中国科学

1990 年 4 月 A 辑 第 4 期

非线性弹性理论的阴、阳互补原理

高 扬

(合肥工业大学数学力学系、预测所，合肥 230039)

摘 要

基于古典阴、阳分析方法和现代凸分析理论，本文研究了大变形弹性理论的变分边值问题，揭示了势能原理与余能原理间存在着的优美的阴、阳互补对称性质. 给出了余能原理的统一构造. 指出了互补变分问题解的存在性、唯一性. 并讨论了广义变分泛函的驻值性质.

关键词：非线性弹性理论，变分原理，凸分析，阴、阳互补原理

一、引 言

自然界是以阴、阳互补方式存在着的. 这种互补性来自一种“道”不变性. 在力学系统中，这种不变性对应了能量守恒原理. 它导致了一系列优美的互补对称规律. 例如有势能原理，就一定有余能原理与之对应. 利用著名的 Legendre-Fenchel 变换，可以从一个导出另一个，反之依然. 在塑性极限分析问题中，从势能原理出发，可以求得安全因子的上限；从余能原理出发，则给出安全因子的下限；二者结合，则给出极限分析问题完美的解决. 这种互相补充的内在关系称为互补性. 作者在文献[1][1)]中利用现代抽象数学工具，对弹塑性系统中理论和计算方法的互补性予以了系统地阐述，并总结出一条具有认识论意义上的互补对偶原理.

然而，在有限变形理论中，由于几何变形算子的非线性，这种互补对称性似乎是遭到了破坏. 例如利用 Legendre-Fenchel 变换，由系统总势能泛函得到的共轭泛函，并非是系统总余能泛函. 这引起了力学界关于纯粹余能原理(即仅含应力变分宗量)的存在性，极值性等问题的长期争论[2]. 此外，即使弹性势能函数假设是关于应变场为凸的，但由于几何非线性，系统总势能泛函关于位移场并非总是凸的，因此势能原理的极值性和判据也是尚未解决的基本问题.

最近，作者在文献[3]中应用中国古典的阴、阳分析方法，系统地研究了非线性变分边值-初始问题. 借助于现代凸分析数学工具，揭示了在几何非线性系统中，依然存在着优美的互补对称性. 由此导致了非线性力学中一系列重要结果[4-7]. 本文是文献[3]在非线性弹性理论中的应用. 研究表明，在几何非线性条件下，系统总势能与总余能泛函之间经典意义下的互补对称性产生了破缺. 亦即利用 Legendre-Fenchel 变换由系统总势能泛函导出的共轭泛函并非是系统总余能，两者相差一对偶间隙函数. 而此对偶间隙函数的性质恰恰决定了互补变分问

本文 1989 年 1 月 6 日收到，1989 年 11 月 8 日收到修改稿.

1) 高扬，弹塑性系统的互补原理及原惩罚有限元素法，清华大学博士学位论文，1985.

题解的性质．分析指出：此间隙函数在非线性力学分析中将起到关键性的作用．

二、对偶变量空间与阴、阳结构

在三维欧氏空间中，令 U 为一广义位移空间，E 为一广义应变空间，$A:U\to E$ 为几何变形算子，满足于变形连续性公理．对于给定的 $u\in U$，有变形几何方程：

$$Au = e \in E. \tag{1}$$

根据客观物理量的互补性，U 及 E 均存在着(功)共轭空间，即广义力空间 L 和广义应力空间 Σ．利用对偶积 $(,)$：$U\times L\to \bar{R} = R\cup\{+\infty\}$，$\langle,\rangle$：$E\times\Sigma\to R$ 进行装配，使之双双成为对偶性空间．这里假设这种对偶性是关于 $U(E)$ 及 $L(\Sigma)$ 分别可分的．在应用中，元素 $l\in L$ 可表示为域 $\Omega\subset R^2$ 中的体积力 b 和边界 $\Gamma=\partial\Omega$ 上的表面力 t，$\sigma\in\Sigma$ 为应力，则

$$(v, l) = \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega + \int_{\Gamma} v_i t_i d\Gamma, \tag{2}$$

$$\langle e, \sigma\rangle = \int_{\Omega} e_{ij}\sigma_{ij} d\Omega. \tag{3}$$

算子 A 的共轭算子 $A^*:\Sigma\to L$ 定义为

$$\langle Av, \sigma\rangle = (v, A^*\sigma). \tag{4}$$

于是几何方程(1)的共轭方程为

$$A^*\sigma - l = 0. \tag{5}$$

根据文献[5]，若称 U 及其导出空间 E 为阴变量空间，$A:U\to E$ 为阴映射，则 Σ 及其导出空间 L 称为阳变量空间，$A^*:\Sigma\to L$ 为阴映射．定义 $\mathscr{Y}^- = \{U;A\}$ 为阴结构，$\mathscr{Y}^- = \{\Sigma;A^*\}$ 为阳结构．图 1 描述了阴、阳结构间的内在关系．

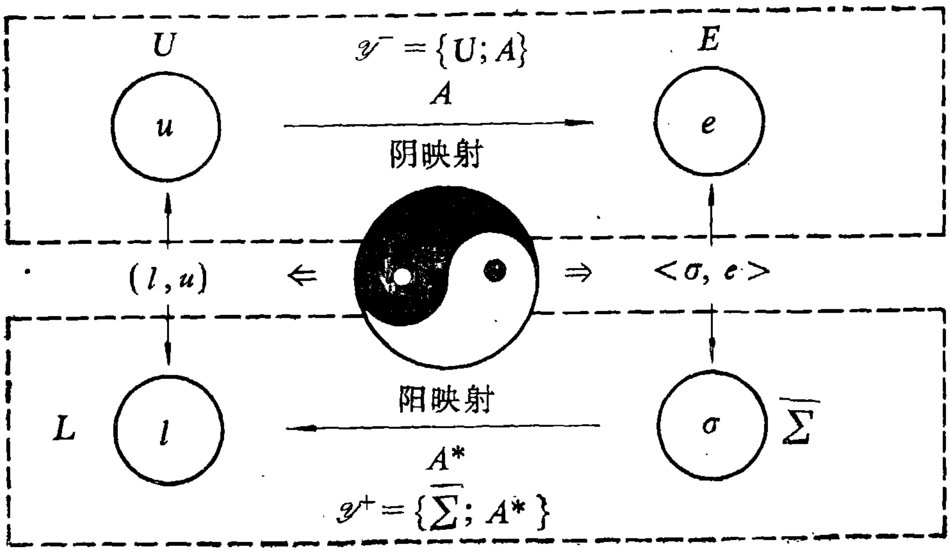

图 1　非线性系统中的阴、阳结构

阴、阳映射是因分析的需要而人为地引入的，不涉及到系统的物理性质．在几何线性力学

系统中，A通常为梯度类算子，A^*则为散度类算子．例如若取 $Av=\frac{1}{2}(\nabla v+v\nabla)$，则(4)式正是周知的 Gauss-Green 公式：

$$\int_\Omega \frac{1}{2}(\nabla v+v\nabla)\sigma d\Omega=\int_\Omega -v(\nabla\cdot\sigma)d\Omega+\int_\Gamma v\sigma d\Gamma. \tag{6}$$

此时

$$A^*\sigma=\begin{cases}-\nabla\cdot\sigma, & \text{in } \Omega,\\ \sigma n, & \text{on } \Gamma,\end{cases} \tag{7}$$

n为单位外法向量．此令

$$\bar{l}=\begin{cases}b, & \text{in}\Omega,\\ t, & \text{on}\Gamma,\end{cases} \tag{8}$$

此处 $\Gamma_t\cup\Gamma_u=\Gamma,\Gamma_t\cap\Gamma_u=\varnothing$．则共轭方程(5)恰为平衡方程．亦即，在几何线性力学系统中，阴、阳结构是同构的．图 1 揭示了其内在的对称美[5]．

三、几何非线性-对称性的破缺

对于有限变形理论，几何算子A往往是位移 $v\in U$ 函数．例如对于 Seth 应变族：

$$Av=\frac{1}{2n}[((I+\nabla v)(I+v\nabla))^n-I]. \tag{9}$$

当 $n=1$ 时

$$e=\frac{1}{2}[\nabla v+v\nabla+(\nabla v)(v\nabla)]. \tag{10}$$

即是周知的 Green 应变张量．此时A是v的对称、二次算子．这是一类重要的算子，本文将予以重点研究．对于给定的$u\in U$，应变e在u点沿$v\in U$方向的导数定义为

$$\delta e(u;v)=\lim_{\theta\to+0}\frac{e(u+\theta v)-e(u)}{\theta}, \tag{11}$$

若 $e(u)$ 是 Gateaux 可微的，即 $\delta e(u;v)$ 关于v是线性的，则

$$\delta e(u;v)=\delta e(u)v=T(u)v, \tag{12}$$

此处 $T(u)$ 为e在u处的 Gateaux 导数．称 $T:U\to E_1\subset E$ 为算子A的切向阴映射，N: $U\to E_2\subset E$ 为T的余算子，则有A的加法分解

$$A=T+N. \tag{13}$$

此算子分解公式在几何非线性变分边值问题分析中，将起到关键性的作用．对于 Green 应变算子 A，有：

$$T(u)v=\frac{1}{2}[\nabla v+v\nabla+(\nabla u)(v\nabla)+(\nabla v)(u\nabla)], \tag{14}$$

$$N(u)v=-\frac{1}{4}[(\nabla u)(v\nabla)+(\nabla v)(u\nabla)]. \tag{15}$$

根据文献[3]，有如下重要引理：

引理． 若几何算子A是二次的，则有

$$N(u)=-[\delta A(u)]u, \tag{16}$$

$$\delta[N(u)u] = -[\delta T(u)]u, \tag{17}$$

$$\delta^2 e(u:v,w) = -2N(v)w = -2N(w)v. \tag{18}$$

利用广义 Gauss-Green 公式(4)，可以得到 T 及 N 的共轭算子：$T^*:\Sigma \to L_1, N^*:\Sigma \to L_2$ 满足

$$\langle T(u)v,\sigma\rangle = (v,T^*(u)\sigma), \tag{19}$$

$$\langle N(u)v,\sigma\rangle = (v,N^*(u)\sigma). \tag{20}$$

对于 Green 应变算子(10)，由(19)式可得：

$$T^*(u)\sigma = \begin{cases} -[(I+\nabla u)\sigma\cdot\nabla, \text{in}\Omega, \\ (I+\nabla u)\sigma n, \quad \text{on}\Gamma. \end{cases} \tag{21}$$

因为 Green 应变空间的对偶空间为 Kirchhoff 应力空间，则

$$T^*(u)\sigma - l = 0 \tag{22}$$

恰为应力平衡方程. 这表明在大变形情况下，平衡算子是 T^* 而非 A^*. 亦即由于 A 的非线性性质，阴、阳结构间规律的对称性产生了破缺.

四、物理非线性-次微分本构关系

对偶空间 E 与 Σ 间的互补关系由弹性体的物理性质所确定. 对于保守系统，定义一个超势函数 $w:E\to R$，并假设其为凸、下半连续常态函数[1)]，于是有次微分本构关系

$$\sigma \in \partial w(e), \tag{23}$$

此处

$$w(e) = \{\sigma\in\Sigma\,|\,w(e)-w(\varepsilon) \leqslant \langle\sigma, e-\varepsilon\rangle \forall\varepsilon\in E\} \tag{24}$$

表示 w 在 e 处的次微分，它是 $E\to\Sigma$ 的一个集值映射. 据此可描述较广泛一类介质的本构形为文献[1]. 利用 Legendre-Fenchel 变换，可以得到 w 的共轭函数，即互补超势 $w^*:\Sigma\to R$:

$$w^*(\sigma) = \sup_{e\in E}\{\langle e,\sigma\rangle - w(e)\}. \tag{25}$$

显然，对于任给的 e，有如下 Fenchel-Young 不等式：

$$\langle e,\sigma\rangle \leqslant w(e) + w^*(\sigma). \tag{26}$$

根据凸分析理论，(23)式成立当且仅当：

$$e\in\partial w^*(\sigma) \tag{27}$$

或

$$\langle e,\sigma\rangle = w(e) + w^*(\sigma). \tag{28}$$

类似地，U 与 U^* 间的互补关系可以通过引入外部超势 $F:U\to\bar{R}$ 和共轭超势 $F^*:L\to\bar{R}$ 进行描述：

$$-l\in\partial F(u), \quad u\in\partial F^*(-l). \tag{29}$$

例如对于混合边值问题，F 可取为

$$F(u) = -\int_\Omega b\cdot u d\Omega - \int_{\Gamma_t} t u d\Gamma + \begin{cases} 0, \text{若 } u=\bar{u}, \text{on}\Gamma_u, \\ +\infty, \text{否则}, \end{cases} \tag{30}$$

1) 见 386 页脚注.

于是有如下次微分边界条件:

$$-l \in \partial F(u) = \begin{cases} -\bar{l}, \text{若 } u = \bar{u}, \text{ on}\Gamma_u, \\ \varnothing, \text{ 否则}, \end{cases} \tag{31}$$

利用共轭变换,不难求得:

$$F^*(-l) = \sup_{u \in U}\{(u, -l) - F(u)\}$$

$$= \begin{cases} \int_{\Gamma_u} -lud\Gamma, \text{若 } l = \bar{l}, \\ +\infty, \quad\quad \text{否则}, \end{cases} \tag{32}$$

则有等价于(31)式的边界条件:

$$u \in \partial F^*(-l) = \begin{cases} \bar{u}, \text{ 若 } l = \bar{l}, \\ \varnothing, \quad \text{否则}, \end{cases} \tag{33}$$

次微分边界条件(29)可以描述更为复杂的边界情况,有兴趣的读者可参阅文献[9].

五、抽象控制方程

综上所述,对于非线性弹性力学系统,抽象控制方程可以描述如下:

(1) 几何方程 $Au - e = 0$,

(2) 平衡方程 $T^*\sigma - l = 0$,

(3) 互补关系

$$\begin{aligned} &\sigma \in \partial w(e) \text{ 或 } e \in \partial w^*(\sigma), \text{ in}\Omega, \\ &-l \in \partial F(u) \text{ 或 } u \in \partial F^*(-l), \text{ on}\Gamma. \end{aligned} \tag{34}$$

在阴、阳结构 $\mathscr{Y}^-$ 上,以 u 作为基本变量,控制方程(34)可统一地写成如下阴控制包含:

$$0 \in T^* \partial w(Au) + \partial F(u). \tag{35}$$

同理在阳结构 $\mathscr{Y}^+$ 上,有等价的阳控制包含:

$$0 \in T \quad \partial F^*(-T^*\sigma) + Nu - \partial w^*(\sigma). \tag{36}$$

在几何线性情况下 ($A = T, N = 0$), 阴、阳控制包含表示为如下完全对称的形式:

$$0 \in A^* \quad \partial w(Au) + \partial F(u), \tag{37}$$

$$0 \in A \quad \partial F^*(-A^*\sigma) - \partial w^*(\sigma). \tag{38}$$

比较发现,由于几何算子的非线性性质,阴、阳结构间漂亮的对称性产生了破缺.

六、对偶间隙函数

不对称并非意味着对称的不存在[10]. 为恢复几何非线性力学系统中阴、阳结构间的对称性,这里引入一个所谓的对偶间隙函数[3] $G: U \times \Sigma \to \bar{R}$:

$$G(v, \tau) = \langle -N(v)v, \tau \rangle = (v, -N^*(v)\tau). \tag{39}$$

这是一个定义在阴、阳乘积空间上的"中性"函数. 对于给定的 $(u, \sigma) \in U \times \Sigma$ 定义

$$G_p(v) = (v, -N^*(u)\sigma), \tag{40}$$

$$G_d^*(-N^*(u)\tau) = (u, -N^*)(u)\tau). \tag{41}$$

此令

$$F_c(v) = F(v) + G_p(v), \tag{42}$$

$$F_c^*(-A^*\tau) = F^*(-T^*\tau) + G_d^*(-N^*\tau). \tag{43}$$

显然 $F_c: U \to \bar{R}$ 及 $F_c^*: L \to \bar{R}$ 为凸、下半连续的. 于是阴、阳控制包含(35)和(36)式可重新写成

$$0 \in A^* \quad \partial w(Au) + \partial F_c(u), \tag{44}$$

$$0 \in A \quad \partial F_c^*(-A^*\sigma) - \partial w^*(\sigma). \tag{45}$$

这表明，借助于间隙函数，阴、阳结构间规律的对称性得到了恢复. 下面将证明此间隙函数在非线性变分问题中起到关键的作用.

七、阴、阳互补变分原理

在阴结构 $\mathscr{Y}^-$ 上，定义系统超势能泛函 $P: \mathscr{Y}^- \to \bar{R}$:

$$P(v) = \Pi(v, Av) = W(Av) + F(v), \tag{46}$$

其中

$$W(e) = \begin{cases} \int_\Omega w(e)d\Omega, & 若\ w \in L^1(\Omega), \\ +\infty, & 否则. \end{cases} \tag{47}$$

定理 1. 若 $P: \mathscr{Y}^- \to \bar{R}$ 是 Gâteaux 可微的，则

$$\delta P(u; v) = 0 \quad \forall v \in U \Longleftrightarrow 0 \in A^*\partial W(Au) + \partial F_c(u). \tag{48}$$

此定理表明系统总势能泛函的驻值点为抽象控制方程的解. 证明过程可参阅文献[3]. 由于几何算子 A 的非线性性质. $P(v)$ 关于 v 并非总是凸的，下面的定理给出了势能变分原理的极值判据.

定理 2. 设几何算子 A 是二次的，u 为 P 的驻值点. 若间隙函数是非负的:

$$G(v, \sigma(u)) \geqslant 0 \quad \forall v \in U, \tag{49}$$

则 u 为 P 的极小点:

$$P(u) = \inf_{v \in U} P(v). \tag{50}$$

另外，若 U_a 为自反 Banach 空间 U 的一个有界子集，则极值问题(50)式在 U_a 上至少有一个解. 若不等式(49)严格成立，则此解唯一.

证明此略. 设定理表明势能变分原理解的性质取决于间隙函数. 不等式(49)给出了系统总势能泛函 P 的凸性判据.

现在我们考虑对偶变分问题. 利用 Legendre-Fenchel 变换，可以得到 $\Pi(v, \varepsilon)$ 的共轭泛函 $\Pi^*: L \times \Sigma \to \bar{R}$:

$$\begin{aligned} \Pi^*(-l, \tau) &= \sup_v \sup_\varepsilon \{(v, -l) + \langle \varepsilon, \tau \rangle - \Pi(v, \varepsilon)\} \\ &= W^*(\tau) + F^*(-l). \end{aligned} \tag{51}$$

令 $U_S \subset U$ 为系统总势能泛函 P 的驻值点集: $U_S = \{u \in U \mid \delta P(u) = 0\}$. 对于任给的 $u \in U_S$，定义

$$P^*(\tau) = -\Pi^*(-T^*(u)\tau, \tau). \tag{52}$$

显然共轭超势泛函 $-P^*: \Sigma \to \bar{R}$ 为凸，下半连续的，但其并非系统总余能泛函，两者相差恰恰是对偶间隙函数. 此定义

$$\Pi_c^*(-A^*(u)\tau,\tau)=\Pi^*(-T^*(u)\tau,\tau)+G^*(-N^*(u)\tau,u), \tag{53}$$

则系统总余能泛函应为

$$P_c^*(\tau)=-\Pi_c^*(-A^*(u)\tau,\tau)=P^*(\tau)-G^*(-N^*(u)\tau)\quad \forall u\in U_a, \tag{54}$$

定理 3. 若 $P_c^*:\mathscr{Y}^-\to\bar{R}$ 是 Gateanx 可微的，A 是二次的，则

$$\delta P_c^*(\sigma;\tau)=0\forall\tau\in\Sigma\Longleftrightarrow 0\in A\partial F_c^*(-A^*\sigma)-\partial W^*(\sigma), \tag{55}$$

且 $\sigma\in\Sigma_S=\{\sigma\in\Sigma\,|\,\delta P_c^*(\sigma)=0\}$ 满足

$$P_c^*(\sigma)=\sup_{\tau\in\Sigma}P_c^*(\tau). \tag{56}$$

若 Σ 为一有界自反的 Banach 空间，则(56)式至少有一解．

利用凸分析理论及引理，此定理即可得证[3]．对于任给的 $(v,\tau)\in U\times\Sigma$，$\Pi_c^*$ 是一个具有二类变量的泛函，下面的定理指出了它的极值性：

定理 4. 若 A 是二次的，且 $G(v,\tau)\geqslant 0,\forall(v,\tau)\in U\times\Sigma$，则抽象控制方程(34)的解 (u,σ) 使 Π_c^* 取最小值，即

$$\Pi_c^*(-A^*(u)\sigma,\sigma)=\inf_{v\in U}\inf_{\tau\in\Sigma}\Pi_c^*(-A^*(v)\tau,\tau). \tag{57}$$

此即最小余能原理．以上结果表明，在非线性弹性理论中，势能原理及余能原理的性质均取决于对偶间隙函数． 对于不同的几何变形算子，(53)式给出了系统总余能泛函的统一构造．由于其中几何算子 A 的非线性性质，余能原理的不纯粹性质也是自然的．下面的阴、阳互补变分原理揭示了阴、阳结构上的互补对偶规律：

定理 5. 如果 A 是二次的，且 $G(v,\tau)\geqslant 0$，$(v,\tau)\in U\times\Sigma_S$，则

$$\inf_{v\in U}P(v)=\sup_{\tau\in\Sigma}P_c^*(\tau). \tag{58}$$

对于几何线性系统，$G=0$，我们总有 $\inf P(v)=\sup P^*(\tau)$．

八、广义变分原理

根据凸分析的一般理论，阴变分问题(48)式的 Hamiltonian 为定义在阴、阳乘积空间上的二类变量泛函 $H:U\times\Sigma\to\bar{R}$：

$$H(v,\tau)=\sup_{\varepsilon}\{\langle\varepsilon,\tau\rangle-\Pi(v,\varepsilon)\}. \tag{59}$$

容易证明，正则 Hamilton 包含

$$Au\in\partial_\sigma H(u,\sigma),T^*\sigma\in\partial_u H(u,\sigma), \tag{60}$$

等价于抽象控制方程(34)． 此处 $\partial_u H(u,\sigma)=-\partial_u(-H(u,\sigma))$． 关连于 Hamiltonian 的 Lagrangian $L:U\times\Sigma\to\bar{R}$ 定义为

$$L(v,\tau):=\langle Av,\tau\rangle-H(v,\tau). \tag{61}$$

于是有如下广义变分原理：

定理 6. Lagrangian $L(v,\tau)$ 的驻值点为抽象控制方程(34)的解，即

$$(0,0)\in\partial L(u,\sigma)=\begin{cases}0\in T^*(u)\sigma-\partial uH(u,\sigma),\\ 0\in A(u)u-\partial_\sigma H(u,\sigma),\end{cases} \tag{62}$$

并且

$$\inf_v P(v)=\inf_v\sup_\tau L(v,\tau)=\sup_\tau P_c^*(\tau). \tag{63}$$

这里必须强调，对于几何非线性系统，Lagrangian L 的极值次序是不可互换的，即

$$\inf_{v}\sup_{\tau}L(v,\tau)\neq\sup_{\tau}\inf_{v}L(v,\tau).$$

Lagrangian $L(v,\tau)$ 相当于经典线弹性力学系统中的 Hellinger-Reissner 泛函. 平行的，此定义所谓的伪 Lagrangian $L_p:U\times\Sigma\times E\to\bar{R}$;

$$L_p(v,\tau,\varepsilon):=\langle A(v)v-\varepsilon,\tau\rangle+\Pi(v,\varepsilon). \tag{64}$$

容易证明，L_p 的驻值点亦为抽象控制方程(34)的解，在经典线弹性力学系统中，L_p 相当于周知的胡海昌-鹫津久-郎泛函. 根据 Hamiltonian 的定义(59)式，可以得到 L 及 L_p 间的内在关系

$$L(v,\tau)=\inf_{\varepsilon\in E}L_p(v,\tau,\varepsilon)\forall(v,\tau)\in U\times\Sigma. \tag{65}$$

九、应　　用

若阴映射 A 为 Green 应变算子，则 E 为 Green 应变空间，Σ 为 Kirchhhoff 应力空间，系统总余能泛函应为

$$\Pi(v,Av)=\int_\Omega w(Av)d\Omega-\int_\Omega bvd\Omega-\int_{\Gamma_t}tvd\Gamma+\Psi_{U_a}(v), \tag{66}$$

式中

$$\Psi_C(\xi)=\begin{cases}0, & 若\ \xi\in C,\\ +\infty, & 否则\end{cases} \tag{67}$$

称为集 C 的指标函数，$U_a\subset U$ 为运动许可集:

$$U_a=\{v\in U\,|\,v=\bar{u},\ \mathrm{on}\Gamma u\}. \tag{68}$$

根据定理 2，若间隙函数

$$G(v,\sigma(u))=\int_\Omega\frac{1}{2}(\nabla v)(v\nabla)\sigma(u)d\Omega\geqslant 0,\quad\forall v\in U.$$

则有最小势能原理:

$$\Pi(u,Au)=\inf\Pi(v,Av).$$

相应的，系统总余能泛函应为

$$\Pi_c^*(-A^*(v)\tau,\tau)=\int_\Omega w^*(\tau)d\Omega+\int_\Omega\frac{1}{2}(\nabla v)(v\nabla)\tau d\Omega$$
$$-\int_{\Gamma_u}v\tau nd\Gamma+\Psi_{\Sigma_a}(\tau,u), \tag{69}$$

其中 $\Sigma_a\subset\Sigma$ 称静力许可集合:

$$\Sigma_a=\{(v,\tau)\in U\times\Sigma\,|\,T^*(v)\tau-\bar{l}=0\}. \tag{70}$$

根据定理 4，若间隙函数 $G(v,\tau)\geqslant 0,\forall(v,\tau)\in U\times\Sigma$，则有最小余能原理:

$$\Pi_c^*(-A^*(u)\sigma,\sigma)=\inf_{v}\inf_{\tau}\Pi_c^*(-A^*(v)\tau,\tau).$$

对于不同的几何变形算子，由(53)式可构造相应的系统总余能原理. 有兴趣的读者可参阅文献[4—7].

参 考 文 献

[1] 高扬,凸分析与塑性的数学理论,现代数学与力学,郭仲衡编,北京大学出版社,1988.
[2] 郭仲衡,非线性弹性理论,科学出版社,1980.
[3] Gao Yang (高扬) & Strang, G., *Quart. Appl. Math.*, **47**(1989).
[4] ————., *Acta. Appl. Math.*, 1989.
[5] Gao Yang (高扬), *Adv. Appl. Math.*, 1989.
[6] Gao Yang (高扬), Wiezbick i. T., *Quart. Appl. Math.*, **47**(1989).
[7] Gao Yang (高扬), *Adv. Appl. Math. Mech in China*, Perganon Press, 1989.
[8] Panagiotopoulos, P. D., *Ineguality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhauser, Basel, 1985.
[9] Weyl. H., *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.