研究通讯

可解完备 Lie 代数 I

设 N 是幂零 Lie 代数. Der$N$ 的由半单线性变换构成的 Abel 子代数称为 N 上的环面, 极大环面 H 的维数称为 N 的秩. 在 $L=H\dot{+}N$ 中定义运算

$$[h_1+y_1,h_2+y_2]=h_1\cdot y_1-h_2\cdot y_2+[y_1,y_2],\quad \forall\ h_1,h_2\in H,\ y_1,y_2\in N,$$

则 L 为可解 Lie 代数. 当 $\dim H=\dim N/[N,N]$ ($\dim H<\dim N/[N,N]$) 时, 分别称 L,N 为极大秩(非极大秩)可解, 幂零 Lie 代数.

定理 1 设 L 是可解完备 Lie 代数, 则下面两个结论成立:

1) L 有分解 $L=H\dot{+}N$, 这里 H 是 L 的极大环面子代数, N 是 L 的幂零根基.

2) $\mathrm{ad}H|_N$ 是 N 上的极大环面, 且同构于 H.

定理 2 设 N 是极大秩幂零 Lie 代数, H 为 N 上极大环面, 则 $L=H+N$ 是完备的.

文中还详细刻划了极大秩可解完备 Lie 代数的根空间结构; 运用 Kac-Moody 代数的理论分类了极大秩可解完备 Lie 代数; 给出了几个定理由它们可以构造许多极大秩可解完备 Lie 代数; 并举例说明了非极大秩可解完备 Lie 代数的存在性; 最后给出了结合到广义 Cartan 矩阵 $A_1^{(1)}$ 的全部三个无穷类极大秩可解完备 Lie 代数. 这些完备 Lie 代数均是新的.

参 考 文 献

1 Meng D J. Some results on complete Lie algebras. Communications in Algebra 1994, 22: 5 457～5 507

2 Santharoubane L J. Kac-Mondy algebras and the algebras and the classification of nilpotant algebras of maximal rank. Can J Math, 1982, 34: 1 215～1 239

孟道骥

(南开大学数学系, 天津 300071)

朱林生

(常熟高专数学系, 常熟 215500)

可解完备 Lie 代数 II

推广文献[1]中定理 3.3 可得

定理 1 设 H 是 Lie 代数 L 的 Cartan 子代数, 且满足下列条件:

1) H 是 Abel 的.

2) L 关于 H 的分解如下:

$$L=H\dot{+}\sum_{\alpha\in\Delta}L_\alpha,$$

其中 $\Delta\subseteq H^*-\{0\}$, $L_\alpha=\{x\in L\mid [h,x]=\alpha(h)x,\ \forall\ h\in H\}$.

3) 在 Δ 中有 H^* 的生成元组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使

$$\dim L_{\alpha_j}=1,$$

且 H, L_{α_j}, $1\leqslant j\leqslant n$ 生成 L.

4) 设 $x_j\in L_{\alpha_j}$, $x_j\neq 0$, 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 H^* 的基, 则对 $r+1\leqslant s\leqslant n$, 有

$$\alpha_s=\sum_{i=1}^{t}k_{i_s}\alpha_{j_i}-\sum_{i=t+1}^{r}k_{i_s}\alpha_{j_i},$$

其中 $k_{i_s}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $(j_1,j_2,\cdots,j_r)$ 是 $(1,2,\cdots,r)$ 的一个置换, 且有

$$[\underbrace{x_{j_1}\cdots x_{j_1}}_{k_{1_s}}\cdots\underbrace{x_{j_t}\cdots x_{j_t}}_{k_{t_s}}\ x_{k_1}\cdots x_{k_l}]=[\underbrace{x_{j_{t+1}}\cdots x_{j_{t+1}}}_{k_{t+1_s}}\cdots\underbrace{x_{j_r}\cdots x_{j_r}}_{k_{r_s}}\ x_s\ x_{k_1}\cdots x_{k_l}],$$

括号中元素不计次序及乘积方式，则 L 为完备 Lie 代数

由此定理可找到许多类非极大秩可解完备 Lie 代数．特别还得到

定理 2 设 $\mathbb{C}c$ 是 Virasoro 代数 $\overline{L}$ 的中心，则无限维 Witt 代数 $L=\overline{L}/\mathbb{C}c$ 是完备 Lie 代数．

定理 3 设 L 如定理 2，且 $L=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}d_i$，$[d_i,d_j]=(j-i)d_{i+j}$，$L_+=\sum_{i\geqslant 0}\mathbb{C}d_i$，则有

1) L_+ 是完备 Lie 代数；

2) 对 $n\in\mathbb{N}$，$L_n=L_+/\sum_{i\geqslant n}\mathbb{C}d_i$ 是可解 Lie 代数，且 L_n 完备当且仅当 $n=2$ 或 $n>6$．

最后，还举了不满足定理 1 条件的非极大秩可解完备 Lie 代数的例子．

注 最近完成了维数小于等于 7 的完备 Lie 代数的分类．

参 考 文 献

1 Meng D J. Complete Lie algebras and Heisenberg algebras. Communications in algebra, 1994, 22(13): 5 509～5 524

朱林生

(常熟高专数学系，常熟 215500)

孟道骥

(南开大学数学系，天津 300071)

基于随机加权法的最优截断比例的选择 *

考虑模型 $X=\mu+e$，其中 $\mu\in\mathbb{R}^1$ 是未知参数，X 是观测值，$e\overset{d}{\sim}F$ 是不可观测的关于原点对称的误差随机变量．样本为 $X_1,\cdots,X_n$，F_n 为经验分布．对某 $0<\alpha<1/2$，记 $J_\alpha(t)=(1-2\alpha)^{-1}I(\alpha<t\leqslant 1-\alpha)$，定义 $T(\alpha,F_n)=\int_0^1 F_n^{-1}(t)J_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$，并记 $\sigma^2(\alpha,F)=(1-2\alpha)^{-2}\left(\int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)}x^2\,\mathrm{d}F(x)+2\alpha(F^{-1}(1-\alpha))^2\right)$. Serfling[1] 证明了 $\sqrt{n}\,(T(\alpha,F_n)-\mu))\xrightarrow{d}N(0,\sigma^2(\alpha,F))$．因此，如果能找到 $\sigma^2(\alpha,F)$ 的相合估计，那么可以近似给出 μ 的置信区间或有关的假设检验方案．而在实际应用中，一个自然的问题是如何选取截断比例 α，使得渐近方差 $\sigma^2(\alpha,F)$ 尽可能的小．我们的假设条件是

对某 $0<\alpha_0<\alpha_1<1/2$，$f_0>0$ 以及 $\varepsilon_0>0$，F 在 $\{x:\alpha_0-\varepsilon_0\leqslant F(x)\leqslant 1-\alpha_0+\varepsilon_0\}$ 中连续可微，且 $F'\geqslant f_0$. 2. $\sigma^2(\alpha,F)$ 在 $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$ 中有唯一最小值，且 $\sigma^2(\alpha^*,F)=\min\limits_{\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1}\sigma^2(\alpha,F)$. 3. 对某 $a>0$，$E(|X_1|^a)<\infty$.

这里尝试用随机加权法来选取光滑参数 α．独立于样本空间产生一组随机权 $(V_1,\cdots,V_n)\overset{d}{\sim}\mathrm{Dirichlet}(1,\cdots,1)$，记 $H_n(x)$ 为随机加权经验分布，得随机加权统计量 $T(\alpha,H_n)=\int_0^1 H_n^{-1}(t)J_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$. 记 $W_n=\sqrt{n}\,(T(\alpha_n,H_n)-T(\alpha_n,F_n))$，$\sigma_n^2(\alpha,F)=\mathrm{Var}(W_n|X_1,\cdots,X_n)$，$\alpha_n=\operatorname*{argmin}\limits_{\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1}\alpha_n^2(\alpha,F)$．有如下结论：

定理 1 在假设 1 ～ 3 下，有 $\alpha_n\xrightarrow{\text{a.s.}}\alpha^*$，$\sigma_n^2(\alpha_n,F)\xrightarrow{\text{a.s.}}\sigma^2(\alpha^*,F)$.

定理 2 在假设 1 ～ 3 下，对几乎所有的样本序列 $\{X_n,n\geqslant 1\}$，对 $x\in\mathbb{R}^1$ 一致地有

$$|P\{W_n\leqslant x|X_1,\cdots,X_n\}-P\{\sqrt{n}\,(T(\alpha_n,F_n)-\mu)\leqslant x\}|\xrightarrow{\text{a.s.}}0.$$