

输出反馈二次型最优的可解性问题*

黄 琳 李 中

(北京大学力学系, 北京 100871)

摘 要

本文研究了用输出反馈实现二次型最优控制的问题, 指出任何最优输出反馈都是对应最优状态反馈的衍生解和在一般情况下最优输出反馈所满足的线性矩阵方程是不可解的。并讨论了输出矩阵含有待定参数的情形, 给出了最优输出反馈存在的必要条件, 对于单输入系统证明了该条件几乎是充分的。

关键词: 最优化控制, 输出反馈

一、引 言

采用系统状态二次型的无穷积分作为指标来设计线性系统, 可以追溯到调节系统设计中的积分评价方法^[1]。60年代初 Летов 等人研究控制系统的最优分析设计是二次型最优控制理论的先导。基于 Bellman 动态规划与 Ляпунов 理论, 文献[2]在 1964 年就基本上解决了线性系统二次型最优控制的存在唯一性, 线性控制律以及用序列逼近法求解。由于这类问题的解是采用状态反馈实现的, 这就要求以状态的全部信息为基础进行控制, 实际上这是难于做到的。于是人们转向研究是否可用输出反馈来实现二次型最优控制的问题, 20 多年来, 这一基本问题并未得到解决, 人们也只能采用近似的观点与方法来讨论这一问题^[3], 这方面可参看 Makila 与 Toivone 的评述^[4]。Vinter 与 Lewis 对最优控制与参数最优化间关系所作的研究^[5-7], 为输出反馈二次型最优控制问题的解决提供了工具, 利用他们的结果可以得到输出反馈二次型最优控制的充要条件。

研究常系数线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (1.1)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ 。以下假设:

- (1) (A, B) 是可镇定的, (C, A) 是可观测的且 C 满行秩。
- (2) 对应系统(1.1)的性能指标为

$$J = \int_0^{+\infty} x^T Q x + u^T R u dt, \quad (1.2)$$

其中 $R = R^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 正定, $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 半正定且使 (Q, A) 可观测。

针对状态反馈与输出反馈

本文 1988 年 11 月 21 日收到, 1989 年 7 月 10 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

$$u = Kx, \quad u = Ly = LCx,$$

可提出两类最优控制问题,为此先引入两集合

$$K = \{K | \sigma(A + BK) \subset \dot{C}_- \} \subset R^{n \times n}, \quad (1.3)$$

$$L = \{L | \sigma(A + BLC) \subset \dot{C}_- \} \subset R^{n \times l}, \quad (1.4)$$

其中 $\sigma(\cdot)$ 是对应矩阵的特征值集, $\dot{C}_-$ 表复平面的左开半平面.

问题 1 (状态反馈二次型最优). 以 $J(x_0, K)$ 表系统(1.1)对应状态反馈 $u = Kx$ 在初值 $x(0) = x_0$ 下的指标值,要求确定 $K_0 \in K$ 使有

$$J(x_0, K_0) \leq J(x_0, K), \quad \forall x_0 \in R^n, \quad \forall K \in K. \quad (1.5)$$

问题 2 (输出反馈二次型最优). 以 $J(x_0, LC)$ 表系统(1.1)对应输出反馈 $u = Ly = LCx$ 在初值 $x(0) = x_0$ 下的指标值,要求确定 $L_0 \in L$ 使

$$J(x_0, L_0C) \leq J(x_0, LC), \quad \forall x_0 \in R^n, \quad \forall L \in L. \quad (1.6)$$

定义 1. 若 K_0 为问题 1 的解,矩阵方程

$$L_0C = K_0 \quad (1.7)$$

对 L_0 可解,则解 L_0 称为 K_0 的衍生解.

易知方程(1.7)对 L_0 可解当且仅当

$$R(K_0^T) \subset R(C^T), \quad (1.8)$$

而其解唯一当且仅当

$$N(C^T) = \{0\}. \quad (1.9)$$

不难证明当 K_0 的衍生解存在时,衍生解必为问题 2 的解.

考虑用输出反馈 $u = Ly$ 闭合系统(1.1),则

$$\dot{x} = (A + BLC)x, \quad (1.10)$$

于是对任何 $x_0 \in R^n$, $L \in L$ 总有

$$J(x_0, LC) = x_0^T P x_0, \quad (1.11)$$

$$P = \int_0^{+\infty} e^{(A+BLC)^T t} [Q + C^T L^T R L C] e^{(A+BLC)t} dt, \quad (1.12)$$

在 $L \in L$ 且 (Q, A) , (C, A) 均可观测时,可以证明 $(Q + C^T L^T R L C, A + BLC)$ 亦可观测,从而由(1.12)确定的 P 为正定矩阵,由此可知:

命题 1. 对问题 2,若存在解 L_0 ,则其对应的最优指标 $J(x_0, L_0C) = x_0^T P_0 x_0$ 是 x_0 的正定二次型,从而是 x_0 的充分光滑函数.

利用文献[5-7],则可以有

定理 1. 对问题 2,若存在最优输出反馈矩阵 L_0 ,则最优指标矩阵 P_0 与 L_0 将满足:

$$(A + BL_0C)^T P_0 + P_0(A + BL_0C) + Q + C^T L_0^T R L_0 C = 0, \quad (1.13)$$

$$(A + BLC)^T P_0 + P_0(A + BLC) + Q + C^T L^T R L C \geq 0, \quad \forall L \in L. \quad (1.14)$$

条件(1.13)与(1.14)的适用范围比状态反馈二次型最优的代数 Riccati 方程为广. 当 $C = I$, 这一特殊情形时, $L_0 = K_0$, 于是(1.13), (1.14)式变为

$$(A + BK_0)^T P_0 + P_0(A + BK_0) + Q + K_0^T R K_0 = 0, \quad (1.15)$$

$$(A + BK)^T P_0 + P_0(A + BK) + Q + K^T R K \geq 0, \quad \forall K \in K. \quad (1.16)$$

利用(1.15), (1.16)可以推出 P_0 满足 Riccati 方程这一结论. 实际上由于集 K 是开的, 则有

$\eta > 0$ 使

$$K_0 + \Delta K \in K, \forall \|\Delta K\|_F < \eta. \quad (1.17)$$

以 $K = K_0 + \Delta K$ 代入(1.16), 则有

$$\Delta K^T R \Delta K + \Delta K^T (B^T P_0 + R K_0) + (P_0 B + K_0^T R) \Delta K \geq 0, \forall \|\Delta K\|_F < \eta. \quad (1.18)$$

而(1.18)式成立的充要条件是 ΔK 的一次项应为零, 即可推出 $B^T P_0 + R K_0 = 0$, 利用此与(1.17)式可推知 P_0 必满足代数 Riccati 方程

$$P_0 A + A^T P_0 + Q - P_0 B^T R^{-1} B P_0 = 0.$$

以上 $\|\cdot\|_F$ 系矩阵的 Frobenious 范数^[8].

二、基本定理

为得到 $C \approx I_n$ 一般情形的基本结果, 先引入:

引理 1. 对任何 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \approx 0$ 和满行秩矩阵 C , 总存在 $\alpha > 0$ 与 $X \in \mathbb{R}^{n \times l}$, 且 $\|X\|_F = 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, 且 $x^T x = 1$, 使

$$x^T [SXC + C^T X^T S^T] x < -\alpha. \quad (2.1)$$

证. 设对一切 X 均有

$$G \triangleq SXC + C^T X^T S^T = 0, \forall X \in \mathbb{R}^{n \times l}, \quad (2.2)$$

则由 C 满行秩必有右逆, 记为 F . 于是(2.2)式成为

$$SX + C^T X^T S^T F = 0, \forall X \in \mathbb{R}^{n \times l},$$

从而 $R(S) \subset R(C^T)$, 即存在 Y 使 $S = -C^T Y$, 而令 $X = Y^T$ 代入 G , 则 $G = -2SS^T \approx 0$, 矛盾表明(2.2)式不成立. 即存在 X 使 $G = G^T \approx 0$. 考虑到 G 对 X 线性. 于是恒存在 $X \in \mathbb{R}^{n \times l}$, 且 $\|X\|_F = 1$ 使对应 G 具负特征值 $-\mu$, 令 G 对应该特征值的单位特征向量为 x , 则 $x^T G x = -\mu$. 若取 α 满足 $0 < \alpha < \mu$, 则(2.1)式必成立. 证毕.

定理 2. 问题 2 有解当且仅当方程(1.7)对 L_0 可解, 其中 K_0 是问题 1 的解. 这表明一切二次型最优控制的输出反馈都是对应最优状态反馈的衍生解.

证. 当 显然.

仅当 设问题 2 已有最优解 $u = L_0 y = L_0 C x$, 其对应最优指标为 $x_0^T P_0 x_0$. 则由定理 1 L_0 与 P_0 将满足(1.13)与(1.14)式. 由 $L_0 \in L$ 且 L 为开集, 则有 $\eta > 0$, 使

$$L = L_0 + \varepsilon X \in L, \forall \varepsilon \in (-\eta, \eta), \forall X \in \mathbb{R}^{n \times l}, \text{ 且 } \|X\|_F = 1.$$

将此代入(1.14)式, 利用(1.13)式则可得

$$\varepsilon^2 C^T X^T R X C + \varepsilon [C^T X^T S^T + S X C] \geq 0, \forall \varepsilon \in (-\eta, \eta), \forall X \in \mathbb{R}^{n \times l}, \text{ 且 } \|X\|_F = 1, \quad (2.3)$$

其中 $S = P_0 B + C^T L_0^T R$. 若 $S \neq 0$ 则由引理 1 可知存在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0^T x_0 = 1$, 与 $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times l}$, 且 $\|X_0\|_F = 1$ 与 $\alpha > 0$ 使

$$x_0^T [C^T X_0^T S^T + S X_0 C] x_0 < -\alpha, \alpha > 0. \quad (2.4)$$

现令 $\lambda = x_0^T C^T X_0^T R X_0 C x_0$, λ 为一确定数. 于是(2.3)式可变为

$$\varepsilon^2 \lambda - \alpha \varepsilon \geq 0, \forall \varepsilon \in (-\eta, \eta), \quad (2.5)$$

而这是不可能的. 矛盾表明 $S = 0$, 即

$$B^T P_0 + R L_0 C = 0. \quad (2.6)$$

由 R 可逆, 则 $L_0 C = -R^{-1} B^T P_0$, 以此代入 (1.15) 式可知 P_0 满足

$$P_0 A + A^T P_0 + Q - P_0 B R^{-1} B^T P_0 = 0, \quad (2.7)$$

这表明 P_0 是问题 1 的最优指标矩阵. 从而 L_0 是 (1.7) 式的解或是最优状态反馈的衍生解.

证毕.

注 1. 求解问题 2 的步骤归结为:

(1) 先求解问题 1, 得最优状态反馈矩阵 K_0 ;

(2) 验证条件 (1.8), 若成立则解方程 (1.7) 其解即最优输出反馈, 否则问题 2 将无解.

注 2. 方程 (1.7) 可解当且仅当 (1.8) 式成立. 但由 $\dim[R(C^T)] = l < n$ 则 $R(C^T)$ 是 R^n 的真子空间, 因此 (1.8) 式的成立在一般情况下是几乎不可能的, 即一般情况下最优输出反馈几乎都不存在. 特别当 $\dim[R(C^T)] < \dim[R(B)] = \dim[R(K_0^T)]$ 时, 不论 Q, R 如何给出均不可能存在最优输出反馈. 这表明此时仅依据输出信息是不可能完成包含全部输入信息要求的最优控制任务.

注 3. 在前述假定下系统可用状态反馈镇定即存在最优状态反馈. 但系统可用输出反馈镇定仍难以保证最优输出反馈存在. 例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (0, 1), \quad (2.8)$$

显然任何 $u = ly, l > 0$ 均可镇定系统. 若考虑

$$J = \int_0^{+\infty} x^T Q x + u^2 dt, \quad Q = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix},$$

则可以证明只要 $\alpha \neq 0$ 对应最优输出反馈就不存在. 这是由于对应 $P = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \end{pmatrix}$ 满足的

Riccati 方程为

$$A^T P + P A + Q - P B B^T P = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 2\pi_{12} - \pi_{12}^2 & \pi_{11} - \pi_{22} - \pi_{11}\pi_{22} \\ \pi_{11} - \pi_{22} - \pi_{11}\pi_{22} & \beta^2 + 2\pi_{12} - \pi_{22}^2 \end{pmatrix} = 0,$$

由此若 $\alpha \neq 0$ 则 $\pi_{12} \neq 0$. 但由于此时 $K_0 = -B^T P = -(\pi_{12}, \pi_{22})$, 若要求方程 $L_0 C = K_0$ 可解就必须 $\pi_{12} = 0$.

三、观测矩阵含参数时的讨论

由于 (1.7) 式在一般情况下是不可解的. 为了扩展输出反馈二次型最优的可解范围, 一个可行的途径是在输出矩阵 C 中设置待定参数, 即 $C = C(m)$, 其中 $m \in R^s$ 是待定参数向量. 记

$$F(m) = C^T(m), \quad G = K_0^T, \quad (3.1)$$

于是方程 (1.7) 可写成

$$F(m)X = G, \quad (3.2)$$

其中 $X = L_0^T$. 以下对 $F(m)$ 作些假定:

(1) $F(m): R^s \rightarrow R^{n \times l}$ 系一仿射映射, 于是存在 $F_i \in R^{n \times l}$, $i = 0, 1, \dots, s$ 使

$$F(m) = F_0 + \sum_{i=1}^s \mu_i F_i, \quad m = (\mu_1 \cdots \mu_s)^T. \quad (3.3)$$

(2) 设 $\text{rank} F_0 = l$, 即 F_0 满列秩, 又每个参数均只对 $F(m)$ 的变化产生一维影响, 即设

$$\text{rank} F_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (3.4)$$

(3) 设 $R(F_0), R(F_1), \dots, R(F_s)$ 之间是可直和的, 即

$$T = \sum_{i=0}^s R(F_i) = R(F_0) \oplus R(F_1) \oplus \dots \oplus R(F_s). \quad (3.5)$$

对给定 $m \in R^s$, $R(F(m))$ 系一 R^s 的子空间, 以其为元的集合 $\bigcup_{m \in R^s} R(F(m))$ 记为 $\tilde{U}_F(m)$, 即 $A \in \tilde{U}_F(m)$, 则存在 $a \in R^s$ 使 $A = R(F(a))$. 另一方面, $R(F(m))$ 又是 R^s 中向量的集合, 因而 $\bigcup_{m \in R^s} R(F(m))$ 又是向量的集合, 在此意义下记为 $U_F(m)$. 即

$$a \in U_F(m) \Rightarrow \exists m \in R^s, \exists d \in R^l \text{ 使 } a = F(m)d.$$

易知 $U_F(m) \subset R^s$ 系一关于原点对称的锥, 即

$$\lambda a \in U_F(m), \quad \forall \lambda \in R, \forall a \in U_F(m). \quad (3.6)$$

命题 2. 存在 $m \in R^s$ 使方程(3.2)可解当且仅当存在 $S \in \tilde{U}_F(m)$, 使 $R(G) \subset S$.

命题 3. 存在 $m \in R^s$ 使方程(3.2)可解仅当

$$R(G) \subset T = \bigoplus_{i=0}^s R(F_i). \quad (3.7)$$

证. 设(3.2)当 $m = (\mu_1, \dots, \mu_s)^T \in R^s$ 时可解, 则 $R(G) \subset R(F(m)) = R(F_0 + \mu_1 F_1 + \dots + \mu_s F_s) \subset R(F_0 F_1 \dots F_s) = \sum_{i=0}^s R(F_i) = T$. 证毕.

虽然(3.7)式只是存在 $m \in R^s$ 使(3.2)式可解的必要条件, 但当 G 为列向量时它几乎也是充分的.

由(3.4)式, 可知存在 $f_i \in R^s, b_i \in R^l, i = 1, 2, \dots, s$ 使

$$F_i = f_i b_i^T, \quad R(F_i) = R(f_i), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (3.8)$$

在允许只差非零因子的条件下展式(3.8)唯一. 定义子空间

$$\Pi_i = \{a \mid a = F_0 l_0 + F_1 l_1 + \dots + F_i l_i \text{ 且 } l_0^T b_i = 0\}, \quad (3.9)$$

在 $F_0, F_1, \dots, F_i$ 给定后 Π_i 将唯一确定, 且

$$\dim(\Pi_i) < \dim(T), \quad (3.10)$$

令 $\Pi = \bigcup_{i=1}^s \Pi_i$, 则它是 T 的有限个真子空间的并, 于是差集

$$T \setminus \Pi = \{a \mid a \in T \text{ 但 } a \notin \Pi\}$$

与 T 几乎相同(只差有限个 T 的真子空间).

定理 3. $T \supset U_F(m) \supset T \setminus \Pi$. (3.11)

证. 第一个包含号是显然的.

设 $a \in T \setminus \Pi$, 则 $a = F_0 l_0 + \sum_{i=1}^s F_i l_i$, 其中 l_0 唯一确定, 并且满足

$$\alpha_i = b_i^T l_0 \neq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, s,$$

令 $\mu_i = \frac{b_i^T l_i}{\alpha_i}$, 则

$$a = F_0 l_0 + \sum_{i=1}^s F_i l_i = F_0 l_0 + \sum_{i=1}^s \mu_i F_i l_0 \in U_F(m),$$

于是(3.11)式的第二个包含号成立。

证毕。

定理 3 表明 T 与 $U_F(m)$ 几乎相同。

推论 1. 对方程(3.2), 任给 $g \in T \subset R^s$ 几乎均存在 $m \in R^r$ 使 $F(m)l = g$ 可解。

推论 2. 若系统的输出矩阵为

$$C(m) = C_0 + \sum_{i=1}^s \mu_i C_i,$$

记 $F(m) = C^T(m)$, 则在(3.3)–(3.5)式的假定下, 单输入情形最优输出反馈存在的必要条件是

$$Pb \in \sum_{i=0}^s R(C_i^T), \quad (3.12)$$

其中 P 是问题 1 的最优指标矩阵, b 为输入向量。条件(3.12)几乎也是存在最优输出反馈的充分条件。

注 4. 由于一般有 $\text{rank } F(m) = l$, 则存在 m_0 使 $\text{rank } F(m_0) = l$ 。于是当 $\text{rank } F_0 \approx l$ 时, 可令 $p = m - m_0$, 则研究 $\tilde{F}(p) = F(p + m_0)$ 就有 $\tilde{F}_0$ 满足 $\text{rank } \tilde{F}_0 = l$ 。即假定 $\text{rank } F_0 = l$ 是不失一般性的。

注 5. 假定 $\text{rank } F_i = 1, i = 1, 2, \dots, s$ 的假定不仅为实际所允许, 且若 $\text{rank } F_i > 1$ 则情况会相当复杂, 为此考虑一例。设

$$F_0 = \begin{pmatrix} I_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix},$$

对应 $T = R(F_1) \oplus R(F_2) = R^4$, 但

$$U_F(m) = \bigcup_{\mu \in R} R(F_0 + \mu F_1),$$

在 R^4 中只是一个三维流形, 从而 T 与 $U_F(m)$ 不几乎相等。

注 6. 一般说来给定 $g_1, g_2 \in U_F(m)$ 则未必可知存在 $S \in \tilde{U}_F(m)$ 使 $g_1, g_2 \in S$ 。这是由于由条件仅知存在 $m_1, m_2 \in R^r$ 使 $g_1 \in R(F(m_1)), g_2 \in R(F(m_2))$, 而由此并不能断定存在 m 使 $g_1, g_2 \in R(F(m))$ 。这表明研究多输入系统最优输出反馈问题并得到合用的可解性条件是很困难的。

注 7. 形如(3.2)式的这类含参数的线性矩阵方程是控制理论研究中常碰到的。由于其难度, 至今对其可解性的结论还知之甚少, 特别是参数受有闭集约束时几乎还没有什么办法。虽然几何学特别线性几何与仿射几何有成本的著作, 但可供解这类问题的工具依然缺乏。

本文第三部分得益于郑大钟教授的建议, 在此深致谢意。

参 考 文 献

- [1] Красновский, А. А., *Интегральные оценки качества процесса регулирования*, Машгиз, 1949.
- [2] 黄琳、郑应平、张迪, 自动化学报, 2(1964), 4: 202—218.

- [3] Levine, W. S. & Athans, M., *IEEE Trans. AC*, 15(1970), 1: 44—48.
- [4] Makila, P. M. & Toivone, H. T., *IEEE Trans. AC*, 32(1987), 8: 658—671.
- [5] Vinter, R. B. & Lewis, R. M., *SIAM J. Control and Optimization* 16(1978), 4: 546—570.
- [6] Vinter, R. B. & Lewis, R. M., *ibid.*, 16(1978), 4: 571—583.
- [7] Vinter, R. B., *ibid.*, 21(1983), 2: 235—245.
- [8] 黄琳, 系统与控制理论中的线性代数, 科学出版社, 1984.