中国科学 : 数学 2015 年 第 45 卷 第 1 期 : 43 ∼ 52
link.springer.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

一类不连续平面二次微分系统的极限环

李时敏[①*], 赵育林[②], 岑秀丽[②]

① 广东财经大学数学与统计学院, 广州 510320;
② 中山大学数学与计算科学学院, 广州 510275
E-mail: lism1983@126.com, mcszyl@mail.sysu.edu.cn, cenxiuli2010@163.com

收稿日期: 2014-06-20; 接受日期: 2014-09-28; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11171355 和 11401111) 和广东财经大学校级课题 (批准号: 13YB11001) 资助项目

摘要 本文考虑了一类不连续平面二次可积非 Hamilton 微分系统在二次扰动下的极限环个数问题. 利用一阶平均法, 我们得到了从该系统中心的周期环域至少可以分支出 5 个极限环的结论. 该结果表明不连续二次微分系统比其相应光滑微分系统至少可以多分支出 2 个极限环.

关键词 极限环 平均法 不连续微分系统

MSC (2010) 主题分类 34A36, 34C07, 37G15

1 引言及主要结果

近年来, 受现实生活中非光滑现象的影响, 越来越多的学者对来自力学、电气工程和自动控制中的不连续平面微分系统

$$(\dot{x},\dot{y})=\begin{cases}(\delta^{+}x-y+\varepsilon P^{+}(x,y),x+\delta^{+}y+\varepsilon Q^{+}(x,y)), & 若\ y\geqslant 0,\\ (\delta^{-}x-y+\varepsilon P^{-}(x,y),x+\delta^{-}y+\varepsilon Q^{-}(x,y)), & 若\ y\leqslant 0,\end{cases}\tag{1.1}$$

进行了研究 [1]. 关于系统 (1.1) 的中心焦点判定问题, 即判定奇点是中心还是焦点, 可以参阅文献 [2, 3]. 若中心附近轨线的周期为常数, 则称该中心为等时中心. [4, 5] 等文献对系统 (1.1) 的等时中心条件进行了研究.

在平面微分系统定性理论中, 极限环个数及其分布是一个十分重要的问题. 对于光滑微分系统的分支现象, 人们已经有了较深的理解 [6], 但对于不连续微分系统还知之甚少. 光滑微分系统中的许多经典结果被证明对于不连续微分系统仍然成立 [7]. 然而, 正如文献 [8] 中指出的, 将光滑微分系统中的分支方法推广到不连续微分系统并不是一项简单的工作.

极限环可以由不同的分支方法产生. 第 1 种方法是 Hopf 分支, 即通过对细焦点进行扰动, 从而产生极限环. 关于不连续线性微分系统的结果见文献 [9, 10]. 文献 [9] 中给出了不连续线性微分系统具有 2 个极限环的猜测. 随后, 文献 [10] 中证明了不连续线性微分系统具有 3 个极限环的结论. 对于不连续二次微分系统, 文献 [11, 12] 中分别给出了具有 4 个和 5 个小范围极限环的例子. 最近, 文献 [13] 中得到了不连续二次微分系统具有 9 个极限环的结论. 关于不连续平面 Hamilton 微分系统的 Hopf 分支见文献 [12]. 文献 [14] 中研究了在多个角形区域分段光滑的微分系统 Hopf 分支问题.

英文引用格式: Li S M, Zhao Y L, Cen X L. Limit cycles for a class of discontinuous planar quadratic differential system (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 43–52, doi: 10.1360/012014-61

第 2 种方法是 Poincare 分支, 即对系统中心的周期环域进行扰动, 使其周期轨破裂, 从而产生极限环, 见文献 [15–18]. 文献 [16] 中讨论了从平面 Filippov 系统的周期环域分支出极限环的条件. 文献 [17] 中的作者们给出了平面分段光滑 Hamilton 微分系统的一阶 Melnikov 函数的具体计算公式. 作为应用, 他们考虑了几类具体的平面分段光滑 Hamilton 微分系统的极限环分支问题. 最近, 利用高阶 Melnikov 函数, 文献 [18] 中得到了分段光滑线性微分系统从线性中心分支出极限环的最大个数.

平均法是研究微分系统从中心的周期环域分支出极限环的重要方法之一. 有关平均法的一般介绍可以参考专著 [19, 20] 经过长期发展, 平均法已经被推广到多种情形. 经典的平均法定理要求微分系统的右端函数是 C^2 的. 在文献 [21] 中, 作者们利用 Brouwer 度理论, 将条件减弱为连续的情形. 最近, 文献 [22] 中再次将平均法推广到不连续微分系统情形.

在本文中, 我们考虑如下类型不连续平面二次微分系统

$$(\dot{x},\dot{y})=\begin{cases}(-y(1+ax)+\varepsilon P^{+}(x,y),x(1+ax)+\varepsilon Q^{+}(x,y)), & 若\ x\geqslant 0,\\ (-y(1+bx)+\varepsilon P^{-}(x,y),x(1+bx)+\varepsilon Q^{-}(x,y)), & 若\ x\leqslant 0,\end{cases} \tag{1.2}$$

其中

$$P^{+}(x,y)=\sum_{i+j=0}^{2}p_{i,j}x^iy^j,\quad Q^{+}(x,y)=\sum_{i+j=0}^{2}q_{i,j}x^iy^j,$$
$$P^{-}(x,y)=\sum_{i+j=0}^{2}s_{i,j}x^iy^j,\quad Q^{-}(x,y)=\sum_{i+j=0}^{2}t_{i,j}x^iy^j.$$

易知未扰系统 $(1.2)_{\varepsilon=0}$ 在 $x\geqslant 0$ 和 $x\leqslant 0$ 时具有相同的首次积分 $H(x,y)=x^2+y^2$, 由文献 [4] 中的命题 2.1 可知, 系统 (1.2) 的原点为中心. 因此, 未扰系统 $(1.2)_{\varepsilon=0}$ 为不连续可积非 Hamilton 微分系统. 值得注意的是: 未扰系统 $(1.2)_{\varepsilon=0}$ 当 $a<0$ $(b>0)$ 时具有不变直线 $1+ax=0$ $(1+bx=0)$.

本文的主要目标是估计从未扰系统 $(1.2)_{\varepsilon=0}$ 原点的周期环域分支出极限环的最大个数. 我们所用的方法是文献 [22] 中介绍的一阶平均法.

定理 1 当 $|\varepsilon|>0$ 充分小, 利用一阶平均法, 令 $H(2)$ 为系统 (1.2) 从原点的周期环域分支出极限环的最大个数.

(i) 若 $a=b=0$, 则 $H(2)=2$.

(ii) 若 $a\neq 0,b=0$ 或 $a=0,b\neq 0$, 则 $4\leqslant H(2)\leqslant 8$.

(iii) 若 $a=-b\neq 0$, 则 $3\leqslant H(2)\leqslant 7$.

(iv) 若 $ab\neq 0$ 且 $a\neq -b$, 则 $5\leqslant H(2)\leqslant 23$.

注 2 (I) 若 $a=b=0$, 则系统 (1.2) 为分段光滑接近 Hamilton 微分系统. 定理 1 的结论 (i) 已经包含在文献 [17] 中, 本文则提供了一种不同的证明方法.

(II) 若 $a=b$ 且 $p_{i,j}=s_{i,j},q_{i,j}=t_{i,j},0\leqslant i+j\leqslant 2$, 则系统 (1.2) 为光滑微分系统. 文献 [23] 中证明了光滑微分系统 (1.2) 当 $a=b=0$ 时没有极限环. 当 $a=b=1$ 时, 由文献 [24] 中定理 2 的结论 a, 我们可以推断出光滑微分系统 (1.2) 从中心的周期环域至多可以分支出 2 个极限环. 通过与上述的结论对比, 我们的结果表明不连续微分系统 (1.2) 在情形 $a=b=0$ (或 $a=b=1$) 中, 比其相应的光滑微分系统可以多产生 2 个 (或 3 个) 极限环.

2 不连续微分系统的平均法

本节我们介绍文献 [22] 中的不连续微分系统的平均法. 粗略地说, 平均法是用平均系统的平衡点

来逼近原周期系统的周期解.

考虑如下不连续微分系统

$$\dot{x} = \varepsilon F(t,x) + \varepsilon^2 R(t,x,\varepsilon), \tag{2.1}$$

其中

$$\begin{aligned} F(t,x) &= F_1(t,x) + \mathrm{sign}(h(t,x))F_2(t,x), \\ R(t,x,\varepsilon) &= R_1(t,x,\varepsilon) + \mathrm{sign}(h(t,x))R_2(t,x,\varepsilon), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$F_1, F_2 : \mathbb{R}\times D \to \mathbb{R}^n, R_1, R_2 : \mathbb{R}\times D\times(-\varepsilon_0, +\varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ 为连续函数, D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集. $h : \mathbb{R}\times D \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数且 0 为其正则值. 这些函数均关于变量 t 是周期为 T 的周期函数.

$\mathrm{sign}(x)$ 为符号函数, 即:

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x > 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \\ -1, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

记 $\mathcal{M} = h^{-1}(0)$, $\Sigma = \{0\}\times D \subsetneqq \mathcal{M}$, $\Sigma_0 = \Sigma \setminus \mathcal{M} \neq \emptyset$, $z \equiv (0,z) \notin \mathcal{M}$.

定义系统 (2.1) 的平均函数 $f : D \to \mathbb{R}^n$ 如下:

$$f(x) = \int_0^T F(t,x)dt. \tag{2.3}$$

我们有下面的不连续微分系统的一阶平均法:

定理 3　假设系统 (2.1) 满足下面 3 个条件:

(i) 函数 F_1, F_2, R_1, R_2 和 h 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件.

(ii) $f(a) = 0, a \in \Sigma_0$. 存在 a 的邻域 V, 使得 $f(z) \neq 0, z \in \bar{V}\setminus\{a\}$ 且 $d_B(f,V,0) \neq 0$, 其中 $d_B(f,V,0)$ 表示 f 在 V 上的 Brouwer 度. 有关 Brouwer 度的定义见文献 [21] 中附录 A.

(iii) 若 $\partial h/\partial t \neq 0$, 则对所有的 $(t,z) \in \mathcal{M}$, 有 $(\partial h/\partial t)(t,z) \neq 0$; 若 $\partial h/\partial t \equiv 0$, 则对所有的 $(t,z) \in [0,T]\times\mathcal{M}$, 有 $\langle\nabla_x h, F_1\rangle^2 - \langle\nabla_x h, F_2\rangle^2 > 0$, 其中 $\nabla_x h$ 表示函数 h 关于变量 x 的梯度.

则当 $|\varepsilon| > 0$ 充分小, 系统 (2.1) 存在一个周期为 T 的解 $x(t,\varepsilon)$, 使得当 $\varepsilon \to 0$ 时, $x(0,\varepsilon) \to a$ (在 Hausdorff 度量意义下).

为了方便验证定理 3 的假设 (ii), 我们给出下面的注记.

注记 4 [21]　假设 $f : D \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 函数, 其中 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, $a \in D$. 若 $f(a) = 0$, $J_f(a) \neq 0$, 且存在 a 的邻域 V, 使得 $f(x) \neq 0, x \in \bar{V}\setminus\{a\}$, 则 $d_B(f,V,0) \neq 0$.

由定理 3 和注记 4 可知, 若微分系统 (2.1) 满足定理 3 中的假设 (i) 和 (iii), 则 (2.3) 式定义的平均函数 $f(x)$ 的简单零点对应微分系统 (2.1) 的极限环.

在下一节中, 我们将推导平均函数的具体表达式.

3　平均函数

作极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, \theta \in (0,2\pi)$. 当 $|\varepsilon| > 0$ 充分小, 可将微分系统 (1.2) 转换成等价微分方程

$$\frac{dr}{d\theta} = \begin{cases} \varepsilon X^+(\theta,r) + \varepsilon^2 Y^+(\theta,r,\varepsilon), & \text{若 } \cos\theta \geqslant 0, \\ \varepsilon X^-(\theta,r) + \varepsilon^2 Y^-(\theta,r,\varepsilon), & \text{若 } \cos\theta \leqslant 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中

$$X^+(\theta,r)=\frac{H^+(\theta,r)}{1+ar\cos\theta},\quad Y^+(\theta,r,\varepsilon)=-\frac{X^+(\theta,r)G^+(\theta,r)}{r(1+ar\cos\theta+\varepsilon G^+(\theta,r))},$$
$$X^-(\theta,r)=\frac{H^-(\theta,r)}{1+br\cos\theta},\quad Y^-(\theta,r,\varepsilon)=-\frac{X^-(\theta,r)G^-(\theta,r)}{r(1+br\cos\theta+\varepsilon G^+(\theta,r))},\tag{3.2}$$

和

$$H^\pm(\theta,r)=\cos\theta P^\pm(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta Q^\pm(r\cos\theta,r\sin\theta),$$
$$G^\pm(\theta,r)=\cos\theta Q^\pm(r\cos\theta,r\sin\theta)-\sin\theta P^\pm(r\cos\theta,r\sin\theta),$$

并且 $r\in(0,r_0)$, 其中

$$r_0=\begin{cases}\min\{-\frac{1}{a},\frac{1}{b}\}, & a<0,b>0,\\ -\frac{1}{a}, & a<0,b\leqslant 0,\\ \frac{1}{b}, & a\geqslant 0,b>0,\\ +\infty, & a\geqslant 0,b\leqslant 0.\end{cases}\tag{3.3}$$

记

$$F_1(\theta,r)=\frac{1}{2}\left(X^+(\theta,r)+X^-(\theta,r)\right),$$
$$F_2(\theta,r)=\frac{1}{2}\left(X^+(\theta,r)-X^-(\theta,r)\right),$$
$$R_1(\theta,r,\varepsilon)=\frac{1}{2}\left(Y^+(\theta,r,\varepsilon)+Y^-(\theta,r,\varepsilon)\right),$$
$$R_2(\theta,r,\varepsilon)=\frac{1}{2}\left(Y^+(\theta,r,\varepsilon)-Y^-(\theta,r,\varepsilon)\right),$$

则微分方程 (3.1) 变为

$$\frac{dr}{d\theta}=\varepsilon F(\theta,r)+\varepsilon^2R(\theta,r,\varepsilon),\tag{3.4}$$

其中

$$F(\theta,r)=F_1(\theta,r)+\mathrm{sign}(r\cos\theta)F_2(\theta,r),$$
$$R(\theta,r,\varepsilon)=R_1(\theta,r,\varepsilon)+\mathrm{sign}(r\cos\theta)R_2(\theta,r,\varepsilon).\tag{3.5}$$

容易验证微分方程 (3.4) 满足定理 3 中的条件 (i) 和 (iii). 由定理 3, 我们需要估计如下平均函数的简单零点个数,

$$\begin{aligned}f(r)&=\int_0^{2\pi}F(\theta,r)d\theta\\&=\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}F(\theta,r)d\theta\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}X^+(\theta,r)d\theta+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}X^-(\theta,r)d\theta,\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中 $X^\pm(\theta,r)$ 由 (3.2) 给出.

定义函数

$$I(r)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{1+ar\cos\theta}d\theta,$$
$$J(r)=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{1}{1+br\cos\theta}d\theta.\tag{3.7}$$

引理 5 函数 (3.7) 满足以下等式:

(i)

$$\begin{aligned}(1-a^2r^2)I'(r)&=a^2rI(r)-2a,\\(1-b^2r^2)J'(r)&=b^2rJ(r)+2b.\end{aligned}\tag{3.8}$$

(ii) 若 $a=b$, 则

$$I(r)+J(r)=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2r^2}},\quad r\in\left(0,\frac{1}{|a|}\right).\tag{3.9}$$

这里若 $a=0$, 则 $\frac{1}{|a|}$ 表示为 $+\infty$.

(iii) 若 $a=-b$, 则

$$I(r)=J(r).\tag{3.10}$$

证明 已知积分

$$I(r)=\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{1-a^2r^2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{ArcTan}\left(\sqrt{\dfrac{1+ar}{1-ar}}\right)\right), & a\leqslant 0, r\in\left(0,-\dfrac{1}{a}\right),\\ \dfrac{4}{\sqrt{1-a^2r^2}}\mathrm{ArcTan}\left(\sqrt{\dfrac{1-ar}{1+ar}}\right), & a>0, r\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right),\\ \dfrac{2}{\sqrt{a^2r^2-1}}\mathrm{Ln}(ar+\sqrt{a^2r^2-1}), & a>0, r\in\left[\dfrac{1}{a},+\infty\right),\end{cases}$$

和

$$J(r)=\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{1-b^2r^2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{ArcTan}\left(\sqrt{\dfrac{1-br}{1+br}}\right)\right), & b\geqslant 0, r\in\left(0,\dfrac{1}{b}\right),\\ \dfrac{4}{\sqrt{1-b^2r^2}}\mathrm{ArcTan}\left(\sqrt{\dfrac{1+br}{1-br}}\right), & b<0, r\in\left(0,-\dfrac{1}{b}\right),\\ \dfrac{2}{\sqrt{b^2r^2-1}}\mathrm{Ln}(-br+\sqrt{b^2r^2-1}), & b<0, r\in\left[-\dfrac{1}{b},+\infty\right).\end{cases}$$

利用上面的积分，引理的结论是显然的. 证毕. □

注意到在区间 $(0,r_0)$ 上, 平均函数 $f(r)$ 和函数 $F(r)=rf(r)$ 具有相同的零点. 为了计算方便, 我们考虑函数

$$\begin{aligned}F(r)=&\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sum_{i+j=0}^{2}\frac{p_{i,j}(r\cos\theta)^{i+1}(r\sin\theta)^j+q_{i,j}(r\cos\theta)^i(r\sin\theta)^{j+1}}{1+ar\cos\theta}d\theta\\&+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sum_{i+j=0}^{2}\frac{s_{i,j}(r\cos\theta)^{i+1}(r\sin\theta)^j+t_{i,j}(r\cos\theta)^i(r\sin\theta)^{j+1}}{1+br\cos\theta}d\theta.\end{aligned}\tag{3.11}$$

我们将其分成以下两种情形进行讨论.

3.1 $ab\neq 0$ 情形

当 $ab\neq 0$, 由 (3.11) 式, 我们有

$$F(r)=c_1r+c_2r^2+c_3\left(\pi-I(r)\right)+c_4r^2I(r)+c_5\left(\pi-J(r)\right)+c_6r^2J(r),\tag{3.12}$$

其中

$$
\begin{aligned}
c_1 =& \frac{2(p_{0,2}+ap_{1,0}-p_{2,0}-aq_{0,1}+q_{1,1})}{a^2} \\
&-\frac{2(s_{0,2}+bs_{1,0}-s_{2,0}-bt_{0,1}+t_{1,1})}{b^2}, \\
c_2 =& \frac{\pi(bp_{0,2}+bp_{2,0}+bq_{1,1}+as_{0,2}+as_{2,0}+at_{1,1})}{2ab}, \\
c_3 =& \frac{a^2p_{0,0}-p_{0,2}-ap_{1,0}+p_{2,0}+aq_{0,1}-q_{1,1}}{a^3}, \\
c_4 =& \frac{-p_{0,2}+aq_{0,1}-q_{1,1}}{a}, \\
c_5 =& \frac{b^2s_{0,0}-s_{0,2}-bs_{1,0}+s_{2,0}+bt_{0,1}-t_{1,1}}{b^3}, \\
c_6 =& \frac{-s_{0,2}+bt_{0,1}-t_{1,1}}{b}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

由于 (3.12) 式计算繁琐, 我们可以借助计算软件 (比如 Mathematica 或 Maple) 对其进行计算和化简.

由以上分析, 我们有

命题 6 假设 $ab \neq 0$, 考虑微分系统 (1.2).

(i) 若 $a \neq b$ 且 $a \neq -b$, 则 $F(r)$ 的生成函数为下列 6 个线性无关的函数:

$$
\{r,\ r^2,\ \pi - I(r),\ r^2 I(r),\ \pi - J(r),\ r^2 J(r)\}, \tag{3.14}
$$

其中 $I(r)$ 和 $J(r)$ 由 (3.7) 式给出.

(ii) 若 $a = b$, 则 $F(r)$ 的生成函数为下列 6 个线性无关的函数:

$$
\left\{r,\ r^2,\ \pi - I(r),\ r^2 I(r),\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-a^2r^2}},\ \frac{r^2}{\sqrt{1-a^2r^2}}\right\}. \tag{3.15}
$$

(iii) 若 $a = -b$, 则 $F(r)$ 的生成函数为下列 4 个线性无关的函数:

$$
\{r,\ r^2,\ \pi - I(r),\ r^2 I(r)\}. \tag{3.16}
$$

证明 (i) 当 $a \neq b$ 且 $a \neq -b$ 时, 由 (3.12) 可知, $F(r)$ 是 (3.14) 中的 6 个函数的线性组合. 下面我们将证明这些函数线性无关. 假设

$$
k_1 r + k_2 r^2 + k_3(\pi - I(r)) + k_4 r^2 I(r) + k_5(\pi - J(r)) + k_6 r^2 J(r) = 0. \tag{3.17}
$$

对方程 (3.17) 在 $r = 0$ 时求一阶至六阶导数得

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 2a & 2b & 0 & 1 \\
\pi & \pi & -a^2\pi & -b^2\pi & 2 & 0 \\
-6a & -6b & 8a^3 & 8b^3 & 0 & 0 \\
6a^2\pi & 6b^2\pi & -9a^4\pi & -9b^4\pi & 0 & 0 \\
-80a^3 & -80b^3 & 128a^5 & 128b^5 & 0 & 0 \\
135\pi a^4 & 135\pi b^4 & -225a^6\pi & -225b^6\pi & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

注意到 $ab \neq 0, a \neq -b$, 上述系数矩阵的行列式为 $8640a^5b^5(a+b)^4\pi^2 \neq 0$, 因此 $k_i = 0, i = 1, \ldots, 6$.

在 (3.13) 中令 $p_{0,2} = q_{1,1} = s_{0,2} = t_{1,1} = s_{2,0} = p_{1,0} = 0$, 从而

$$
\begin{aligned}
c_4 &= 2q_{0,1}, \\
c_6 &= 2t_{0,1}, \\
c_2 &= \frac{\pi p_{2,0}}{2a}, \\
c_3 &= \frac{a^2 p_{0,0} + p_{2,0} + a q_{0,1}}{a^3}, \\
c_1 &= \frac{2(b^2(-p_{2,0} - a q_{0,1}) - a^2(b s_{1,0} - b t_{0,1}))}{a^2 b^2}, \\
c_5 &= \frac{b^2 s_{0,0} - b s_{1,0} + b t_{0,1}}{b^3}.
\end{aligned}
$$

易知当 $q_{0,1}, t_{0,1}, p_{2,0}, p_{0,0}, s_{1,0}, s_{0,0}$ 任意时, $c_i, i = 1, \ldots, 6$ 为任意参数。

(ii) 由引理 5 的结论 (ii) 可知 $J(r) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2r^2}} - I(r)$, 代入 (3.12) 即可得证.

(iii) 由引理 5 的结论 (iii) 可知 $J(r) = I(r)$, 代入 (3.12) 即可得证. □

3.2　$ab = 0$ 情形

当 $ab = 0$ 时, 我们有下面的命题:

命题 7　假设 $ab = 0$, 考虑微分系统 (1.2).

(i) 若 $a \neq 0, b = 0$, 则

$$F(r) = c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + c_4 (\pi - I(r)) + c_5 r^2 I(r), \tag{3.18}$$

其中

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{2(a^2 s_{0,0} - p_{0,2} - a p_{1,0} + p_{2,0} + a q_{0,1} - q_{1,1})}{a^2}, \\
c_2 &= \frac{\pi(p_{0,2} + p_{2,0} + q_{1,1} + a s_{1,0} + a t_{1,0})}{2a}, \\
c_3 &= -\frac{2(s_{0,2} + 2s_{2,0} + t_{1,1})}{3}, \\
c_4 &= \frac{a^2 p_{0,0} - p_{0,2} - a p_{1,0} + p_{2,0} + a q_{0,1} - q_{1,1}}{a^3}, \\
c_5 &= \frac{-p_{0,2} + a q_{0,1} - q_{1,1}}{a}.
\end{aligned}
$$

$F(r)$ 的生成函数为下列 5 个线性无关的函数:

$$\{r,\ r^2,\ r^3,\ \pi - I(r),\ r^2 I(r)\}. \tag{3.19}$$

(ii) 若 $a = 0, b \neq 0$, 则

$$F(r) = c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + c_4 (\pi - J(r)) + c_5 r^2 J(r), \tag{3.20}$$

其中

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{2(b^2p_{0,0}-s_{0,2}-bs_{1,0}+s_{2,0}+bt_{0,1}-t_{1,1})}{b^2},\\
c_2 &= \frac{\pi(s_{0,2}+s_{2,0}+t_{1,1}+bp_{1,0}+bq_{0,1})}{2b},\\
c_3 &= -\frac{2(p_{0,2}+2p_{2,0}+q_{1,1})}{3},\\
c_4 &= \frac{b^2s_{0,0}-s_{0,2}-bs_{1,0}+s_{2,0}+bt_{0,1}-t_{1,1}}{b^3},\\
c_5 &= \frac{-s_{0,2}+bt_{0,1}-t_{1,1}}{b}.
\end{aligned}
$$

$F(r)$ 的生成函数为下列 5 个线性无关的函数:

$$\{r,\ r^2,\ r^3,\ \pi-J(r),\ r^2J(r)\}. \tag{3.21}$$

(iii) 若 $a=b=0$, 则

$$
\begin{aligned}
F(r) &= 2(p_{0,0}-s_{0,0})r+\frac{\pi r^2}{2}(p_{1,0}+q_{0,1}+s_{1,0}+t_{0,1})\\
&\quad+\frac{2r^3}{3}(p_{0,2}+2p_{2,0}+q_{1,1}-s_{0,2}-2s_{2,0}-t_{1,1}).
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

$F(r)$ 的生成函数为下列 3 个线性无关的函数:

$$\{r,\ r^2,\ r^3\}.$$

证明 证明过程与命题 6 类似. □

4 定理 1 的证明

为了估计函数 $F(r)$ 的零点个数, 我们需要下面两个引理.

引理 8 [25] 考虑 $p+1$ 个线性无关的解析函数 $f_i: U\to\mathbb{R}, i=0,1,\dots,p$, 其中 $U\subset\mathbb{R}$. 假设存在某个 $j\in\{0,1,\dots,p\}$, 使得 f_j 在区间 U 上不变号, 则一定存在 $p+1$ 常数 $C_i, i=0,1,\dots,p$, 使得 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{p}C_if_i(x)$ 在区间 U 上至少有 p 个简单零点.

引理 9 [26] 假设函数 $F(h)\in C^1(h_1,h_2)$ 满足

$$\alpha(h)F^{'}(h)-\beta(h)F(h)=\gamma(h), \tag{4.1}$$

其中 $\alpha(h),\beta(h),\gamma(h)\in C^0(h_1,h_2)$, 则

$$\#\{F(h)\}\leqslant 1+\#\{\alpha(h)\}+\#\{\gamma(h)\}. \tag{4.2}$$

这里 $\#\{F(h)\}$ 表示 $F(h)$ 在区间 (h_1,h_2) 上的零点个数.

定理 1 的证明 (i) 由 (3.22) 可知, $F(r)/r$ 是关于变量 r 的 2 次多项式函数. 因为多项式函数的系数是任意的, 所以 $F(r)$ 在区间 $(0,r_0)$ 上最多有 2 个简单零点, 并且这个上界是可以达到的. 由一阶

平均法定理 3, $F(r)$ 在区间 $(0,r_0)$ 上的简单零点个数对应着系统 (1.2) 的极限环个数, 因此我们得到 $H(2)=2$.

(ii) 首先我们考虑 $a\neq 0, b=0$ 情形.

由命题 7 的结论 (i), $F(r)$ 是由 5 个线性无关的生成函数 (3.19) 的任意线性组合. 5 个生成函数在区间 $(0,r_0)$ 上都是解析的, 并且生成函数 r 在区间 $(0,r_0)$ 上恒正. 由引理 8 可知, $F(r)$ 在区间 $(0,r_0)$ 上至少有 4 个简单零点.

下面我们估计函数 $F(r)$ 在区间 $(0,r_0)$ 上简单零点的最大个数. 由 (3.18), 我们有

$$F(r)=c_4\pi+c_1r+c_2r^2+c_3r^3+(c_5r^2-c_4)I(r). \tag{4.3}$$

对上式关于 r 求导, 然后利用 (3.8) 式消去 $I^{'}(r)$ 可得

$$F^{'}(r)=c_1+2c_2r+3c_3r^2+\frac{2a(c_4-c_5r^2)}{1-a^2r^2}+\frac{2c_5-a^2c_4-a^2c_5r^2}{1-a^2r^2}rI(r). \tag{4.4}$$

利用 (4.3) 式可以消去 (4.4) 中的 $I(r)$, 整理后得到

$$(1-a^2r^2)(c_4-c_5r^2)F^{'}(r)=(a^2c_4-2c_5+a^2c_5r^2)rF(r)+G(r), \tag{4.5}$$

其中

$$\begin{aligned}G(r)=&\,c_4(c_1+2ac_4)+c_4(2c_2-a^2c_4\pi+2c_5\pi)r\\&-(2a^2c_1c_4-3c_3c_4-c_1c_5+4ac_4c_5)r^2-a^2c_4(3c_2+c_5\pi)r^3\\&-(4a^2c_3c_4+c_3c_5-2ac_5^2)r^4+a^2c_2c_5r^5+2a^2c_3c_5r^6.\end{aligned} \tag{4.6}$$

由引理 9, 我们可以估计出函数 $F(r)$ 在 $(0,r_0)$ 中的简单零点个数

$$\#\{F(r)\}\leqslant 1+2+\#\{G(r)\}\leqslant 9. \tag{4.7}$$

易知 $F(0)=0$, 从而 $\#\{F(r)\}\leqslant 8, r\in(0,r_0)$.

由定理 3 可知, 当 $a\neq 0, b=0$ 时, 系统 (1.2) 从原点的周期环域最多可以分支出 8 个极限环. 此外, 存在系统 (1.2) 当 $a\neq 0, b=0$ 时, 从该周期环域分支出 4 个极限环. 即 $4\leqslant H(2)\leqslant 8$.

类似可以证明 $a=0, b\neq 0$ 情形.

定理 1 的其他结论的证明过程与 (ii) 类似. □

致谢 在估计平均函数零点的个数问题中, 得到了苏州大学刘长剑教授的帮助, 在此表示感谢. 此外, 感谢审稿人的意见和建议.

参考文献

1 Banerjee S, Verghese G. Nonlinear Phenomena in Power Electronics: Attractors, Bifurcations, Chaos, and Nonlinear Control. New York: Wiley-IEEE Press, 2001

2 Coll B, Gasull A, Prohens R. Center-focus and isochronous center problems for discontinuous differential equations. Discrete Contin Dyn Syst, 2000, 6: 609–624

3 Gasull A, Torregrosa J. Center-focus problems for discontinuous planar differential equations. Int J Bifurcat Chaos, 2003, 13: 1755–1765

4 Chen X, Zhang W. Isochronicity of centers in a switching Bautin system. J Differ Equations, 2012, 252: 2877–2899

5 Manosaa F, Torres P. Isochronicity of a class of piecewise continuous oscillators. Proc Amer Math Soc, 2005, 133: 3027–3035

6 Han M, Yu P. Normal Forms, Melnikov Functions and Bifurcations of Limit cycles. NewYork: Springer, 2012
7 Filippov A. Differential Equation with Discontinuous Right-Hand Sides. Amsterdam: Kluwer Academic Press, 1988
8 Kukucka M. Non-Smooth Dynamical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 2000
9 Han M, Zhang W. On hopf bifurcations in nonsmooth planar systems. J Differ Equations, 2010, 248: 2399–2416
10 Huan S, Yang X. On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems. Discrete Contin Dyn Syst, 2012, 32: 2147–2164
11 Coll B, Gasull A, Prohens R. Degenerate hopf bifurcations in discontinuous planar system. J Math Anal Appl, 2001, 253: 671–690
12 Chen X, Du Z. Limit cycles bifurcate from centers of discontinuous quadratic systems. Comput Math Appl, 2010, 59: 3836–3848
13 Yang J, Han M, Huang W. On Hopf bifurcations of piecewise planar Hamiltonian systems. J Differ Equations, 2011, 250: 1026–1051
14 Zou Y, Kupper T. Generalized Hopf bifurcation emanated from a corner for piecewise smooth planar systems. Nonlinear Anal Ser A, 2005, 62: 1–17
15 Blows T, Perko L. Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems. SIAM Rev, 1994, 36: 341–376
16 Du Z, Li Y, Zhang W. Bifurcation of periodic orbits in a class of planar Filippov systems. Nonlinear Analysis, 2008, 69: 3610–3628
17 Liu X, Han M. Bifurcation of limit cycles by perturbing piecewise Hamiltonian systems. Int J Bifurcat Chaos, 2010, 20: 1379–1390
18 Buzzi C, Pessoa C, Torregrosa J. Piecewise linear perturbations of a linear center. Discrete Cont Dyn Syst, 2013, 33: 3915–3936
19 Sanders J, Verhulst F. Averaging Methods in Nonlinear Dynamic Systems. New York: Springer-Verlag, 1985
20 Verhulst F. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1996
21 Buica A, Llibre J. Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree. Bull Sci Math, 2004, 128: 7–22
22 Llibre J, Novaes D, Teixeira M. On the birth of limit cycles for nonsmooth dynamical systems. Bull Sci Math, 2014, in press
23 Giacomini H, Llibre J, Viano M. On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles. Nonlinearity, 1996, 9: 501–516
24 Li C, Li W, Llibre J, et al. Linear estimate for the number of zeros of Abelian integrals for quadratic isochronous centres. Nonlinearity, 2000, 13: 1775–1800
25 Coll B, Gasull A, Prohens R. Bifurcation of limit cycles from two families of centers. Dyn Contin Discrete Impuls Syst Ser A Math Anal, 2005, 12: 275–287
26 Gasull A, Li C, Liu C. On the number of limit cycles bifurcating from a non-global degenerated center. J Math Anal Appl, 2007, 329: 268–280

Limit cycles for a class of discontinuous planar quadratic differential system

LI ShiMin, ZHAO YuLin & CEN XiuLi

Abstract In this paper, we consider the number of limit cycles for a class of discontinuous planar quadratic integrable non-Hamiltonian system under quadratic perturbation. Using the first order averaging method, we obtain that there are at least 5 limit cycles which can bifurcate from the period annulus of the center for this system. Our result also shows that the discontinuous quadratic system can have at least 2 more limit cycles than the smooth one.

Keywords **limit cycles, averaging method, discontinuous differential system**

MSC(2010) **34A36, 34C07, 37G15**

doi: 10.1360/012014-61