QU 描述子是一类平移、尺度、旋转不变量, 因此, 可以用它来定义图像间的 QU 距离. 假设  $d_A(k)$  与  $d_B(k)$  是图像 A 与 B 的第  $k$  个归一化 QU 描述子, 定义

$$\Delta_{AB} = \sqrt{\sum_{k=1}^N (d_A(k) - d_B(k))^2}$$

为图像 A 与 B 之间的 QU 距离. 图 5 是 MPEG7-CE-1 中 spring 类的 5 幅图像, 图 6 是取自不同类的 5 幅图像, 表 3 是 spring 类中 5 幅图像之间的 QU 距离, 表 4 是不同类中 5 幅图像间的 QU 距离. 由表 3 可以看出, 同类图像之间的 QU 距离较小, 由于 I4 与其他 4 个 Spring 的弯曲方向不同, 因而与其他 4 个 Spring 的 QU 距离较大, 由于表 4 的图像来自不同的图像类, 因而它们之间的距离较大. 这就表明 QU 距离越大, 图像间的相似性较小, 反之较大. 因此, QU 描述子是一类有效的形状描述子.

## 6 结论

本文给出了一类四进制 U-系统的构造、性质与计算公式, 文中相关定理的证明可参见文献 [13,14]. 由于 QU-系统是一类  $L^2[0, 1]$  中的完备的正交分段多项式系, 其基函数的分段点在  $[0, 1]$  区间内的四进制有理数点处, 并且它既含有连续的基函数也含有间断的基函数, 因此, 可以使用 Fourier-QU 级数的有限项精确地表示一类多项式信号. 另外, 用 Fourier-QU 级数的有限项近似一元平方可积函数时,

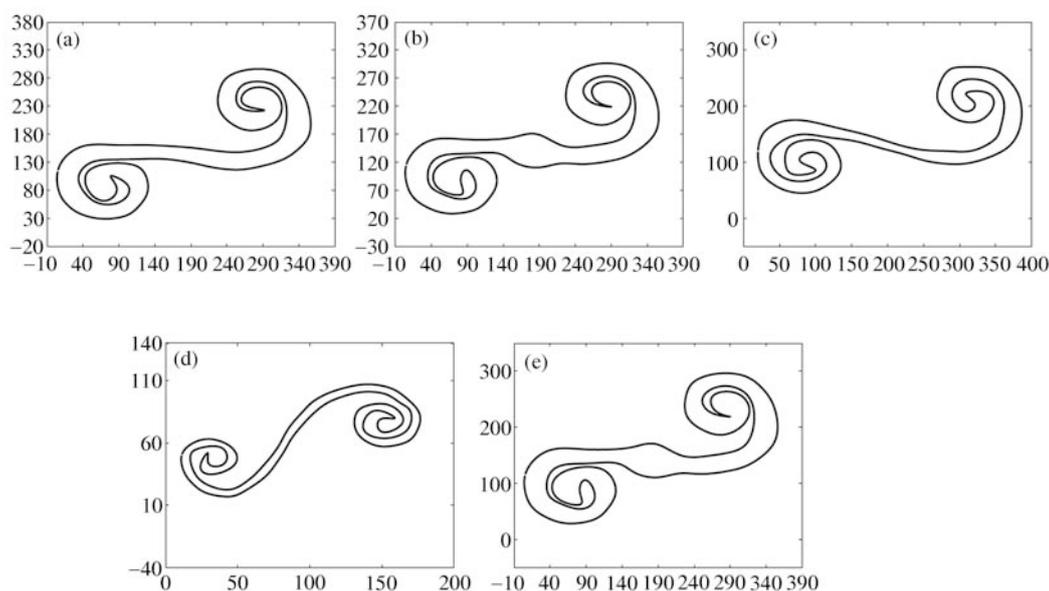


图 5 Spring 类中的 5 幅图像的轮廓线

Figure 5 Image edges of five springs. (a) I1; (b) I2; (c) I3; (d) I4; (e) I5

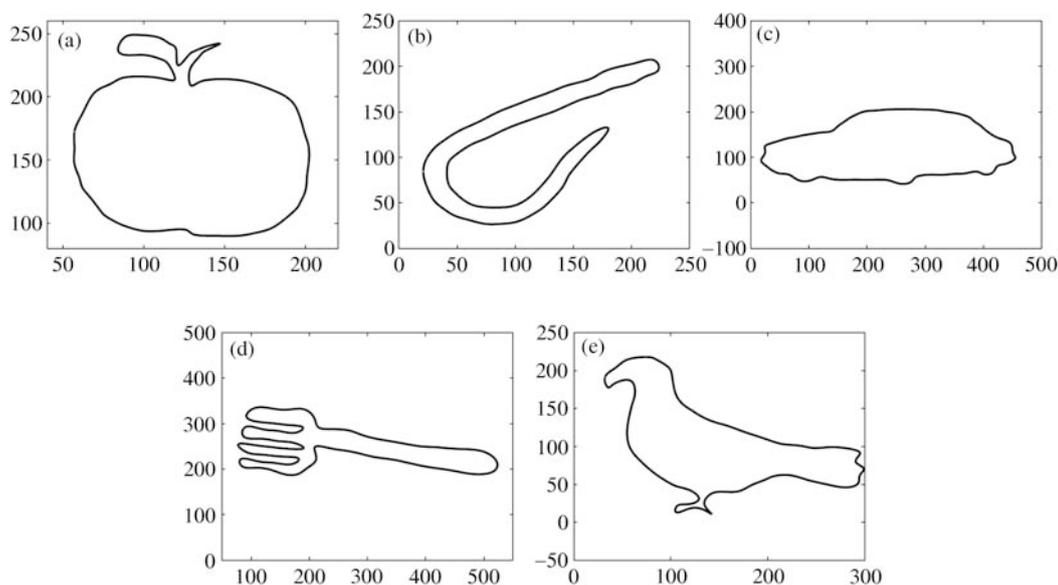


图 6 不同类型的 5 幅图像的轮廓线

Figure 6 Image edges of five different image classes. (a) I6; (b) I7; (c) I8; (d) I9; (e) I10

其收敛速率明显地优于 Fourier 级数、Walsh 级数, 且近似误差小于 Fourier-BU 级数, 因此, 可以用有限的 Fourier-QU 系数描述几何图形或图像轮廓线, 这样我们可以得到一类新的多项式描述子——QU 描述子, 并且归一化 QU 描述子是一类基于平移、旋转与尺度变换的不变量. 由本文的方法, 我们还可以构造一类四进制的分段多项式多小波 (简称 QVLet), 其母小波就是 QU-系统的函数生成元, 而 QU-系统的基函数可以用 QVLet 的小波函数线性表示 (参见文献 [13]), 因此, QU 正交变换也可以

表 3 Spring 类中的 5 幅图像间的 QU 距离

Table 3 QU distances between the five springs

	I1	I2	I3	I4	I5
I1	0	0.0605	0.3326	1.8089	0.0605
I2	0.0605	0	0.3080	1.7930	0
I3	0.3326	0.3080	0	1.5875	0.3080
I4	1.8089	1.7930	1.5875	0	1.7930
I5	0.0605	0	0.3080	1.7930	0

表 4 不同图像类中的 5 幅图像间的 QU 距离

Table 4 QU distances of the five image classes

	I6	I7	I8	I9	I10
I6	0	1.0687	2.1253	3.2100	1.6211
I7	1.0687	0	2.3893	2.9251	1.9987
I8	2.1253	2.3893	0	2.0626	0.7637
I9	3.2100	2.9251	2.0626	0	2.1132
I10	1.6211	1.9987	0.7637	2.1132	0

通过 QVLets 的级联 (cascade) 算法实现<sup>[13]</sup>. 应用本文的方法, 我们可以构造  $2N$  ( $N$  是正整数) 进制的分段多项式多小波, 但不一定能构造  $2N$  进制的 U-系统, 在文献 [13] 中, 我们给出了能构造出  $2N$  进制 U-系统的充分必要条件, 但还许多问题值得进一步研究.

## 参考文献

- 1 Hu Q Q, Wang G J. A novel algorithm for explicit optimal multi-degree reduction of triangular surfaces. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2008, 51: 13–24
- 2 Huang Y, Wang G Z. An orthogonal basis for the hyperbolic hybrid polynomial space. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2007, 50: 21–28
- 3 Qi D X, Tao C J, Song R X, et al. Representation for a group of parametric curves based on the orthogonal complete U-system. *Chinese J Comput*, 2006, 29: 778–785 [齐东旭, 陶尘钧, 宋瑞霞, 等. 基于正交完备 U-系统的参数曲线图组表达. *计算机学报*, 2006, 29: 778–785]
- 4 Ahmed E O, Mohamed D, Driss A. Affine invariant descriptors using Fourier series. *Pattern Recogn Lett*, 2002, 23: 1109–1118
- 5 Iivari K, Leena L, Juhani R, et al. Multiscale Fourier descriptors for defect image retrieval. *Pattern Recogn Lett*, 2006, 27: 123–132
- 6 Ibrahim E R, Maher A, Mohamed K. Wavelet approximation-based affine invariant shape representation functions. *IEEE Trans Pattern Anal Math Intell*, 2006, 28: 323–327
- 7 Patrick W, Andrew F L. Wavelet descriptors for multiresolution recognition of handprinted characters. *Pattern Recogn*, 1995, 28: 1237–1249
- 8 Feng Y Y, Qi D X. A sequence of piecewise orthogonal polynomials. *SIAM J Math Anal*, 1984, 15: 834–844
- 9 Cai Z C, Ma H, Sun W, et al. Analysis of frequency spectrum for geometric modeling in digital geometry. In: *Proceedings of Wavelet Analysis and Applications*. Basel: Birkhäuser Verlag Basel, 2007. 525–542
- 10 Song R X, Ma H, Wang T J, et al. Complete orthogonal v-system and its applications. *Commun Pur Appl Anal*, 2007, 6: 853–871

- 11 Qi D X. A class of discontinuous orthogonal functions and its applications. *Appl Math J Chin Univ*, 1990, 5: 40–46 [齐东旭. 关于一类非连续的正交函数系及其应用的探讨. *高校应用数学学报*, 1990, 5: 40–46]
- 12 Ivan W S. The slantlet transform. *IEEE Trans Signal Proces*, 1999, 47: 1304–1313
- 13 Xiong G Q. Construction and application of piecewise polynomials system. Ph.D. Dissertation. Guangzhou: School of Information Science and Technology, Sun Yat-Sen University, 2010 [熊刚强. 一类分段多项式正交函数系的构造与应用. 中山大学博士学位论文, 2010]
- 14 Xiong G Q, Li Z F, Guo F H, et al. A class of quaternary orthonormal U-system. *Sci Sin Math*, 2011, 41: 145–163 [熊刚强, 李子丰, 郭芬红, 等. 一类四进制 U-正交函数系. *中国科学: 数学*, 2011, 41: 145–163]

## A class of orthonormal complete piecewise polynomial systems and applications thereof

XIONG GangQiang<sup>1,2\*</sup>, QI DongXu<sup>2,3</sup> & GUO FenHong<sup>2,4</sup>

1 *School of Information Engineering, Guangdong Medical College, Dongguan 523808, China;*

2 *School of Information Science and Technology, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China;*

3 *Faculty of Information Technology, Macao University of Science and Technology, Macao, China;*

4 *Mathematics Department, North China University of Technology, Beijing 100144, China*

\*E-mail: xionggq@yahoo.cn

**Abstract** In the application of geometric graphs and image shape analysis, the Gibbs phenomenon appears if we approximate discontinuous geometric graphs using trigonometric functions, while the approximation effect of Walsh functions is not very good because of its slow convergence. This paper constructs a class of piecewise polynomials systems (referred to as quaternary U-Systems), whose breakpoints only appear at quaternary rational numbers. Such quaternary U-Systems are a class of complete orthonormal systems in  $L^2[0,1]$ . In addition, we also investigate their properties, formulae for basis values and Fourier-QU coefficients, and present a set of explicit expressions for a quaternary U-system of degree  $r$  ( $r=2, 3, 4$ ). Next, we apply a finite Fourier-QU series to represent image edges, and propose using the finite Fourier-QU coefficients to depict geometric graphs and image shapes. As a result, we obtain a new class of polynomial descriptors, called QU descriptors, and prove that unified QU descriptors are invariant under translation, scale, and rotation. Finally, we verify experimentally that the convergence rate of Fourier-QU series is faster than that of Fourier series, Walsh series, and Fourier-BU series in terms of the approximation of the function of a single variable. Furthermore, the experimental results prove that the QU descriptors are a class of practical shape descriptors, and that the QU distance between images can accurately measure their similarity.

**Keywords** piecewise polynomials, orthogonal functions, quaternary U-system, Fourier series, Walsh functions, image edges, shape descriptors



**XIONG GangQiang** was born in 1968. He received the Ph.D. degree in computer software and theory from the Sun Yat-sen University, Guangzhou in 2010. Currently, he is a computer lecturer at Guangdong Medical Collage. His research interests include wavelet analysis and image processing.