

超球谐形式下的四体系统变换系数*

鲍 诚 光

(中山大学物理系, 广州; 中国科学院理论物理研究所, 北京)

摘 要

文中导出了质量可各不相同的四体系统在超球谐形式下的变换系数。以不同 Jacobi 坐标族的超球变量为宗量的超球谐函数可通过这些系数而互相转换; 从而为超球谐形式在实际问题中的应用提供了方便。

一、引 言

超球谐形式作为解少体问题的工具已经被提出了多年并取得了愈来愈大的成功^[1-7]。众所周知, Talmi-Moshinsky 变换系数在简谐振子形式中起着举足轻重的作用^[8-11]。同样地, 超球谐函数变换系数也将会在超球谐形式中起重要的作用。对于三体系统, 这一变换系数被称为 Raynal-Revai 系数^[12,13]。对于四体及其以上的全同粒子系统, 这一变换系数的推导与置换群表示相联系^[14-16]。本文推广了前人的工作, 提出了一种方案, 据以导得的变换系数可适用于质量可各不相同的四体(三体)系统, 从而扩大了这一系数的应用范围。

二、四体系统的超球谐形式

以下将考虑质量可各不相同的四体系统。

令 $\mathbf{r}_i (i = 1, 2, 3)$ 表示一族 Jacobi 坐标, 相应的约化质量记为 μ_i 。令系统的总质量为 $M = \sum_{i=1}^4 m_i$ 。为了讨论的方便, 定义一族与 $\mathbf{r}_i$ 呈线性关系的量

$$\xi_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{M}} \mathbf{r}_i. \quad (1)$$

这样, 系统的哈密顿量可写为

$$H = T + V = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_i \nabla_{\xi_i}^2 + V, \quad (2)$$

其中常数 $\hbar^2/2M$ 为方便起见将予以省略。

进一步将三个径向变量 $\xi_i = |\xi_i|$ 转变为 ξ 和超角 ϕ_1 和 ϕ_2 满足

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi \cos \phi_1, \\ \xi_2 &= \xi \sin \phi_1 \cos \phi_2, \quad (0 \leq \phi_1, \phi_2 \leq \pi/2) \\ \xi_3 &= \xi \sin \phi_1 \sin \phi_2. \end{aligned} \quad (3)$$

本文 1986 年 4 月 5 日收到, 1986 年 11 月 1 日收到修改稿。

* 中国科学院科学基金资助的课题。

这样,总动能算符就可写为

$$-T = \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi} + \frac{8}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathcal{L}^2(Q), \quad (4)$$

其中 Q 表示一组八个变量 $\phi_1, \phi_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3$. $\mathcal{L}^2(Q)$ 被称为巨轨道算子,其定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(Q) = & \frac{\partial^2}{\partial^2 \phi_1} + \left(\frac{5 \cos \phi_1}{\sin \phi_1} - \frac{2 \sin \phi_1}{\cos \phi_1} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_1} - \frac{\mathcal{L}^2(\xi_1)}{\cos^2 \phi_1} \\ & + \frac{1}{\sin^2 \phi_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 \phi_2} + 2 \left(\frac{\cos \phi_2}{\sin \phi_2} - \frac{\sin \phi_2}{\cos \phi_2} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_2} - \frac{\mathcal{L}^2(\xi_2)}{\cos^2 \phi_2} - \frac{\mathcal{L}^2(\xi_3)}{\sin^2 \phi_2} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\mathcal{L}^2(\xi_i)$ 是与 ξ_i 相联系的轨道角动量算子. 方程 (4) 和 (5) 就是 T 的超球表示,其中 ξ 和其它变量是退耦的.

利用 Jacobi 正交多项式和球谐函数, (5) 式的归一化本征波函数可写为

$$\mathcal{Y}_{[K]}(Q) = P_{n_1 n_2}^{l_1 l_2 l_3}(\phi_1 \phi_2) [Y_{l_1}(\xi_1) Y_{l_2}(\xi_2) Y_{l_3}(\xi_3)]_{l, LM_L}. \quad (6)$$

它被称为超球谐函数,满足

$$\mathcal{L}^2(Q) \mathcal{Y}_{[K]}(Q) = -\lambda_{[K]}(\lambda_{[K]} + 7) \mathcal{Y}_{[K]}(Q). \quad (7)$$

在以上两式中, l_2 和 l_3 耦合成 l_0 , l_1 和 l_0 再耦合到 L ; $[K]$ 表示一组八个量子数 $n_1 n_2 l_1 l_2 l_3 l_0 L M_L$;

$$\lambda_{[K]} = 2n_1 + 2n_2 + l_1 + l_2 + l_3,$$

$$P_{n_1 n_2}^{l_1 l_2 l_3}(\phi_1, \phi_2) = \sin^{-3/2} \phi_1 \mathcal{P}_{n_1}^{l_1 + \frac{1}{2}, l_1}(\phi_1) \mathcal{P}_{n_2}^{l_2 l_3}(\phi_2), \quad (8)$$

(8) 式中的 $\lambda_k = 2n_2 + l_2 + l_3$,

$$\mathcal{P}_n^{l l'}(\phi) = \theta_n^{l l'} \sin^l \phi \cos^{l'} \phi P_n^{l+1/2, l'+1/2}(\phi). \quad (9)$$

(9) 式中的 $P_n^{l+1/2, l'+1/2}$ 就是 Jacobi 多项式,其定义为

$$\begin{aligned} P_n^{l+1/2, l'+1/2}(\phi) = & \sum_{m=0}^n (-)^{n-m} \binom{n+l+1/2}{m} \binom{n+l'+1/2}{n-m} \\ & \cdot \sin^{2(n-m)} \phi \cos^{2m} \phi; \end{aligned} \quad (10)$$

而 (9) 式中的归一化常数为

$$\theta_n^{l l'} = \left(\frac{2(2n+l+l'+2)n! \Gamma(n+l+l'+2)}{\Gamma(n+l+3/2) \Gamma(n+l'+3/2)} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

$\mathcal{P}_n^{l l'}$ 组成正交完备系,满足

$$\int_0^{\pi/2} d\phi \cos^2 \phi \sin^2 \phi \mathcal{P}_n^{l l'}(\phi) \mathcal{P}_{n'}^{l l'}(\phi) = \delta_{n, n'}. \quad (12)$$

相应地,超球谐函数亦组成正交完备系,满足

$$\int dQ \mathcal{Y}_{[K]}^*(Q) \mathcal{Y}_{[K']}(Q) = \delta_{[K], [K']}, \quad (13)$$

其中

$$dQ = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \cos^2 \phi_1 \sin^2 \phi_1 \cos^2 \phi_2 \sin^2 \phi_2 \cdot d\phi_1 d\phi_2. \quad (14)$$

这些函数在其宗量的定义域内都是正规的,因此它们可用于展开物理态.

既然存在着许多等价的 Jacobi 坐标族,其中每一族都可通过 (3) 式对应于一族超球变量 Q ,因而从现在起在 ξ_i^a, ϕ_i^a, Q^a 中引进一个附加的上标 a 借以区分不同的族. 众所周知,两族 Jacobi 坐标通过正交变换相联系:

$$\begin{aligned}\xi_i^a &= \sum_j a_{ij} \xi_j^b, \\ \sum_i a_{ij} a_{ij'} &= \delta_{jj'}.\end{aligned}\quad (15)$$

在正交变换下, 模 ξ 是不会改变的. 同时, 由 (4) 式给出的总动能算子亦不会改变. 因此

$$\mathcal{L}^2(Q^a) = \mathcal{L}^2(Q^b) \quad (16)$$

成立. 相应地, $\mathcal{Y}_{[K]}(Q^a)$ 能用 $\mathcal{Y}_{[K]}(Q^b)$ 中与之同属于同一本征值的本征矢展开. 因而有

$$\mathcal{Y}_{[K]}(Q^a) = \sum_{[K']} \mathcal{A}_{[K]}^{[K']} (A_B^a) \mathcal{Y}_{[K']} (Q^b), \quad \lambda_{[K']} = \lambda_{[K]}, \quad (17)$$

其中 A_B^a 表示从 ξ_j^b 到 ξ_j^a 的变换矩阵. 系数

$$\mathcal{A}_{[K]}^{[K']} (A_B^a) \equiv \int dQ^b \mathcal{Y}_{[K]}^* (Q^a) \mathcal{Y}_{[K']} (Q^b) \quad (18)$$

正是我们所要推导的变换系数. 为此在下一节中, 我们将先给出一些有用的公式, 然后推导出一些必要的、辅助性的变换系数.

三、一些辅助性的变换系数

1. 在定义域 ($0 \leq \phi \leq \pi/2$) 内, 由 (9) 式定义的 $\mathcal{P}_n^{ll'}(\phi)$ 构成完备系, 因而有

$$\sin^k \phi \cos^{k'} \phi = \sum_n f_{ll'n}^{kk'} \mathcal{P}_n^{ll'}(\phi), \quad (19)$$

其中展开系数为

$$f_{ll'n}^{kk'} = \int_0^{\pi/2} d\phi \sin^{k+2} \phi \cos^{k'+2} \phi \mathcal{P}_n^{ll'}(\phi). \quad (20)$$

以 (9), (10) 式代入 (20) 式, 我们得到

$$\begin{aligned}f_{ll'n}^{kk'} &= \theta_n^{ll'} \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \binom{n+l+1/2}{m} \binom{n+l'+1/2}{n-m} \\ &\quad \cdot I_{2(n-m+1)+l+k, 2(m+1)+l'+k'},\end{aligned} \quad (21)$$

其右方最后一因子的定义为

$$I_{i,i'} = \varepsilon \frac{(i-1)!!(i'-1)!!}{(i+i')!!}, \quad (22)$$

$$\varepsilon = \begin{cases} \pi/2 & (\text{如果 } i \text{ 与 } i' \text{ 均为偶整数}), \\ 1 & (i \text{ 与 } i' \text{ 均为整数但不均为偶整数}). \end{cases}$$

2. 定义

$$\begin{aligned}E_{15} \begin{pmatrix} l_a & l_b & l_c & l_d & l \\ l'_a & l'_b & l'_c & l'_d & l' \\ l''_a & l''_b & l''_c & l''_d & L \end{pmatrix} &= \langle [(l_a(1)(l_b(2)l_c(3))_{l_d})_l (l'_a(1)(l'_b(2)l'_c(3))_{l'_d})_{l'}]_L \\ &\quad [l''_a(1)(l''_b(2)l''_c(3))_{l''_d}]_{L'} \rangle.\end{aligned} \quad (23)$$

其中 $l_a(i)$ 是 $Y_{l_a}(\hat{\xi}_i)$ 的省略记法.

利用 U -系数 ($9j$ 系数) 及利用公式

$$(Y_l(\hat{\xi}_i) Y_{l'}(\hat{\xi}_i))_{l_0 m_0} = \frac{l! l'}{\sqrt{4\pi l_0}} C_{l_0 l_0}^{l_0 l_0} Y_{l_0 m_0}(\hat{\xi}_i), \quad (24)$$

其中 $l = \sqrt{2l+1}$, 可将 (23) 式的右方计算出来得到

$$E_{15} \begin{pmatrix} l_a & l_b & l_c & l_d & l \\ l'_a & l'_b & l'_c & l'_d & l' \\ l''_a & l''_b & l''_c & l''_d & L \end{pmatrix} = \frac{\hat{l} \hat{l}' \hat{l}'' \hat{l}_a \hat{l}_b \hat{l}_c \hat{l}_d \hat{l}_a \hat{l}_d}{(4\pi)^{3/2}} \cdot U \begin{pmatrix} l_a & l_d & l \\ l'_a & l'_d & l' \\ l''_a & l''_d & L \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} l_b & l_c & l_d \\ l'_b & l'_c & l'_d \\ l''_b & l''_c & l''_d \end{pmatrix} \cdot C_{l_{a0}, l'_{a0}}^{l''_{a0}} C_{l_{b0}, l'_{b0}}^{l''_{b0}} C_{l_{c0}, l'_{c0}}^{l''_{c0}} \quad (25)$$

另外我们还定义

$$E_{21} \begin{pmatrix} l_a & l_b & l_c & l_d & l_1 \\ l'_a & l'_b & l'_c & l'_d & l_2 \\ l''_a & l''_b & l''_c & l''_d & l_3 \\ \nu & \nu' & \nu'' & \nu''' & L \end{pmatrix} = \langle [(l_a(1)(l_b(2)l_c(3))l_d)l_1 \cdot ((l'_a(1)(l'_b(2)l'_c(3))l'_d)l_2 \cdot (l''_a(1)(l''_b(2)l''_c(3))l''_d)l_3)l_0]_L \cdot [(\nu(1)(\nu'(2)\nu''(3))\nu''')]_L \rangle$$

经计算, 上式为

$$= \sum_{\sigma\sigma'\sigma''\sigma'''} E_{15} \begin{pmatrix} l'_a & l'_b & l'_c & l'_d & l_2 \\ l''_a & l''_b & l''_c & l''_d & l_3 \\ \sigma & \sigma' & \sigma'' & \sigma''' & l_0 \end{pmatrix} E_{15} \begin{pmatrix} l_a & l_b & l_c & l_d & l_1 \\ \sigma & \sigma' & \sigma'' & \sigma''' & l_0 \\ \nu & \nu' & \nu'' & \nu''' & L \end{pmatrix} \quad (26)$$

3. 令

$$y_{lm}(\xi) = \xi^l Y_{lm}(\xi), \quad (27)$$

又令 ξ_i^a 和 ξ_i^b 由 (15) 式相联系, 利用如下的公式^[11]

$$y_{lm}(\xi_i^a) = \sum_{\lambda=0}^l \sum_{\lambda'=0}^{\lambda} A_{\lambda\lambda'}^{il} (y_{l-\lambda}(\xi_i^b) (y_{1-\lambda'}(\xi_i^b) y_{1'}(\xi_i^b))_{\lambda})_{lm}, \quad (28)$$

其中

$$A_{\lambda\lambda'}^{il} = \frac{4\pi}{\lambda\lambda'} \left(\binom{2l+1}{2\lambda} \binom{2\lambda+1}{2\lambda'} \right)^{1/2} a_{11}^{l-\lambda} a_{12}^{l-\lambda'} a_{13}^{l'}; \quad (29)$$

又利用 (26) 式, 可得到一个辅助性的公式:

$$[y_{l_1}(\xi_1^a) (y_{l_2}(\xi_2^a) y_{l_3}(\xi_3^a))_{l_0}]_{L} = \sum_{\nu\nu'\nu''\nu'''} \sum_{\lambda\lambda'} \mathcal{E} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_0 & L \\ \nu & \nu' & \nu'' & \nu''' & \lambda & \lambda' \end{pmatrix} \cdot (\xi_1^a)^{l_1+l_2+l_3-\lambda} (\xi_2^a)^{\lambda-\lambda'} (\xi_3^a)^{\lambda'} \cdot [Y_{\nu}(\xi_1^b) (Y_{\nu'}(\xi_2^b) Y_{\nu''}(\xi_3^b))_{\nu'''}]_{L}, \quad (30)$$

其中

$$\mathcal{E} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_0 & L \\ \nu & \nu' & \nu'' & \nu''' & \lambda & \lambda' \end{pmatrix} = \sum_{\substack{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ (\sum\lambda_i=\lambda)}} \sum_{\substack{\lambda'_1\lambda'_2\lambda'_3 \\ (\sum\lambda'_i=\lambda')}} A_{\lambda_1\lambda'_1}^{l_1} A_{\lambda_2\lambda'_2}^{l_2} A_{\lambda_3\lambda'_3}^{l_3} E_{21}$$

$$\begin{pmatrix} l_1 - \lambda_1, & \lambda_1 - \lambda'_1, & \lambda'_1, & \lambda_1 & l_1 \\ l_2 - \lambda_2, & \lambda_2 - \lambda'_2, & \lambda'_2, & \lambda_2 & l_2 \\ l_3 - \lambda_3, & \lambda_3 - \lambda'_3, & \lambda'_3, & \lambda_3 & l_3 \\ \nu & \nu' & \nu'' & \nu''' & L \end{pmatrix}. \quad (31)$$

这一公式将在以后的推导中起重要作用。

4. 从 (15) 式得到

$$\xi_i^{\alpha^2} = \sum_j a_{ij}^2 \xi_j^{\beta^2} + 2 \sum_{i>j'} a_{ij} a_{ij'} \xi_i^{\alpha} \cdot \xi_{j'}^{\beta}. \quad (32)$$

对于非负整数 r_1, r_2 和 r_3 , 利用 (32) 式后又可得到

$$\begin{aligned} \xi_1^{\alpha^{2r_1}} \xi_2^{\alpha^{2r_2}} \xi_3^{\alpha^{2r_3}} &= \sum_{\substack{s_1 \cdots s_6 \\ (\sum s_i = r_1 + r_2 + r_3)}} C_{r_1 r_2 r_3}^{s_1 s_2 s_3} (\xi_1^{\beta})^{2s_1} (\xi_2^{\beta})^{2s_2} (\xi_3^{\beta})^{2s_3} \\ &\quad \cdot (\xi_1^{\beta} \cdot \xi_2^{\beta})^{s_4} (\xi_1^{\beta} \cdot \xi_3^{\beta})^{s_5} (\xi_2^{\beta} \cdot \xi_3^{\beta})^{s_6}. \end{aligned} \quad (33)$$

其中的展开系数可利用组合学得之为

$$\begin{aligned} C_{r_1 r_2 r_3}^{s_1 s_2 s_3} &= \delta_{\sum s_i, r_1 + r_2 + r_3} 2^{s_4 + s_5 + s_6} \sum_{\substack{u_1 \cdots u_6 \\ (\sum u_i = r_1)}} \sum_{\substack{v_1 \cdots v_6 \\ (\sum v_i = r_2)}} \frac{r_1! r_2! r_3!}{\prod_i (u_i! v_i! (s_i - u_i - v_i)!)} \\ &\quad a_{11}^{u_1} a_{12}^{u_2} a_{13}^{u_3} a_{21}^{v_1} a_{22}^{v_2} a_{23}^{v_3} a_{31}^{s_1 - u_1 - v_1} a_{32}^{s_2 - u_2 - v_2} a_{33}^{s_3 - u_3 - v_3}, \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} s_a &= 2s_1 + s_4 + s_5, \\ s_b &= 2s_2 + s_4 + s_6, \\ s_c &= 2s_3 + s_5 + s_6. \end{aligned} \quad (35)$$

$u_1 \cdots (v_a \cdots)$ 有类似的定义, 仅需把 (35) 式中的 s 换成 $u(v)$ 即可。

利用在文献 [10] 中给出的如下公式:

$$(\xi_1 \cdot \xi_2)^s = \sum_{q=0}^s (\xi_1 \xi_2)^q \frac{4\pi}{q} (-1)^q D_q^s (Y_q(\xi_1) Y_q(\xi_2))_0, \quad (36)$$

其中 s 和 q 为整数,

$$\begin{cases} D_q^s = (2q+1) \frac{(s-1)!! s!!}{(s-q)!! (s+q+1)!!} & (\text{当 } s \text{ 和 } q \text{ 同为偶数或同为奇数}) \\ D_q^s = 1 & (\text{当 } s \text{ 和 } q \text{ 同为零}), \\ D_q^s = 0 & (\text{其它情况}); \end{cases} \quad (37)$$

又利用 (26) 式, 可得到

$$\begin{aligned} (\xi_1^{\beta} \cdot \xi_2^{\beta})^{s_4} (\xi_1^{\beta} \cdot \xi_3^{\beta})^{s_5} (\xi_2^{\beta} \cdot \xi_3^{\beta})^{s_6} &= \sum_{u, v, v'} \mathcal{B}_{u, v, v'}^{s_4 s_5 s_6} (\xi_1^{\beta})^{s_4 + s_5} (\xi_2^{\beta})^{s_4 + s_6} (\xi_3^{\beta})^{s_5 + s_6} \\ &\quad \cdot [Y_u(\xi_1^{\beta}) (Y_{v'}(\xi_2^{\beta}) Y_{v''}(\xi_3^{\beta}))_v]_0, \end{aligned} \quad (38)$$

其中

$$\mathcal{B}_{u, v, v'}^{s_4 s_5 s_6} = \sum_{q_1=0}^{s_4} \sum_{q_2=0}^{s_5} \sum_{q_3=0}^{s_6} \frac{(4\pi)^{3/2}}{\hat{q}_4 \hat{q}_5 \hat{q}_6} (-1)^{q_4 + q_5 + q_6}$$

$$\cdot D_{q_4}^{s_4} D_{q_5}^{s_5} D_{q_6}^{s_6} E_{21} \begin{pmatrix} q_4 & q_4 & 0 & q_4 & 0 \\ q_5 & 0 & q_5 & q_5 & 0 \\ 0 & q_6 & q_6 & 0 & 0 \\ \nu & \nu' & \nu'' & \nu & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

以 (38) 式代入 (33) 式, 得

$$\begin{aligned} \xi_1^{s_1 r_1} \xi_2^{s_2 r_2} \xi_3^{s_3 r_3} = & \sum_{s_1 \cdots s_6} \sum_{\nu \nu' \nu''} C_{s_1 \cdots s_6}^{r_1 r_2 r_3} \mathcal{B}_{\nu \nu' \nu''}^{s_4 s_5 s_6} \\ & (\sum_{i=1}^3 s_i = r_1 + r_2 + r_3) \\ & \cdot (\xi_1^\beta)^{s_1} (\xi_2^\beta)^{s_2} (\xi_3^\beta)^{s_3} [Y_\nu(\xi_1^\beta) (Y_{\nu'}(\xi_2^\beta) Y_{\nu''}(\xi_3^\beta))_\nu]_0. \end{aligned} \quad (40)$$

(40) 式和 (30) 式一样, 作为辅助性公式将在以下的推导中起重要作用。

四、变换系数的推导

前一节已经为我们作了必要的数学准备, 使我们能把超球谐函数即 (6) 式的右方重新用另外一族 (例如 β 族) 超球变量表示出来。为了书写的方便, 定义

$$\begin{aligned} \mathcal{C}([K], s_1 \cdots s_6) = & \theta_{n_1}^{\lambda_1 + \frac{3}{2}, l_1} \theta_{n_7}^{l_3 l_2} \sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=0}^{n_2} \sum_{m_3=0}^{n_1-m_1} (-1)^{n_1+n_2-m_1-m_2} \\ & \cdot \binom{n_1 + \lambda_1 + 2}{m_1} \binom{n_1 + l_1 + 1/2}{n_1 - m_1} \binom{n_2 + l_2 + 1/2}{m_2} \\ & \cdot \binom{n_2 + l_2 + 1/2}{n_2 - m_2} \binom{n_1 - m_1}{m_3} C_{s_1 \cdots s_6}^{m_1, m_2, m_3, n_1+n_2-m_1-m_2, m_3} \end{aligned} \quad (41)$$

及定义

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \left(\begin{matrix} l_1 l_2 l_3 l_0 L, & s_4 s_5 s_6 \\ l'_1 l'_2 l'_3 l'_0, & \lambda \lambda' \end{matrix} \right) = & \sum_{\nu \nu' \nu''} \sum_{\mu \mu' \mu'' \mu'''} \mathcal{B}_{\nu \nu' \nu''}^{s_4 s_5 s_6} \\ & \cdot \mathcal{E} \left(\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_0 & L \\ \mu & \mu' & \mu'' & \mu''' & \lambda \lambda' \end{matrix} \right) E_{15} \begin{pmatrix} \nu & \nu' & \nu'' & \nu & 0 \\ \mu & \mu' & \mu'' & \mu''' & L \\ l'_1 & l'_2 & l'_3 & l'_0 & L \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (42)$$

由于 (3), (40) 及 (30) 式, (6) 式可重新写为

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{[K]}(Q^a) = & \sum_{s_1 \cdots s_6} \sum_{\lambda \lambda'} \mathcal{C}([K], s_1 \cdots s_6) \\ & (\sum_{i=1}^3 s_i = n_1 + n_2) \\ & \cdot (\cos \phi_1^\beta)^{s_1 + l_1 + l_2 + l_3 - \lambda} (\sin \phi_1^\beta)^{s_2 + s_3 + \lambda} (\cos \phi_2^\beta)^{s_4 + \lambda - \nu} \\ & \cdot (\sin \phi_2^\beta)^{s_5 + \lambda'} \sum_{l'_1 l'_2 l'_3 l'_0} \mathcal{D} \left(\begin{matrix} l_1 l_2 l_3 l_0 L, & s_4 s_5 s_6 \\ l'_1 l'_2 l'_3 l'_0, & \lambda \lambda' \end{matrix} \right) \\ & \cdot [Y_{l'_1}(\xi_1^\beta) (Y_{l'_2}(\xi_2^\beta) Y_{l'_3}(\xi_3^\beta))_{l'_0}]_{L}, \end{aligned} \quad (43)$$

(43) 式的右方有待于转换为与 (17) 式右方一致的形式。为此可利用 (19) 式首先把三角函数和 Jacobi 多项式联系起来。引进 Jacobi 多项式后不难完成 (43) 式到 (17) 式的转换, 并由此最终导出了我们所需要的变换系数:

$$\mathcal{A}_{[K]}^{[K]}(A_{\beta}^{\alpha}) = \sum_{r_1 r_2} f_{\lambda_{K'}+3/2, l_1', n_1}^{[K]+3/2-r_1, r_1} f_{l_2', l_3', n_2}^{[K]-r_1-r_2, r_2} \cdot \mathcal{S}_{l_1' l_2' l_3' l_0'}^{[K] r_1 r_2} \delta_{\lambda_{[K]}, \lambda_{[K']}, \lambda_{[K'']}} \quad (44)$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_{K'} &= 2n_2' + l_2' + l_3', \\ \mathcal{S}_{l_1' l_2' l_3' l_0'}^{[K] r_1 r_2} &= \sum_{s_1 \dots s_6} \sum_{\lambda'} \delta_{\Sigma s_i, n_1+n_2} \delta_{s_4+l_1+l_2+l_3-\lambda, r_1} \\ &\quad \cdot \delta_{s_b+\lambda-\lambda', r_2} \mathcal{C}([K], s_1 \dots s_6) \mathcal{D}_{l_1' l_2' l_3' l_0', \lambda \lambda'}^{l_1 l_2 l_3 l_0 L, s_4 s_5 s_6}. \end{aligned} \quad (45)$$

五、应用举例

1. 相互作用

令一个四可区分粒子系统的相互作用总势能为

$$V = \sum_{i>j} V_{ij}(r_{ij}). \quad (46)$$

为简单起见假定 V_{ij} 为中心力, 令 β_{ij} 表示一族 Jacobi 坐标其中 ξ_{ij}^{β} 与粒子 i 与 j 之间的距离 r_{ij} 成正比. 这样, (46) 式可重写为

$$U = \sum_{i>j} U_{ij}(\xi \cos \phi_{ij}^{\beta}). \quad (47)$$

其中每一项又可以超球谐函数展开, 如

$$U_{ij}(\xi \cos \phi_{ij}^{\beta}) = \sum_{[K]} u_{[K]}^{ij}(\xi) \mathcal{Y}_{[K]}(\mathcal{Q}_{ij}^{\beta}), \quad (48)$$

其中

$$u_{[K]}^{ij}(\xi) = \delta_{n_2, 0} \delta_{l_1, 0} \delta_{l_2, 0} \delta_{l_3, 0} \delta_{l_0, 0} \cdot 2\pi^2 \int_0^{\pi/2} d\phi \sin^{7/2} \phi \cos^2 \phi \mathcal{D}_{n_1, 0}^{3/2, 0}(\phi) U_{ij}(\xi \cos \phi). \quad (49)$$

令联系 α 族和 β_{ij} 族的变换矩阵为 $A_{\alpha ij}^{\beta}$, (46) 式可重新写为

$$V = \sum_{\substack{n_1' n_2' \\ l_1' l_2' l_3' l_0'}} \mathcal{Y}_{[K']}(\mathcal{Q}^{\alpha}) \left(\sum_{i>j} \sum_{n_1} u_{[K]}^{ij}(\xi) \mathcal{A}_{[K]}^{[K']} (A_{\alpha ij}^{\beta}) \right), \quad (50)$$

其中 $[K]$ 表示 $n_1 0 0 0 0 0$, $[K']$ 表示 $n_1' n_2' l_1' l_2' l_3' l_0'$.

这样, V 被转换为仅由一族给定的超球变量 ($\mathcal{Q}^{\alpha}$) 表出. 显然, 这种表示方式将给计算带来很大的方便.

2. 对称化

让我们考虑一个四全同粒子系统. 令 S_{α} 表示粒子置换算子. 对于以 $\xi_i^{\beta} (i=1, 2, 3)$ 为宗量的任意函数 F , 假定

$$S_{\alpha} F(\xi_1^{\beta}, \xi_2^{\beta}, \xi_3^{\beta}) = F(\xi_1^{\beta}, \xi_2^{\beta}, \xi_3^{\beta}), \quad (51)$$

其中 ξ_i^{β} 为另一族 Jacobi 坐标. 如果 F 恰为超球谐函数的话, 就有

$$S_{\alpha} \mathcal{Y}_{[K]}(\mathcal{Q}^{\beta}) = \mathcal{Y}_{[K]}(\mathcal{Q}^{\alpha}) = \sum_{[K']} \mathcal{A}_{[K]}^{[K']} (A_{\beta}^{\alpha}) \mathcal{Y}_{[K']}(\mathcal{Q}^{\beta}). \quad (52)$$

显然, (52) 式给出了置换群的一个表象; 另一方面, 利用 (52) 式易于在超球谐形式下组成具有任意对称性的波函数基矢.

本文的目的并不在于仔细讨论超球谐形式的各种可能应用。但是我们想强调一下超球谐形式在描写少体散射的出射道波函数方面的应用是难以被其它理论形式所代替的,而本文所讨论的变换系数又正是联系不同的出射道所必须的。这一方面的内容详见文献[17]和[18]。

以上提出的推导方法可推广应用于粒子数大于 4 的系统。

参 考 文 献

- [1] Fabre de la Ripelle, M., *Ann. Phys. (N. Y.)*, **147**(1983), 281.
- [2] Macek, J. H., *J. Phys.*, **B1**(1968), 831.
- [3] Lin, C. D., *Phys. Rev.*, **A10**(1974), 1986.
- [4] Fabre de la Ripelle, M., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **274**(1972), 104.
- [5] Das, T. K., et al., *Phys. Rev.*, **C126**(1982), 2281.
- [6] Ballot, J. L. et al., *ibid.*, **C126**(1982), 2301.
- [7] Ballot, J. L. & Fabre de la Ripelle, M., *Ann. Phys. (N. Y.)*, **127**(1980), 62.
- [8] Barranger, M., & Davies, K. T. R., *Nucl. Phys.*, **79**(1966), 403.
- [9] Bargmann, V. & Moshinsky, M., *ibid.*, **18**(1960), 697.
- [10] Tobocman, W., *ibid.*, **A357**(1981), 293.
- [11] Moshinsky, M., *Nucl. Phys.*, **13**(1959), 112.
- [12] Raynal, J. & Revai, J., *Nuovo Cimento*, **A68**(1970), 612.
- [13] Smorodinsky, Ya. A. & Efros, V. D., *Sov. J. Nucl. Phys.*, **17**(1973), 107.
- [14] Fabre de la Ripelle, M., *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, **A276**(1973), 961.
- [15] Galbraith, H. W., *J. Math. Phys.*, **12**(1971), 782.
- [16] Kildyushov, M. S., *Sov. J. Nucl. Phys.*, **15**(1972), 113; **16**(1973), 117.
- [17] Bao Cheng-guang & Liu Xian-hui, *Phys. Rev.*, **C31**(1985), 751.
- [18] Bao Cheng-guang, *Annals of Physics*, **167**(1986), 25.