

基于最佳圆弧样条逼近的快速距离曲面计算

金小刚 马天驰 冯结青 彭群生

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

摘要 距离曲面是一种常用的隐式曲面,它在几何造型和计算机动画中具有重要的应用价值,但以往在对距离曲面进行多边形化时速度较慢.为了提高点到曲线最近距离计算的效率,提出了一种基于最佳圆弧样条逼近的快速线骨架距离曲面计算方法.该算法对于一条任意的二维 NURBS 曲线,在用户给定的误差范围内,先用最少量的圆弧样条来逼近给定的曲线,从而把点到 NURBS 曲线最近距离的计算问题转化为点到圆弧样条最近距离的计算问题.由于在对距离曲面进行多边形化时,需要大量的点到曲线最近距离的计算,而该算法可以将点到圆弧样条最近距离用很少的计算量来解析求得,故该算法效率很高.该实验表明,算法简单实用,具有很大的应用价值.

关键词 距离曲面 圆弧样条 最近距离 隐式曲面

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2001)05-0486-05

Fast Distance Surface Computation Based on Optimized Arc Spline Approximation

JIN Xiao-gang, MA Tian-chi, FENG Jie-qing, PENG Qun-sheng

(State Key Lab of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou, 310027)

Abstract Implicit surfaces can be used to generate complex topology objects and offer special effects for animators and graphic designers, and they are finding extensive use in a growing number of graphics applications. In contrast to traditional parametric surfaces, implicit surfaces can describe smooth and topology evolving shapes conveniently. Distance surfaces are defined by distance to skeletal elements such as points, curves, surfaces and volumes. In this paper we propose a new fast distance surface computation approach based on optimized arc spline approximation for 2D curve skeletons. For an arbitrary 2D NURBS curve, we first fit it using fewest arc splines within the specified tolerance, and the nearest point to the curve problem is then transferred into the nearest point to an arc spline curve. As a huge times of nearest point computation are involved in the polygonization of distance surfaces, our algorithm is very efficient as the nearest distance from a point to an arc spline curve can be obtained analytically within little computation. Experiments show our algorithm is both simple and useful, and it is of high potential value in practice.

Keywords Distance surface, Arc spline, Nearest point computation, Implicit surface

0 引言

在计算机动画制作中,设计者通常需先设计物体的形状,然后再设置其动画,而且在动画制作中,参数曲面(如 Bezier 曲面、B 样条曲面、NURBS 曲面)和多边形网格为表示物体的两种常用模型.为了

构造物体的三维模型,虽然如今一些动画软件可提供诸如移动控制顶点、拉伸、旋转、蒙皮、倒角、修剪、变形等造型工具,但用这些工具难以生成分叉曲面和融合曲面,而解决这类问题的方法都是采用隐式曲面的造型方法.自 20 世纪 80 年代初 Blinn 和 Nishimura 分别提出元球造型的思想以来^[1,2],作为一种完全不同于传统参数曲面的造型和动画方法,

隐式曲面在计算机动画领域得到了越来越广泛的重视^[3~11]. 这里隐式曲面的定义为满足如下隐式函数的等势面

$$\{P(x, y, z) | \sum F_i(x, y, z) - T = 0\} \quad (1)$$

其中, F_i 为第 i 个贡献源的势函数, T 为一给定的阈值, 如距离曲面即是一种常用的隐式曲面. 设 S_i 为距离曲面的骨架(它可以是点、线和面), 则距离曲面中的势函数 F_i 定义为

$$F_i(P) = f_i(d(P, S_i), R) \quad (2)$$

其中, $d(P, S_i)$ 为点 P 到骨架 S_i 的最短距离; $f_i(r, R)$ 为递减的 C^1 连续函数, 其常用的 C^1 连续函数有 Blinn 的幂函数、Nishimura 的分段二次多项式、Murakami 的四次多项式、Wyvill 的六次多项式等. 本文所采用的势函数为 Wyvill 的六次多项式. 采用具有局部支撑多项式的优点是可以限制每个骨架的影响区域, 从而能提供局部控制, 并减少计算量.

由于许多物体(如自然景物中的树枝、电视中的三维字等), 都可以用曲线骨架来抽象, 因此基于曲线的距离曲面在计算机动画制作中具有重要意义. 另外, 基于曲线的距离曲面在空间约束变形方面也具有重要的应用价值^[7]. 从距离曲面的定义可知, 计算基于曲线的距离曲面的关键是计算点到曲线的距离.

对于一条 n 次 Bezier 曲线 $P(u)$, 距离给定点最近的点 Q , 要么位于该曲线的端点上, 要么位于满足如下方程的点上

$$(Q - P(u)) \cdot P_u(u) = 0 \quad (3)$$

上述代数方程可以转化为一条 $2n-1$ 次的一维 Bezier 曲线, 然后采用牛顿迭代进行求根, 但牛顿迭代的计算量较大. 一种更有效的代数方程求根方法为 Bezier Clipping 方法^[12], 该方法是先把代数方程转换成 Bezier 基的形式, 以得到表示它的非参数 Bezier 曲线 $C(u)$. 由于曲线 $C(u)$ 上任一点的横坐标与参数值 u 是相等的, 因此曲线 $C(u)$ 与 u 坐标轴的交点即为 $d(u)$ 的根. 此算法类似于牛顿迭代, 但由于充分利用了 Bezier 曲线的凸包性, 故效率较高, 而对于 NURBS 曲线, 该方法必须首先把曲线转化为多段 Bezier 曲线, 然后再分别计算点到每段 Bezier 曲线的距离. 一般在计算距离曲面时, 点到曲线距离的计算频率是很高的, 例如, 若采用 $100 \times 100 \times 100$ 的均匀空间剖分来对距离曲面进行多边

形化, 由于在计算立方体边与曲面的交点时即使不采用迭代求解, 也需要 $1M$ 次点到曲线距离的计算^[13], 因此即使采用 Bezier Clipping, 其效率仍不够高. 采用最佳圆弧样条来逼近任一条二维曲线(如 NURBS 曲线), 就可把点到曲线最近距离的计算问题转化成为点到圆弧样条距离的计算问题. 另外, 由于圆弧样条由直线段和圆弧构成, 且空间一个点到直线段或圆弧的距离可用很少的计算量解析求得, 因而本文算法具有很高的效率.

1 平面参数曲线的最佳圆弧样条逼近

由于圆弧样条是一种由直线段和圆弧构成的几何曲线, 因此在数控加工和计算机辅助几何设计中, 若用圆弧样条去逼近曲线则可在后续处理中带来许多便利. 自从 Bolton 提出双圆弧样条的思想以来^[14], 这一方面的研究吸引了众多的研究者, 本文即把圆弧样条的思想引入距离曲面的计算中. 为了用最佳圆弧样条逼近一条 NURBS 曲线, 采用 Yang 提出的方法, 在给定误差范围内用最少段圆弧去逼近给定的参数曲线^[15]. 与其他逼近方法相比, 该算法有以下优点: ①它可以用圆弧样条来逼近任何类型的参数曲线; ②该构造圆弧样条的方法非常有效, 并且误差可由用户控制; ③最优的圆弧样条可有效地得到, 并且其段数非常少. 该方法可分为以下两步: (1) 在误差 τ_1 范围内, 对 NURBS 曲线进行采样, 并把得到的直线段用双圆弧样条插值, 其中 τ_1 ($\tau_1 < 10^{-6}$) 为用户指定的误差, 通常可以忽略不计, 对于双圆弧的构造, 本文采用苏步青等人提出的公式^[16]; (2) 在误差 τ_2 范围内把相邻的圆弧合并, 得到最少段的圆弧样条, 其总的误差为 $\tau_1 + \tau_2$. 为了在给定的误差 τ_2 范围内, 对单调曲率的圆弧样条进行优化, 可采用如下策略来减少圆弧曲线的数目, 其中对于递减曲率的圆弧, 可通过尽量扩张最大曲率的圆弧来减少圆弧的曲线数目; 而对于递增曲率的圆弧, 则可通过尽量收缩最小曲率的圆弧来减少圆弧曲线的数目, 但当一条圆弧曲线不管是扩张还是收缩时, 均应保持切向的连续性, 即在误差允许的范围内, 逐步把相邻的 3 条圆弧优化为两条光滑连接的逼近圆弧段, 而且对于每一步, 其优化产生的整体误差均需重新计算, 该过程一直进行到在给定误差范围内没有两条圆弧曲线能取代更新的 3 条相邻圆弧为止. 此时, 即可先取第 1 条圆弧曲线为最优的逼近

圆弧,并从第 2 条圆弧曲线开始,进行下一步的优化过程,然后当最后 3 条圆弧曲线优化为两条圆弧曲线时,便得到了最优的逼近原曲线的圆弧样条.由于对于任何光滑的参数曲线,其逼近的圆弧样条总是由一系列单调曲率的圆弧曲线组成,而且当 3 条相邻的圆弧曲线在给定的误差范围内由两条优化的圆弧曲线代替时,其曲率的单调性可保持不变,因此整条圆弧曲线可以用统一的方式进行处理.

2 点到圆弧样条的最短距离计算

由于圆弧样条由圆弧和直线构成,因此点到圆弧样条的最短距离计算问题实际上可分成点到直线段的最短距离计算和点到圆弧的最短距离计算两个子问题.另外,在计算空间点到每条圆弧样条的距离时,需取其中的最小值,即点到参数曲线的最短距离.

2.1 点到直线段的最短距离计算

设 $L:P_1P_2$ 为一位于平面 xy 上长度为 l 的直线段; P_1 和 P_2 的坐标分别为 $(x_1,y_1,0)$ 和 $(x_2,y_2,0)$; $P(x_0,y_0,z_0)$ 为空间一点,它到直线 L 的距离为 d , P 在 xy 坐标系的投影为 Q ,显然, Q 的坐标为 $(x_0,y_0,0)$.若 A 为 Q 在 P_1P_2 上的垂足, P_1P_2 的单位矢量为 $(\Delta x,\Delta y)$, u 为 P_1A 与 P_1P_2 的比, v 为 QA 的长度(如图 1 所示),

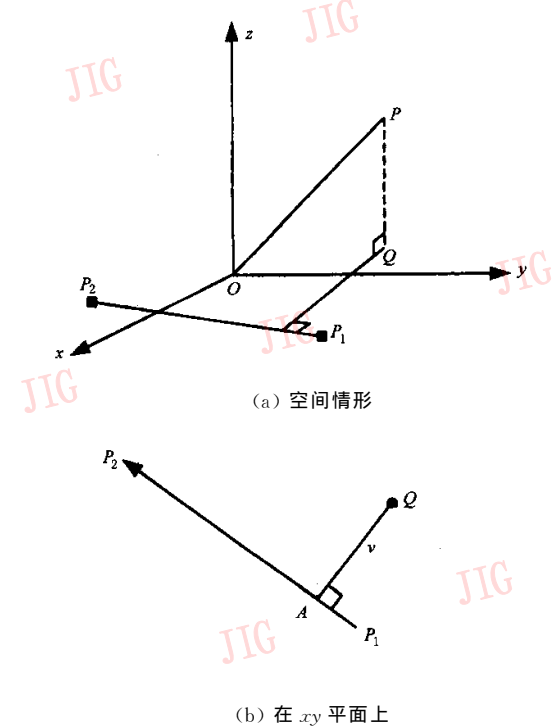


图 1 点到直线段的距离计算

则

$$\begin{aligned} u &= \frac{P_1A}{\|P_1P_2\|} = (Q-P_1) \cdot \frac{(P_2-P_1)}{\|P_2-P_1\|} \times \frac{1}{\|P_2-P_1\|} \\ &= \frac{(Q-P_1) \cdot (P_2-P_1)}{\|P_2-P_1\|^2} \\ &= \frac{1}{l} [(x_0-x_1)\Delta x + (y_0-y_1)\Delta y] \end{aligned} \quad (4)$$

因此, P 到直线 L 的距离计算如下:

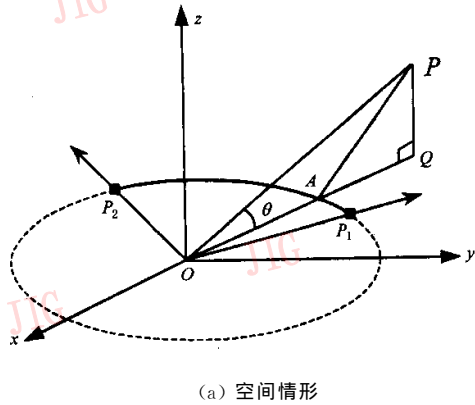
(1) 若 $u < 0$, 则 $d^2 = (x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2 + z_0^2$, 直线 L 上离 P 的最近点 P_n 为 P_1 , 其坐标为 $(x_1, y_1, 0)$.

(2) 若 $u > 1$, 则 $d^2 = (x_0-x_2)^2 + (y_0-y_2)^2 + z_0^2$, 直线 L 上离 P 的最近点 P_n 为 P_2 , 其坐标为 $(x_2, y_2, 0)$.

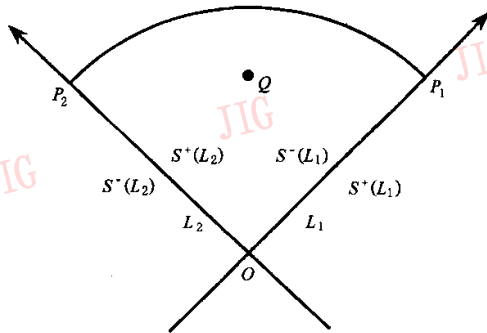
(3) 若 $0 \leq u \leq 1$, 则 $d^2 = [(x_0-x_1)\Delta x - (y_0-y_1)\Delta y]^2 + z_0^2$, 直线 L 上离 P 的最近点 P_n 即为 A , 其坐标为 $[x_1 + u(x_2-x_1), y_1 + u(y_2-y_1), 0]$.

2.2 点到圆弧的最短距离计算

设 OP_1P_2 为位于平面 xy 上一条逆时针方向的圆弧,其半径为 R ; $P(x_0,y_0,z_0)$ 为空间一点,它到圆弧 OP_1P_2 的距离为 d , P 在 xy 坐标系的投影为 Q (如图 2 所示),显然 Q 的坐标即为 $(x_0,y_0,0)$.若点



(a) 空间情形



(b) 在 xy 平面上

图 2 点到圆弧的距离计算

P_1 和 P_2 在 xy 坐标系的坐标分别为 $(x_1, y_1, 0)$ 和 $(x_2, y_2, 0)$, 则直线 OP_1 的方程为 $L_1: A_1x + B_1y = 0$, 其中 $A_1 = y_1, B_1 = -x_1$; 直线 OP_2 的方程为 $L_2: A_2x + B_2y = 0$, 其中 $A_2 = y_2, B_2 = -x_2$, 而且由平面上的

一条直线将平面空间 R^2 划分成两个独立的半空间 $S^+(L)$ 和 $S^-(L)$ 可知:

(1) 若 $Q \in S^+(L_1)$, 则 $d^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + z_0^2$, 圆弧 OP_1P_2 上离 P 的最近点 P_n 为 P_1 , 其坐标为 $(x_1, y_1, 0)$.

(2) 若 $Q \in S^-(L_2)$, 则 $d^2 = (x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 + z_0^2$, 圆弧 OP_1P_2 上离 P 的最近点 P_n 为 P_2 , 其坐标为 $(x_2, y_2, 0)$.

(3) 否则, $Q \in S^-(L_1) \& \& Q \in S^+(L_2)$; $d^2 =$

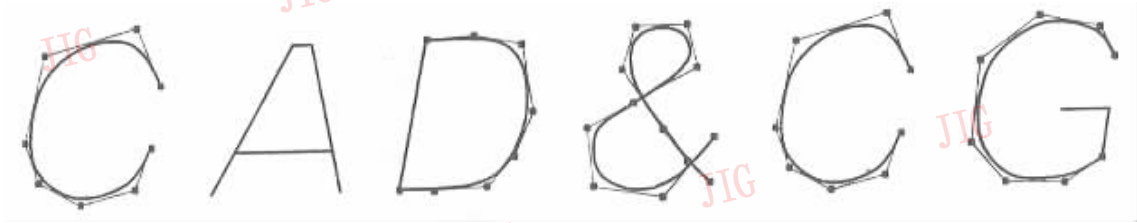
$$\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - R \right)^2 + z_0^2$$

圆弧 OP_1P_2 上离 P 的最近点 P_n 为 $\left(\frac{x_0 R}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \frac{y_0 R}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, 0 \right)$.

3 实验和讨论

本文在 P II 350 微机 OpenGL 环境下实现了上述算法. 图 3(a) 为字符“CAD&CG”的骨架曲线, 图中同时显示了 NURBS 曲线的控制多边形和控制顶点. 其中, “A”由 4 条直线段组成, 经过优化圆弧样条逼近后, “C”由 11 条圆弧组成; “D”由 7 条圆弧和一条直线段组成; “&.”由 17 条圆弧和一条直线段组成; “G”由 8 条圆弧和 2 条直线段组成. 图 3(b) 为与图 3(a) 对应的距离曲面. 图 4(a) 为一把剪刀的骨架曲线, 图 4(b) 为对应的距离曲面, 本文采用隐式曲面多边形化的方法对它们进行绘制^[13].

在绘制多边形化后的隐式曲面时, 需要知道多边形在顶点处的法向量. 由参考文献[10]可知, 该隐式曲面 $F(x, y, z) = T$ 在 $P(x, y, z)$ 处的法向量 $N(x, y, z)$ 为函数 F 梯度的负值

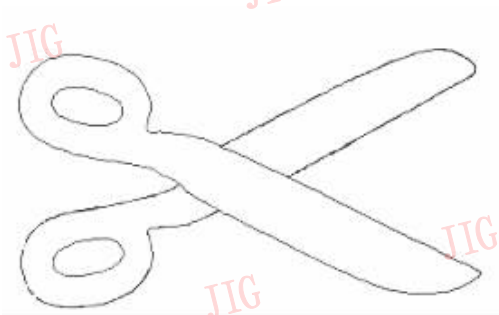


(a) 骨架曲线

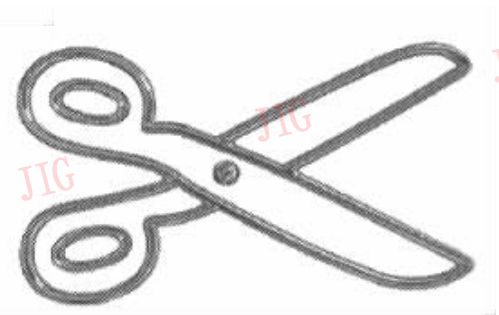


(b) 距离曲面

图 3 字符“CAD&CG”的骨架曲线及对应的距离曲面



(a) 骨架曲线



(b) 距离曲面

图 4 一把剪刀的骨架曲线及对应的距离曲面

$$N(x, y, z) = -\nabla F(x, y, z) \\ = \left(-\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}, -\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}, -\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} \right)$$

若法向量的解析表达式不易求得,则可采用向前差分的方法来近似计算^[10]

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = \frac{F(\Delta x + x, y, z) - F(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = \frac{F(x, y + \Delta y, z) - F(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = \frac{F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z}$$

对于距离曲面,由于用点到圆弧样条最近距离的计算方法可计算出 P 的最近点 P_n ,故曲面在 P 点的法向量可取为

$$N(x, y, z) = \frac{P - P_n}{\|P - P_n\|}$$

在交互设计中,速度是一个重要的参数.由于在上述算法中,用户给定的误差越大,其优化的圆弧段数越少,因此,在精度要求不是很高时,可以通过指定较大的误差来提高多边形化的运算速度.

4 结 论

本文提出了一种基于最佳圆弧样条逼近的快速距离曲面计算方法.为了计算以一条任意二维 NURBS 曲线为骨架的距离曲面,可以首先在用户给定的误差范围内,用最少量的圆弧样条来逼近给定的曲线,从而把点到 NURBS 曲线最近距离的计算问题转化为点到圆弧样条的最近距离计算问题.尽管用圆弧样条来逼近一条二维 NURBS 曲线需占用部分计算时间,但该步骤可在距离曲面多边形化之前进行预处理时一次完成.由于在对距离曲面进行多边形化时需要进行大量的点到曲线最近距离的计算,而点到圆弧样条的最近距离则可以用很少的计算量即可解析求得,故本文的算法效率很高.

参 考 文 献

- 1 Blinn J F. A generalization of algebraic surface drawing. ACM Transactions on Graphics, 1982, 1(3):235~256.
- 2 Nishimura H, Hirai M, Kawai T. Object modeling by distribution function and a method of image generation. Transactions on IECE, 1985, 68-D(4):718~725.
- 3 Wyvill G, McPheeters C, Wyvill B. Data structure for soft objects. The Visual Computer, 1986, 2(4):227~234.
- 4 Wyvill B, Wyvill G. Field functions for implicit surfaces. The Visual Computer, 1989, 5(1/2):75~82.
- 5 Bloomenthal J, Wyvill B. Interactive techniques for implicit

- modeling. Computer Graphics, 1990, 24(2):109~116.
- 6 Bao Hujun, Jin Xiaogang, Peng Qunsheng. Constrained deformations based on metaballs. Chinese Journal of Advanced Software Research, 1999, 6(3):211~217.
- 7 Jin Xiaogang, Li Y F, Peng Qunsheng. General constrained deformation based on generalized metaballs. Computers & Graphics, 2000, 24(2):219~231.
- 8 Frisken S F, Perry R N, Rockwood A P *et al.* Adaptively sampled distance fields: a general representation of shape for computer graphics. In: Proceedings of Siggraph'2000, edited by Akeley K, New Orleans, LA, USA, 2000:249~254.
- 9 Bloomenthal J, Shoemake K. Convolution surface. Computer Graphics, 1991, 25(4): 251~256.
- 10 Bloomenthal J. Skeletal design of natural forms [Ph.D Dissertation]. Department of Computer Science, University of Calgary, Canada, 1995.
- 11 McCormack J, Sherstyuk A. Creating and rendering convolution surfaces. Computer Graphics Forum, 1998, 17(2):113~120.
- 12 Nishita T, Nakamae E. A method for displaying metaballs by using Bezier clipping. Computer Graphics Forum, 1994, 13(3): 71~80.
- 13 Bloomenthal J. Polygonization of implicit surfaces. Computer Aided Geometric Design, 1988, 5(4):341~355.
- 14 Bolton K M. Biarc curves. Computer Aided Design, 1975, 7: 89~92.
- 15 Yang X N. Approximating NURBS curves by arc splines. In: Proceedings of Geometric Modeling and Processing, edited by Martin R and Wang W, Hongkong, IEEE Computer Society, 2000:10~12.
- 16 Su B Q, Liu D Y. Computational Geometry, Academic Press, New York, USA, 1989.

金小刚 1969 年生,博士,浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室研究员.主要研究方向为计算机动画、真实感图形、隐式曲面造型和动画.

马天驰 1980 年生,1999 年毕业于浙江大学计算机系,现为浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室硕士研究生.主要研究方向为隐式曲面造型和动画.

冯结青 1970 年生,博士,浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室副研究员.主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机动画、科学计算可视化.

彭群生 1947 年生,1983 年获英国东安格利亚大学博士学位,现为浙江大学应用数学系教授,博士生导师,浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室主任.主要研究方向为真实感图形、计算机动画、虚拟现实、科学计算可视化、基于图象的造型和绘制等.