



综 述

非线性抛物型方程计算方法

值此周毓麟先生九十寿辰之际, 谨以本文表达对他的崇高敬意和真诚祝福

袁光伟*, 岳晶岩, 盛志强, 沈隆钧

北京应用物理与计算数学研究所计算物理实验室, 北京 100088

E-mail: yuan_guangwei@iapcm.ac.cn, yue_jingyan@iapcm.ac.cn, sheng_zhiqiang@iapcm.ac.cn, shenlj@iapcm.ac.cn

收稿日期: 2012-12-28; 接受日期: 2013-01-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11171036) 与国防基础科研项目 (批准号: B1520110011) 资助项目

摘要 本文简要回顾非线性抛物型方程差分方法若干研究工作, 包括周毓麟先生在该研究方向取得的部分研究成果, 并对近年来相关的部分研究进展进行综述, 展望拟开展的研究工作.

关键词 抛物型方程 差分方法 非线性

MSC (2010) 主题分类 65M06, 65M12, 65M55

1 引言

非线性抛物型方程出现在众多实际应用领域中, 例如工业制造、气象预报、油藏模拟和新能源开发等, 它可应用于描述地下水渗流、大气流动、受约束核聚变等物理系统中包含的各种物理量的扩散过程, 例如质量扩散和能量传输过程等. 特别地, 非线性抛物型方程组描述了辐射流体力学中的能量传输过程, 如我们所研究的非平衡辐射物理现象中的光子扩散、离子热传导和电子热传导方程就属于这种类型. 对这些实际物理过程的数值模拟属于当今科学与工程计算前沿研究领域, 其中对非线性抛物型方程离散方法的研究一直是具有挑战性的课题. 本文限于讨论与差分方法有关的离散方法.

周毓麟先生基于偏微分方程数学理论和实际问题数值求解的需求, 创立了离散泛函分析方法, 并应用于非线性偏微分方程差分方法研究, 形成了独树一帜的有限差分方法理论. 特别是, 建立了非线性抛物型方程差分方法的系统理论, 在非均匀网格上解的先验估计、存在性、收敛性和稳定性理论研究方面获得了杰出成果 (参见文献 [1–3]). 周先生特别重视数学理论与应用相结合, 研究成果在实际应用问题的数值模拟和分析中发挥了重要指导作用. 他在长期的科学与工程计算实践与理论研究中, 组织和指导了一支在国内外有影响的偏微分方程数值解研究队伍, 为我国计算数学学科与国防事业的发展作出了重大贡献.

专著 [4] 总结了非规则网格上经典差分方法的有关理论, 包括差分解的先验估计、收敛性和误差估计等. 文献 [5] 给出了在非规则网格上线性偏微分方程广义差分方法 (或称为有限体积元) 理论的系统总结, 该方法通过引入广义 Galerkin 形式, 既保持了差分方法设计简单的优点, 同时又保持与有限元方法相同的收敛阶, 计算量介于差分法和有限元之间, 并且, 该方法适用于非矩形区域上三角形和四边形网格剖分, 便于边界条件的处理. 文献 [6] 给出了结构四边形网格上椭圆、抛物和空气动力学

方程组守恒的差分方法, 其构造思路是, 不同类型的偏微分算子 (例如梯度和散度) 的离散不是相互独立的, 当其中一个算子的离散给定以后, 另一个算子的离散可以通过要求它们满足某个离散恒等式来导出, 例如要求离散的梯度和散度满足离散 Gauss-Green 公式. 该类方法已得到了长足发展, 现在称其为 Mimetic 方法. 文献 [7] 研究了所谓“可容许”网格上的有限体积方法, 其中可容许网格的一个主要特征是共边的两个网格单元的中心连线与该公共边正交, Voronoi 网格即为可容许网格. 文献 [8] 介绍了求解抛物问题的统一差分格式和多维问题的经济格式, 给出了基于积分插值方法的任意多边形网格上菱形格式的设计, 并且介绍了用离散泛函分析方法研究非线性抛物型方程组的成果以及退化抛物型方程的差分方法. 关于偏微分方程差分方法的研究, 还可参见文献 [9–12].

本文结构如下. 第 2 节将简要回顾周毓麟先生关于抛物型方程差分方法的研究工作, 第 3、4 和 5 节分别介绍抛物型方程离散格式、非线性迭代方法和并行计算格式近十几年来的一些研究进展, 第 6 节作一小结, 并展望未来的研究工作.

2 抛物型方程差分方法

本节将从离散 Sobolev 理论、非线性方程差分格式以及具有并行本性的差分格式三个方面, 简要回顾周毓麟先生在建立离散泛函分析以及应用于非线性抛物型方程差分方法研究等方面取得的突出成就.

2.1 离散 Sobolev 理论

Sobolev 空间理论是研究线性和非线性偏微分方程定解问题的一个十分重要的理论工具, 相应地, 离散函数的内插公式是研究线性和非线性偏微分方程离散方法所必需的理论工具. 从二十世纪八十年代开始, 周先生建立了离散的 Sobolev 空间基本理论, 包括单指标 (自变量) 和多指标的离散 Sobolev 不等式, 并应用于各类非线性偏微分方程差分方法的理论研究 (参见文献 [1–3, 13–18]). 在一些关于差分方法的研究论文和专著中, 也给出了若干离散函数内插公式的证明和应用. 例如, 在 [13] 中获得了多指标离散函数的内插不等式, 在 [15] 和 [16] 中针对单指标离散函数证明了更一般的内插不等式, 并在 [17] 中将它们推广到空间非均匀网格情形, 更进一步, 在 [18] 中建立了多个空间指标和各向异性时空指标情形下的离散函数的内插不等式. 这些研究结果给出了离散函数的各种范数之间的关系, 包括离散最大模、 L^p 模、Hölder 模和 Lipschitz 模等范数. 在一般 (非正交) 网格上国外已有一些推广工作, 例如, 在可容许 (admissible) 网格上的 Poincaré 和 Sobolev 不等式, 参见文献 [7, 19, 20].

2.2 非线性方程差分格式

从专著 [1] 可以看出周先生所开展的研究工作的主要特点之一是注重对非线性问题的研究, 并为非线性离散系统的研究提供了必不可少的分析工具. 本小节将简要介绍对于高阶拟线性抛物型方程组第一边值问题一般加权差分格式的系列研究论文 [21–25], 其中没有要求作原始偏微分方程定解问题存在唯一光滑解的启示性假定.

1985 年, 周先生在 [21] 中对强隐式格式证明了离散解的先验估计以及严格的收敛性定理; 1991 年, 在 [22] 中对显式、弱隐式和强隐式格式证明了离散解的存在性、唯一性、收敛性, 并给出了显式和弱隐式格式的步长限制性条件; 1996 年, 在 [23] 中证明了这些显式、弱隐式和强隐式格式的条件与无条件稳定性, 即离散格式的解连续依赖于原始偏微分方程问题给定的 (离散) 数据; 1997 年, 在 [24] 中研

究了一般的非线性隐式格式的迭代收敛性, 即当第 n 时间层的值给定后, 在第 $n+1$ 时间层构造求解非线性格式的 Picard 迭代序列, 证明了该迭代序列的先验估计, 并推出该序列的压缩性, 从而得到该序列的收敛性, 即收敛到第 $n+1$ 时间层非线性隐式格式的解; 更进一步, 在 [25] 中证明了一般迭代差分格式的收敛性, 即在每一时间层, 非线性隐式格式作 Picard 迭代有限次 (次数不限) 后, 将所得的值作为该时间层的离散解, 然后, 将该值作为下一时间层的迭代初值, 这样即得到每一时间层的离散解. 在 [25] 中证明的结论是, 当 $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$, 该离散解收敛到原始非线性偏微分方程定解问题的解.

需要指出的是, [24] 和 [25] 中的时间步长限制性条件与 [21–23] 中的相同, 无需增加新的苛刻限制性条件. 并且, [26] 中假定存在唯一光滑解, 针对二维和三维问题得到了迭代差分格式解的 (空间离散的) 二阶收敛性估计. 特别地, 在半隐格式 (即在每一时间层仅作一次非线性迭代) 情形, 可得到解的二阶收敛性估计, 其中对时间步长无需增加新的苛刻限制性条件.

周先生针对完全非线性抛物型方程, 以及其他多类具有重要物理背景的非线性偏微分方程也开展了若干深入的研究工作, 例如非线性伪抛物型方程、伪双曲型方程、波动方程组、KdV 方程、Schrödinger 方程、铁磁链方程组等, 参见文献 [27–34].

2.3 非均匀网格上差分格式

实际应用问题中由于物理区域不规则、多介质流动以及介质密度间断等, 采用非均匀网格不可避免. 在文献 [35–38] 中, 周先生在建立的非均匀网格上离散函数一般内插公式^[17]的基础上, 针对非均匀网格上非线性抛物型方程边值问题的差分方法开展了深入的研究, 即将上述研究推广到非均匀网格的情形, 涉及散度型和非散度型方程, 以及线性、拟线性和非线性方程等, 差分格式包括强隐式、弱隐式、显式和混合形式等; 证明了离散解的先验估计、存在唯一性、收敛性和稳定性.

周先生在 [35] 中利用不动点方法, 在作原始偏微分方程定解问题存在唯一光滑解的启示性假定下, 证明了非均匀网格上一般差分格式离散解的先验估计, 以及解的存在性和收敛性; 在 [36] 中, 在不作启示性假定的情形, 对拟线性抛物型方程非均匀网格上一般差分格式, 证明了离散解的先验估计, 进而证明了离散解收敛到原始问题的唯一光滑解; 在 [37] 和 [38] 中针对 [36] 中构造的非线性格式, 分别证明了其稳定性、迭代收敛性和迭代差分格式的收敛性.

2.4 具有并行本性的差分格式

二十世纪八、九十年代以来, 大型并行计算机发展迅猛, 研究和构造适用于大型并行计算机的计算方法刻不容缓. 大规模并行计算的瓶颈之一是全局通讯耗时多, 同步等待时间长. 为了保证计算过程无需进行全局通讯, 在一系列论文 [39–49] 中, 周先生研究了能适应大型并行计算机的并行数值解法, 建立了具有并行本性的差分方法的基本理论.

在 [39–41] 中, 针对拟线性抛物型方程组, 构造了非均匀网格上一般的具有并行本性的差分格式, 证明了差分解的先验估计, 从而得到离散解的存在性、唯一性、收敛性和稳定性; 在 [42] 中提出了若干具体的实用的并行格式, 它们的时间步长稳定性限制条件较为宽松; 在 [43] 中将并行格式推广应用于具有有界可测系数的拟线性抛物型方程组, 在 [44] 中将并行格式推广应用于散度型半线性抛物型方程组. [39–44] 中的并行格式均为条件稳定的.

周先生从 1999 年开始重点研究具有并行本性的无条件稳定与收敛的差分方法. 在 [45] 中对二维抛物型方程组构造具有并行本性的交替格式, 证明了其无条件稳定性; 在 [46] 中对半线性抛物型方程组构造了并行交替差分格式, 证明了该格式的全局稳定性, 这类交替格式在时间空间方向交替采用

某种显式和隐式格式, 在应用实施时存在一定的困难; 后来在 [47, 48] 中, 针对线性、半线性和拟线性非散度型抛物型方程组, 研究了形式简洁的具有并行本性的差分方法, 证明了它们的无条件稳定性和(一阶)收敛性; 在 [49] 中对半线性散度型方程证明了同样的结论.

3 扭曲网格上扩散格式研究进展

3.1 保正格式

扩散方程解的一个基本性质是极值原理成立, 其特殊情形是保持非负性或单调性. 在任意多边形网格上数值求解扩散方程时, 如何构造满足离散极值原理的扩散格式一直是人们关注的难题. 在离散格式设计中, 在保证所需精度的前提下, 格式具有保正性不仅对于保证计算不出现中断, 而且对于抑制离散解的非物理振荡、获得正确的物理图像, 都是很必要的. 对于热传导问题, 格式具有保正性意味着热流流动方向正确, 不违背热力学定律.

Aavatsmark 等^[50, 51]提出了多点通量逼近方法, 并在 [52] 中对多点通量逼近方法作了一个简要的综述. 他们在 [53] 中分析了几类多点通量逼近方法的保正性, 说明了在一般情形下多点通量逼近格式是不保正的. Chen 等^[54]提出了一种改进的多点通量逼近格式, 可抑制非物理振荡的发生. Friis 等^[55]提出了一类全压力支撑多点通量逼近格式, 改进了多点通量逼近格式的保正性. Shashkov 等^[56]提出了一般椭圆问题的支撑算子方法. Morel 等^[57]提出了柱几何下的局部支撑算子方法. Brezzi 等^[58]通过引入新的工具严格分析了拟态 (Mimetic) 离散方法的收敛性, 并在 [59] 中提出了一种构造拟态的导出算子的新方法. Lipnikov 等^[60]分析了拟态有限差分方法的单调性条件, 说明了在一般扭曲网格情形拟态有限差分方法是不保正的. Lipnikov 等^[61]对拟态有限差分方法半个世纪以来的发展作了一个详细的综述.

袁光伟等^[62]对扩散方程离散格式的保正性研究现状进行了综述, 并提出了新的保正格式. 以下对 [62] 和 [63] 等文献中的单元中心型保正格式的构造思路作简要描述.

扩散方程有限体积格式的设计实际上是在每个网格的每条边上给出法向流的离散. 通常网格边上离散法向流定义于边中心处. 在网格扭曲时, 过边中心且垂直于边的直线一般不过单元中心, 并且对多介质问题, 网格边可以是间断线, 因此, 不能简单地仅仅采用单元中心未知量的差商来近似网格边上的法向导数, 必须引入网格边上的辅助未知量, 利用这些量给出 (至少) 两个离散的方向导数, 由此组合出网格边上单侧离散法向流. 如果采用当前网格边上的节点未知量作为辅助未知量, 那么从单元中心向网格边作垂线的垂足可能位于当前网格边的延长线上, 而不是在该边的内部, 此时外法向向量表示为两个辅助方向 (即单元中心与节点的连线方向) 向量的线性组合, 其组合系数出负, 从而离散法向流表示为辅助方向流组合时的组合系数出负, 因此, 不能使得由此得到的格式保正.

为此, Yuan 等^[63]引入几何自适应离散模板, 当单元中心向网格单元边作垂线时, 它必定与网格的某条边 (的内部) 相交, 那么取该边上的节点未知量作为辅助未知量, 以保证上述组合系数非负; 然后, 再将网格边两侧的法向流进行非线性组合, 消去辅助未知量, 从而得到任意星形多边形网格上的保正格式. 文献 [62] 提出了扩散方程的一种新的保正的有限体积格式, 它不仅考虑了网格的几何变形, 而且在每条网格边上的法向流的离散模板中, 包含当前网格边, 因此该格式直接体现了当前网格边上物理量的变化, 即可以兼顾网格几何变形和物理量变化. 这一保正格式具有局部守恒、较高精度等特性, 适用于任意星形多边形网格和非均匀全扩散张量. 与 [63] 的设计思想不同的是: 在对网格边上的外法向量进行分解的表达式中, 除仍然要求向量分解的系数非负外, 还要求其中一个辅助方向与当前

网格边的交点位于该网格边的内部, 使该网格边进入格式的离散模板, 以保证当前网格边的信息进入格式的设计中.

以上提到的几个保正格式是非线性格式, 即对线性问题构造的格式是非线性的, 这样就需要进行非线性迭代, 计算效率显然会下降. 为了考查非线性保正格式求解非线性问题的效果, Sheng 等^[64] 针对非平衡辐射扩散方程组构造了一个非线性保正格式, 从理论上证明了所得的格式是保正的, 数值结果表明, 保正格式的计算效率比九点格式更高, 且守恒误差更小.

Le Potier^[65] 利用非线性格式的思想来构造梯度, 提出了二维三角形网格上各向异性扩散方程的非线性格式, 该格式可同时保持离散最大值和最小值原理. Sheng 等^[66] 提出了一个保极值原理的非线性格式, 其中根据网格的扭曲来自适应地选取离散模板, 将所得的单边流的表达式作非线性加权组合得到守恒流的表达式, 然后按照保极值原理格式应具有的结构, 选取合适的组合系数, 从而得到保极值原理的格式. Droniou 等^[67] 给出了一个同时满足极大值原理和极小值原理的扩散格式, 并证明了在强制性假定下其解收敛到扩散方程的解, 这对于如何选取格式中的参数提出了明确要求, 从而可得到较好的近似解.

Lipnikov 等^[68] 提出了一个无需插值的保正格式, 其构造的基本思想是采用 [63] 中的法向量分解方式. 对于光滑系数问题, 他们不需要引入辅助未知量; 对于间断系数问题, 他们仍需要引入一个中间变量, 该方法在网格不太扭曲的一些特殊情形是有效的. Lipnikov 等^[69] 将 [68] 中的方法推广到对流扩散方程, 对流项的近似采用一个特殊的二阶迎风方法, 从理论上证明了格式的保正性. Lipnikov 等^[70] 提出了具有极小模板的保正格式, 其构造是将 [63] 中的法向量分解方式与 [71] 中的调和平均点方法相结合得到的. Wang 等^[72] 借鉴 [63] 中扩散项的离散和 [69] 中对流项的离散, 针对对流扩散方程提出了一个非线性的保正格式. Sheng 等^[73] 提出了一个改进的保正格式, 与 [63] 中的格式不同之处是, 采用网格边中点未知量替换 [63] 中的网格节点未知量, 并利用多点通量逼近的思想消去网格边中点未知量, 所得的格式显著改进了保正格式在 Kershaw 网格上的精度.

Yao 等^[74] 针对非线性热传导方程九点格式的温度计算出负问题, 提出了守恒的非负性修正算法, 使扩散方程的计算在保物理特性方面得到改进. 该算法属于后处理的方式, 继承了传统“遇负置零”方法简单易用的优点, 并且改进了守恒性和精度. 该算法设计的思路是: 假定初始非线性迭代步的值非负, 在随后的迭代步中, 如果在某网格上计算出的物理量值为负, 则将出负网格的值重置为上一个迭代步的值, 并将该网格周边的流重置为上一迭代步的流, 然后利用相应的计算格式更新周围共边网格的物理量的值, 从而在强制非负的同时, 对能量进行重新分配以保持局部守恒. 得到非负的迭代初始值的途径之一是, 采用五点格式进行第一个非线性迭代步的计算.

3.2 辅助未知量的计算

任意四边形网格上通常的九点格式是实际应用中数值模拟二维辐射问题中常用的方法. 但在扭曲网格上, 九点格式的精度明显降低. 为此, 已经有学者开展了一系列研究, 提高九点格式在扭曲较大的网格上的计算精度, 其主要途径是提高节点值或边中点值的计算精度. 上面已经提到, 在扭曲网格上针对间断系数问题, 扩散格式的设计须引入辅助未知量. 对于单元中心型格式, 基本未知量定义于单元几何中心或单元内某个指定的点, 辅助未知量通常定义于网格节点或网格边中点或网格子边的中点. 节点未知量的最简单的取法是, 令其等于周围单元中心值的算术平均值, 该方法仅仅在扩散系数为常数并且网格为正交、均匀网格时才有精度. 计算节点未知量的较简单的方式是, 采用逆距离/扩散系数加权平均公式, 在正交、均匀网格的情形, 可通过构造以节点为中心的辅助 (对偶) 单元上的离散格式,

推导出该公式, 显然它在扭曲较大的网格上精度较低. 就作者所知, 对于扭曲网格上间断系数问题的求解, 计算辅助未知量的具有较高精度的方法均是通过离散格式或流连续条件进行推导得到的, 其中离散格式建立在某个辅助 (对偶) 单元上, 其中心为定义辅助未知量的点, 见文献 [75] 和 [76]. 如果在基本网格和对偶网格上同时构造离散格式, 将两套网格上的单元中心未知量均作为基本未知量进行求解, 那么, 计算量较大, 见文献 [77] 和 [78]. 针对非线性扩散系数中的辅助未知量的取法, 尤其是在间断面处, 研究工作比较少, 有待开展深入研究.

Sheng 等^[79] 基于最小二乘方法提出了一种改进的节点计算方法, 并证明了所得到的九点格式的稳定性 and 收敛性. Zhao 等^[80] 基于节点流连续条件给出了节点辅助未知量计算公式, 从而得到改进的有限体积格式. Chang 等^[81] 在非匹配网格上采用自适应选取模板的方法, 获得新的节点辅助未知量计算公式, 得到适用于非匹配网格计算的扩散格式. Yin 等^[82] 针对抛物问题提出了一种基于网格单元泛函极小的离散格式. Wu 等^[83] 提出了四边形网格上保持线性准确的九点格式, 他们在 [84] 中提出了一般多边形网格上稳定化的保持线性准确的格式, 并给出了相应的理论分析. 与已有的这些途径不同, Chang 等^[85] 根据九点格式的推导, 基于流连续条件和温度连续条件, 给出了网格边上任意一点处温度值的表达式, 然后在网格边上引入一个特殊点, 消去其中与切向导数相关的部分, 从而得到只包含单元中心未知量的表达式, 即提出了一种该特殊点处未知量的保正的重构算法. 根据这一表达式, 特殊点处的温度值可以表示为相邻单元温度值的线性加权平均, 加权系数为正且和为 1. 将辅助未知量定义于特殊点, 可改进九点格式精度, 数值结果表明, 对包括系数间断的扩散问题, 新格式在扭曲网格上仍接近二阶收敛. 吕桂霞等^[86] 建立了有限点方法中各阶各方向微商间的关系式. Shen 等^[87] 基于方向微商与方向差商, 提出了二维散乱点集上的有限点方法, 并给出了理论分析结果. Lv 等^[88] 将有限点方法应用于设计求解非结构网格上扩散方程的离散格式.

4 非线性迭代方法研究进展

非线性收敛的方法也称作非线性相容方法 (NC), 即在每一时间层非线性迭代收敛到隐式格式的解. 已有研究表明, 在一个时间步内非线性收敛可以较大地提高求解效率^[89,90]. 与分裂算法和半隐格式相比, 全隐非线性格式在许多情形更加精确, 后者允许采用较大的时间步长, 而不明显损失精度. 然而, 对于全隐非线性格式, 必须设计适当的线性 and 非线性迭代方法才能实现其快速精确求解.

非线性迭代方法包括 Picard 方法、Newton 方法、JFNK 方法等 (参见文献 [76,91] 及其参考文献). Picard 方法仅有一阶收敛速度, 对于瞬变问题计算效率过低; JFNK 方法由于需要计算大量的非线性函数值, 计算开销过大. JFNK 和不精确 Newton-Krylov 方法经过适当的预处理, 可以提高计算效率, 但它们主要是在现有迭代方法的基础上进行预处理, 实际上仍然只是在已经形成的非线性代数方程组上进行某种类型的 Newton 线性化, 并未对求解非线性偏微分方程的非线性迭代方法从更基本的层面上进行不同的设计或改进, 所以难以在实质上克服现有 Newton 型迭代方法的一些固有缺点. 例如, 与 Picard 迭代相比, 形成的代数方程组系数矩阵的性质一般说来要变差, 收敛域限制较强, 迭代过程中温度计算出负 (即使非线性全隐格式本身保正) 以及守恒性出现损失等. 实际应用迫切需要发展能克服上述缺点、具有高阶收敛速度且节省实际计算开销的迭代方法.

文献 [76] 介绍了求解非线性偏微分方程方程的两条不同途径. 通常的求解途径是: 首先对时间离散的非线性偏微分方程设计空间离散格式, 然后将得到的非线性代数方程组进行某种线性化, 最后求解得到的线性代数方程组, 称该途径为 DL (discretization-linearization) 途径. 另一种途径是交换上述空间离散与线性化的顺序, 称该求解途径为 LD (linearization-discretization) 途径. 在这两种途径中,

如果都采用 Picard 线性化, 且采用相同的时空离散方式, 则导致的线性代数方程组是相同的, 即这两种途径可给出相同的非线性迭代格式; 如果采用不同的线性化方法或者不同的空间离散方式, 那么可以得到不同的非线性迭代方法. 就作者所知, Newton 迭代通常应用于 DL 途径, 鲜有应用于 LD 途径的文献报道.

4.1 传统的非线性迭代方法

文献 [1] 对非散度型非线性抛物方程研究了非线性隐式格式的基本性质. 类似地, 可得到关于散度型非线性抛物方程的非线性隐式格式基本性质的结果. 通常, 将隐式格式形成的非线性代数方程组记为 $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0$, 再对其进行某种线性化. 如果将非线性扩散系数 $\kappa(x, u)$ 中未知函数取为前一非线性迭代步的值 $\kappa(x, u^{(s)})$ (s 是非线性迭代次数), 那么, 所得到的线性代数方程组的解构成一个迭代序列, 称为 Picard 迭代序列. 文献 [24] 针对非散度型方程研究了 Picard 迭代方法的收敛性. 我们在此基础上证明了散度型扩散方程全隐 Picard 迭代方法具有一阶收敛速度, 其迭代值与全隐格式的解之差是压缩的 (参见文献 [92, 93]).

如果考虑 $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0$ 的 Newton 线性化, 就得到 Newton 迭代序列 $\{\mathbf{u}^{(s)}\}$. Newton 方法需要形成和存储 Jacobi 矩阵, 这是它在许多实际问题中未能得到实用的原因之一. 尤其是在一些大型工程计算中, 非线性扩散系数并未给出解析表达式, 只是由数据库以表状形式给出. 在使用 Krylov 方法求解线性代数方程组时, 只需要矩阵向量乘积, 并不需要 Jacobi 矩阵的具体形式, JFNK 方法用一阶差商近似代替 Jacobi 矩阵与向量的乘积, 从而避免了形成 Jacobi 矩阵. 与原来的 Newton 方法相比, JFNK 方法便于实施, 但在迭代计算中需要大量计算非线性向量函数的值, 这仍然非常耗时, 所需操作数比进行矩阵向量乘积 (在矩阵已知的情形) 所需操作数要多, 并且 JFNK 往往需要进行预处理, 这又要求形成近似 Jacobi 矩阵.

4.2 新的 Newton 型迭代方法

这里简要介绍一种基于 LD 途径的新的 Newton 型迭代方法, 其构造思路如下.

第 1 步 首先考虑非线性抛物型方程的一阶向后 Euler 时间离散 (或其他加权隐式离散).

第 2 步 对时间离散的非线性偏微分方程做 Newton 线性化, 得到一组由线性偏微分方程的解组成的迭代序列. 具体设计是: 将方程中的非线性扩散系数 $\kappa(x, u)$ 在前一迭代步的值处作一阶 Taylor 展开

$$\kappa(x, u) \approx \kappa(x, u^{(s)}) + \frac{\partial \kappa}{\partial u}(x, u^{(s)})(u^{(s+1)} - u^{(s)}),$$

其中 $s = 0, 1, 2, \dots$, 为非线性迭代指标. 对应于上式右端两项, 将扩散项中的 ∇u 分别用当前迭代步的值 $\nabla u^{(s+1)}$ 和前一迭代步的值 $\nabla u^{(s)}$ 近似, 得到一个线性偏微分方程迭代序列. 对每个 s , 这是一个关于未知量的线性对流扩散型方程, 其中对应于 Taylor 展开第 2 项的对流项称为 Newton 修正项.

第 3 步 构造上述线性对流扩散型方程的空间离散格式, 将散度算子 $\nabla \cdot$ 和梯度算子 ∇ 分别进行离散, 在扩散项中离散成 $\nabla_h \cdot$ 和 ∇_h , 在对流项中离散成 $\tilde{\nabla}_h \cdot$ 和 $\tilde{\nabla}_h$, 所得到的离散迭代格式称为全隐 Picard-Newton (P-N) 迭代格式.

第 4 步 使用线性迭代方法求解上面得到的线性代数方程组.

在一些特殊情形例如系数光滑和网格正交等情形, 若采用通常的中心差分, 且要求 Picard-Newton 迭代格式中扩散项和对流项中出现的梯度和散度离散算子相同, 那么可以验证, LD 和 DL 两条途径给出的 Newton 迭代方法是一致的 (具体实施不完全相同). 但在系数间断或系数中涉及辅助未知量的

不同取法等情形, LD 途径可以给出与 DL 不同的 Newton 迭代方法. 并且通过 LD 途径, 只要对流项中的离散算子采用不同于扩散项的离散方式, 那么, 很容易得到不同的线性代数方程组, 即得到不同于标准 Newton 方法的新的迭代方法.

LD 途径具有如下优势: (i) 对散度算子和梯度算子, 便于明确进行不同离散, 由此带来的好处是, 针对扩散项和对流项的特点进行不同离散, 可使得所形成的系数矩阵性质不会比 Picard 方法的系数矩阵的性质更差, 这不同于通常的 Newton 方法; (ii) 与 DL 相比, LD 只需在已有的 Picard 方法基础上, 增加修正项的离散, 即可得到与通常的 (离散) Newton 和 JFNK 等不同的迭代方法.

P-N 迭代之所以优于 Picard 迭代, 是由于存在修正项, 因此能获得接近二阶的收敛速度; 并且, P-N 迭代与 JFNK 不同, 能显式导出线性代数方程组的系数矩阵, 它不是无 Jacobi 矩阵的迭代法, 而是有近似 Jacobi 矩阵的迭代法, 它给出了一种形成 Jacobi 矩阵的具体方式.

在 P-N 迭代格式的构造中, 需要用到扩散系数的偏导数值, 当扩散系数没有解析表达式而是由列表给出, 即为表状结构时, 无法给出扩散系数对物理量的导数的解析表达式. 对此, 将偏导数用差商近似代替, 于是可得到无导数 Picard-Newton 迭代格式.

4.3 理论分析和应用推广

在文献 [1,24,25] 的基础上, 作者对 P-N 迭代格式解的误差估计和收敛性进行了理论分析, 得到的部分理论结果如下: (1) 针对一维非线性抛物方程初边值问题, 在 [92,94] 中, 对基于 LD 途径的 P-N 迭代进行了理论分析, 证明了 P-N 方法和无导数的 P-N 方法的二阶收敛性; 并且, 利用 [92,94] 中的证明方法, 不难证明当迭代次数趋于无穷时, 半离散的 Newton 线性化方程的解以二阶收敛速度收敛到半离散非线性偏微分方程的解. (2) 在 [93] 中, 针对二维非线性抛物型方程的 Dirichlet 初边值问题, 在可容许网格上, 构造了基于单元中心型有限体积离散的 P-N 迭代格式, 证明了其解收敛到时间离散的偏微分方程的解, 并证明了迭代格式的解以二阶速度收敛到隐格式的解. (3) 在实际应用中扩散系数可能不仅依赖于物理量本身, 而且还依赖于物理量的梯度, 例如应用问题中的限流非平衡辐射扩散方程组, 它是一个典型的强非线性抛物问题^[95]. 在 [96] 中, 针对系数依赖于未知量梯度的拟线性抛物方程组的初边值问题, 证明了 P-N 方法的二阶收敛性.

强非线性偏微分方程的另一个例子是由变分法导出的二维网格生成方程组, 它是强非线性的守恒型椭圆方程组. Knupp 等在文献 [97] 的第 170-171 页提出了如下公开问题: 对于 Winslow、Liao、修正的 Liao 和 AO 平方等泛函导出的强非线性守恒型网格生成方程组, 现有的 Picard 迭代方法求解失败, 需要构造有效的迭代法. 姚彦忠等^[98] 设计了求解上述各类强非线性方程组新的 Picard 迭代方法, 很好地解决了该公开问题. Yue 等^[99] 针对二维限流非平衡辐射扩散方程组, 基于 LD 途径, 构造了两种 P-N 非线性迭代格式, 其中针对对流项, 设计了两种空间离散格式, 得到了边中心型 Picard-Newton (P-NC) 迭代格式和迎风型 Picard-Newton (P-NU) 迭代格式. 与对非线性离散格式进行 Newton 线性化相比, 对非线性偏微分方程进行 Newton 线性化相对容易些, 但得到的是线性对流扩散方程, 需要对其进行空间离散和数值求解, 实现其高精度离散和高效求解仍然有相当难度. 并且, 在限流扩散情形, 构造 P-N 迭代格式会出现新的复杂度: 本来辐射扩散系数为标量, 但它依赖于辐射能量密度的梯度, 于是, 线性化之后会出现全张量扩散系数, 这明显增加了数值计算的困难. 文献 [99] 证明了 Newton 线性化后得到的对流扩散方程的二阶张量系数矩阵是对称正定的. 与 Picard 方法相比, P-N 方法计算效率较高, 可以使用较少的 CPU 时间得到精度较高的解, 这是因为 P-N 方法不需要引入比 Picard 方法更苛刻的时间步长控制, 可以在较大的时间步长条件下, 使用较少次数的非线性迭代.

5 并行计算格式研究进展

袁光伟等^[100,101]提出的格式不采用任何显示格式来计算子区域交界点处的值,而是直接用交界点处前一时刻的值作为内边界点处的 Dirichlet 条件,在子区域内部用全隐格式进行计算.这类格式都是无条件稳定的,但只有一阶精度.为提高并行格式的精度,袁光伟等^[102]构造了基于界面修正的迭代并行格式,其构造思想是在子区域上隐式格式迭代求解过程中不断进行内界面处的修正,即采用隐式格式不断更新内界面处的值.

Sheng 等^[103]针对线性抛物方程,构造了两类具有并行本性的并行差分格式.构造格式的基本思想如下:首先,将子区域的内边界条件取为前两层时间值的线性组合,然后在子区域内部用全隐格式并行求解,最后校正内边界的值.利用周毓麟先生提出的离散泛函分析方法证明了所得的并行格式既是无条件稳定的,又是二阶收敛的.袁光伟等^[104]针对拟线性抛物型方程组给出了一类具有界面外推和修正的并行本性差分格式.并且不作启发性假定,证明了所构造的并行差分格式的离散向量解的存在性和唯一性.而且在格式的离散向量解对原始问题的已知离散数据连续依赖的意义下,证明了并行差分格式的解是无条件稳定的.同时证明了具有界面外推和修正的并行本性差分格式的离散向量解收敛到原始拟线性抛物问题的唯一广义解.Yuan 等^[105]针对非线性抛物方程提出了一类既具有二阶精度又是无条件稳定的并行差分格式.

Shi 等^[106]提出了一类校正的显隐区域分解方法,他们给出了一种锯齿形的分区界面以适用于二维问题的计算,并且从理论上证明了格式的无条件稳定性.廖洪林等^[107]针对半线性抛物方程提出了校正的显隐区域分解算法,在内边界上给出了一种组合界面以减少全局通讯.

Yuan 等^[108]针对任意四边形网格上的非线性扩散方程提出了一种守恒的区域分解方法,在内边界上采用 Dirichlet 边界条件计算子区域上的问题,非线性迭代收敛以后再采用流边界条件重新求解一次子区域上的问题.该方法将并行格式设计与非线性迭代求解耦合在一起,所得的并行迭代格式是守恒的,且不需要全局通讯.

6 小结和拟开展的研究工作

本文针对拟线性抛物型方程的离散方法,简要回顾了周毓麟先生取得的若干重要成果,以及在构造和分析离散格式、非线性迭代方法和并行计算格式三个方面的相关进展.离散格式、非线性迭代方法和并行计算格式的研究应充分注意保持原始偏微分方程的特性,例如:(i)格式设计应保持解的非负性或更严格的离散极值原理;(ii)迭代法的设计不仅仅限于针对非线性代数方程组,而是可以直接针对原始的非线性偏微分方程,由此,在设计格式时可以很好地兼顾所得的线性化偏微分方程不同微分项的特点;(iii)并行计算格式应保持解的守恒性.从本文叙述可以看出,在上述三个方面的研究工作中,研究思路完全遵循和体现了周先生开展计算数学研究工作的准则:对于实际应用中的大型科学计算,设计离散方法时应该重视相关联的微分方程属性,还应该重视离散系统的微分属性,不能仅仅局限于研究问题离散后的代数属性,这对于解决基础与应用相结合的问题是特别重要的.

非平衡辐射热传导在武器、惯性约束聚变、Z 箍缩实验和天体物理问题中有重要的应用,对真实物理系统高精度的数值模拟需要采用合适的物理建模.例如,当辐射与物质达到平衡时,可采用单温模型描述;当辐射与物质各自达到平衡,但两者之间未达到平衡时,需采用两温模型描述.随着时间的演化,物理系统的物理状态可在两温和单温之间转化.并且,在同一时刻还可能出现多个状态并存的问题,例如单温区和两温区的耦合问题.另外,实际计算中将分区界面放在单温区内远离实际(物质)

界面数个网格的地方. 在单温区以及单温两温过渡区内采用两温模型计算时, 如果两温计算的格式不合适将导致计算量极大或计算失真. 因此需要研究如下问题: (1) 在网格剖分不太细、计算时间可承受的条件下, 如何设计合理的两温计算格式, 使得当应用于单温区及整个物理区域计算时能够得到所需精度的解; (2) 如何设计合理的分区并行计算格式, 既具有高并行度, 又保持已有隐式格式的稳定性 and 精度. 总之, 很有必要研究和构造非平衡辐射热传导问题的计算方法, 包括离散格式、迭代方法和并行格式, 使之适用于实际问题的求解. 对于多群辐射输运、多群扩散和其它较精细的输运近似模型, 同样需要研究类似的问题, 并且空间计算区域包括一维球几何、二维直角几何、二维柱几何和三维情形等.

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Zhou Y L. Applications of Discrete Functional Analysis to Finite Difference Method. Beijing: International Academic Publishers, 1990
- 2 周毓麟. 周毓麟论文集 (第一卷). 北京: 科学出版社, 1992
- 3 周毓麟. 周毓麟论文集 (第二卷, 第三卷). 北京: 世界图书出版公司, 2002
- 4 Heinrich B. Finite Difference Methods on Irregular Networks. International Series of Numerical Mathematics, 82. Basel-Boston-Stuttgart: Birkhauser-Verlag, 1987
- 5 李荣华, 陈仲英. 微分方程广义差分法. 长春: 吉林大学出版社, 1994 (Li R H, Chen Z Y, Wu W. Generalized Difference Methods for Differential Equations: Numerical Analysis of Finite Volume Methods. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 226. New York: Marcel Dekker, 2000)
- 6 Shashkov M. Conservative Finite Difference Methods on General Grids. Boca Raton: CRC Press, 1996
- 7 Eymard R, Galloüet T, Herbin R. Finite volume methods. In: Ciarlet P G, Lions J L, eds. Handbook of Numerical Analysis, vol. VII. Amsterdam: North-Holland, 2000, 713–1020
- 8 李德元, 陈光南. 抛物型方程差分方法引论. 北京: 科学出版社, 1995
- 9 郭本瑜. 偏微分方程差分方法. 北京: 科学出版社, 1988
- 10 萨马尔斯基 A A, 安德烈耶夫 B B. 椭圆型方程差分方法. 武汉大学计算数学教研室, 译. 北京: 科学出版社, 1984
- 11 Marchuk G I, Shaidurov V V. Difference Methods and Their Extrapolations. Berlin: Springer-Verlag, 1983
- 12 Morton K M. Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems. London: Chapman & Hall, 1996
- 13 Zhou Y L. Interpolation formulas of intermediate quotients of discrete functions with several indices. J Comput Math, 1984, 2: 376–381
- 14 Zhou Y L. Interpolation formulas of intermediate quotients of discrete functions and their applications. In: Feng K, ed. Proceedings of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations. Finite Difference Method and Finite Slice Method for Nonlinear Evolutional Systems of Partial Differential Equations. 1984, 126–152
- 15 Zhou Y L. General interpolation formulas for spaces of discrete functions with one index. Acta Sci Nat Univ Pekinensis, 1992, 28: 1–16
- 16 Zhou Y L. On the general interpolation formulas for spaces of discrete functions (I). J Comput Math, 1993, 11: 188–192
- 17 Zhou Y L. General interpolation formulas for spaces of discrete functions with nonuniform meshes. J Comput Math, 1995, 13: 70–93
- 18 Zhou Y L, Yuan G W. Some discrete interpolation inequalities with several indices. Beijing Math, 1996, 2: 94–108
- 19 Glitzky A, Griepentrog J A. Discrete Sobolev-Poincaré inequalities for Voronoï finite volume approximations. SIAM J Numer Anal, 2010, 48: 372–391
- 20 Marianne B C, Claire C H, Francis F. On discrete functional inequalities for some finite volume schemes. arXiv:1202.4860, 2012
- 21 周毓麟. 拟线性抛物方程组第一边界问题的有限差分法. 中国科学 A 辑, 1985, 15: 206–220 (Zhou Y L. Finite difference method of first boundary problem for quasilinear parabolic systems. Sci China Ser A, 1985, 28: 368–385)
- 22 周毓麟, 沈隆钧, 韩臻. 拟线性抛物组第一边界问题的有限差分法 (续). 中国科学 A 辑, 1990, 20: 1126–1136 (Zhou Y L, Shen L J, Han Z. Finite difference method of first boundary problem for quasilinear parabolic systems (continued). Sci China Ser A, 1991, 34: 405–418)
- 23 周毓麟, 沈隆钧, 袁光伟. 拟线性抛物组第一边值问题有限差分方法 III: 稳定性. 中国科学 A 辑, 1996, 26: 577–

- 583 (Zhou Y L, Shen L J, Yuan G W. Finite difference method of first boundary problem for quasilinear parabolic systems, III: Stability. *Sci China Ser A*, 1996, 39: 685–693)
- 24 周毓麟, 沈隆钧, 袁光伟. 拟线性抛物方程组第一边界问题的有限差分方法 IV: 迭代收敛性. *中国科学 A 辑*, 1997, 27: 322–327 (Zhou Y L, Shen L J, Yuan G W. Finite difference method of first boundary problem for quasilinear parabolic systems, IV: Convergence of iteration. *Sci China Ser A*, 1997, 40: 469–474)
- 25 周毓麟, 沈隆钧, 袁光伟. 拟线性抛物方程组第一边界问题的有限差分方法 V: 迭代差分格式的收敛性. *中国科学 A 辑*, 1997, 27: 988–996 (Zhou Y L, Shen L J, Yuan G W. Finite difference method of first boundary problem for quasilinear parabolic systems, V: Convergence of iterative difference schemes. *Sci China Ser A*, 1997, 40: 1148–1157)
- 26 Zhou Y L, Shen L J, Yuan G W. Convergence of iterative difference schemes for two and three dimensional nonlinear parabolic systems. *J Partial Differential Equations*, 1997, 10: 257–274
- 27 周毓麟, 袁光伟. 两维完全非线性伪抛物组组的差分格式. *中国科学 A 辑*, 1995, 25: 1248–1258 (Zhou Y L, Yuan G W. Difference schemes for fully nonlinear pseudo-parabolic systems with two space dimensions. *Sci China Ser A*, 1996, 39: 122–136)
- 28 Zhou Y L. Finite difference method of the boundary problem for the systems of Sobolev-Galpern type. *J Comput Math*, 1983, 1: 363–371
- 29 Zhou Y L. Finite difference method of boundary problem for nonlinear pseudo-hyperbolic systems. *J Math Res Expos*, 1985, 5: 73–79
- 30 Zhou Y L. The general nonlinear mutual boundary problems for the systems of nonlinear wave equations by finite difference method. *J Comput Math*, 1985, 3: 134–160
- 31 Zhou Y L, Guo B L. Finite difference solutions of the boundary problems for the systems of ferro-magnetic chain. *J Comput Math*, 1983, 1: 294–302
- 32 Zhou Y L, Xu G R. Finite difference solutions of the nonlinear mutual boundary problems for the systems of ferro-magnetic chain. *J Comput Math*, 1984, 2: 263–271
- 33 周毓麟, 袁国兴. 非线性伪双曲差分格式的收敛性. *清华大学学报 (自然科学版)*, 1988, 28: 10–17
- 34 Zhou Y L, Du M S. Difference schemes for fully nonlinear pseudo-hyperbolic systems. *Acta Math Appl Sin (Engl Ser)*, 1991, 7: 298–320
- 35 Zhou Y L. Difference schemes with nonuniform meshes for nonlinear parabolic system. *J Comput Math*, 1996, 14: 319–335
- 36 Zhou Y L. Finite difference method with nonuniform meshes for quasilinear parabolic systems. *J Comput Math*, 1997, 15: 289–310
- 37 Zhou Y L, Shen L J, Yuan G W. Stability of finite difference schemes with nonuniform meshes for quasilinear parabolic systems. *Beijing Math*, 1995, 1: 154–163
- 38 Zhou Y L, Shen L J, Yuan G W. Convergence of iterative difference method with nonuniform meshes for quasilinear parabolic systems. *J Partial Differential Equations*, 1998, 11: 163–172
- 39 周毓麟. 非线性抛物组的具有并行本性的差分格式. *数值计算与计算机应用*, 1995, 16: 162–172 (Zhou Y L. On the difference schemes with intrinsic parallelism for nonlinear parabolic systems. *Chin J Numer Math Appl*, 1996, 18: 66–78)
- 40 周毓麟. 拟线性抛物组具有并行本性的差分格式. *中国科学 A 辑*, 1997, 27: 43–48 (Zhou Y L. Difference schemes with intrinsic parallelism for quasilinear parabolic systems. *Sci China Ser A*, 1997, 40: 270–278)
- 41 周毓麟, 袁光伟. 非线性抛物组具有并行本性的一般差分格式. *中国科学 A 辑*, 1997, 27: 105–111 (Zhou Y L, Yuan G W. General difference schemes with intrinsic parallelism for nonlinear parabolic systems. *Sci China Ser A*, 1997, 40: 357–365)
- 42 周毓麟, 沈隆钧, 袁光伟. 非线性抛物方程组具有并行本性某些实用差分格式. *数值分析与计算机应用*, 1997, 18: 64–73 (Zhou Y L, Shen L J, Yuan G W. On some practical difference schemes with intrinsic parallelism for nonlinear parabolic systems. *Adv Math*, 1996, 25: 91–92)
- 43 Zhou Y L, Yuan G W. Difference method of general schemes with intrinsic parallelism for one-dimensional quasilinear parabolic systems with bounded measurable coefficients. *J Partial Differential Equations*, 1999, 12: 213–228
- 44 Zhou Y L, Yuan G W. General difference schemes with intrinsic parallelism for semilinear parabolic systems of divergence type. *J Comput Math*, 1999, 17: 337–352
- 45 Yuan G W, Shen L J, Zhou Y L. Unconditional stability of alternating difference schemes with intrinsic parallelism for two-dimensional parabolic systems. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 1999, 15: 625–636
- 46 Yuan G W, Shen L J, Zhou Y L. Unconditional stability of parallel alternating difference schemes for semilinear parabolic systems. *Appl Math Comput*, 2001, 117: 267–283
- 47 Yuan G W, Shen L J, Zhou Y L. Parallel differences schemes for parabolic problem. In: *Proceeding of 5th International*

- Conference on Algorithms and Architectures for Parallel Proceeding. IEEE Computer Society, 2002, 238–242
- 48 周毓麟, 沈隆钧, 袁光伟. 拟线性抛物组具有并行本性的无条件稳定与收敛的差分方法. 中国科学 A 辑, 2003, 33: 310–324 (Zhou Y L, Yuan G W, Shen L J. The unconditional stable and convergent difference methods with intrinsic parallelism for quasilinear parabolic systems. *Sci China Ser A*, 2004, 47: 453–472)
- 49 Zhou Y L, Shen L J, Yuan G W. Unconditional stable difference methods with intrinsic parallelism for semilinear parabolic systems of divergence type. *Chin Ann Math Ser B*, 2004, 25: 213–224
- 50 Aavatsmark I, Barkve T, Bøe Ø, et al. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media, I: Derivation of the methods. *SIAM J Sci Comput*, 1998, 19: 1700–1716
- 51 Aavatsmark I, Barkve T, Bøe Ø, et al. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media, II: Discussion and numerical results. *SIAM J Sci Comput*, 1998, 19: 1717–1736
- 52 Aavatsmark I. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. *Comput Geosci*, 2002, 6: 405–432
- 53 Aavatsmark I. Comparison of monotonicity for some multipoint flux approximation methods. In: Eymard R, Hérard J M, eds. *Finite Volumes for Complex Applications*, 5. New York: Wiley-ISTE, 2008, 19–34
- 54 Chen Q, Wan J, Yang Y, et al. Enriched multi-point flux approximation for general grids. *J Comput Phys*, 2008, 227: 1701–1721
- 55 Friis H, Edwards M. A family of MPFA finite-volume schemes with full pressure support for the general tensor pressure equation on cell-centered triangular grids. *J Comput Phys*, 2011, 230: 205–231
- 56 Shashkov M, Steinberg S. Support-operator finite-difference algorithms for general elliptic problems. *J Comput Phys*, 1995, 118: 131–151
- 57 Morel J, Roberts R, Shashkov M. A local support-operators diffusion discretization scheme for quadrilateral r-z meshes. *J Comput Phys*, 1998, 144: 17–51
- 58 Brezzi F, Lipnikov K, Shashkov M. Convergence of the mimetic finite difference method for diffusion problems on polyhedral meshes. *SIAM J Numer Anal*, 2005, 43: 1872–1896
- 59 Brezzi F, Lipnikov K, Shashkov M, et al. A new discretization methodology for diffusion problems on generalized polyhedral meshes. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2007, 196: 3682–3692
- 60 Lipnikov K, Manzini G, Svyatskiy D. Analysis of the monotonicity conditions in the mimetic finite difference method for elliptic problems. *J Comput Phys*, 2011, 230: 2620–2642
- 61 Lipnikov K, Manzini G, Shashkov M. Mimetic finite difference method. *J Comput Phys*, 2013, in press
- 62 袁光伟, 盛志强, 岳晶岩. 扩散方程保正的有限体积格式. 中国科学: 数学, 2012, 42: 951–970
- 63 Yuan G, Sheng Z. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes. *J Comput Phys*, 2008, 227: 6288–6312
- 64 Sheng Z, Yue J, Yuan G. Monotone finite volume schemes of nonequilibrium radiation diffusion equations on distorted meshes. *SIAM J Sci Comput*, 2009, 31: 2915–2934
- 65 Le Potier C. A nonlinear finite volume scheme satisfying maximum and minimum principles for diffusion operators. *Int J Finite Volumes*, 2009, 6: 1–20
- 66 Sheng Z, Yuan G. The finite volume scheme preserving extremum principle for diffusion equations on polygonal meshes. *J Comput Phys*, 2011, 230: 2588–2604
- 67 Droniou J, Le Potier C. Construction and convergence study of schemes preserving the elliptic local maximum principle. *SIAM J Numer Anal*, 2011, 49: 459–490
- 68 Lipnikov K, Svyatskiy D, Vassilevski Y. Interpolation-free monotone finite volume method for diffusion equations on polygonal meshes. *J Comput Phys*, 2009, 228: 703–716
- 69 Lipnikov K, Svyatskiy D, Vassilevski Y. A monotone finite volume method for advection-diffusion equations on unstructured polygonal meshes. *J Comput Phys*, 2010, 229: 4017–4032
- 70 Lipnikov K, Svyatskiy D, Vassilevski Yu. Minimal stencil finite volume scheme with the discrete maximum principle. *Russ J Numer Anal Math Model*, 2012, 27: 369–385
- 71 Agelas L, Eymard R, Herbin R. A nine-point finite volume scheme for the simulation of diffusion in heterogeneous media. *C R Acad Sci Paris Ser I*, 2009, 347: 673–676
- 72 Wang S, Yuan G, Li Y, et al. A monotone finite volume scheme for advection-diffusion equations on distorted meshes. *Int J Numer Meth Fluids*, 2012, 69: 1283–1298
- 73 Sheng Z, Yuan G. An improved monotone finite volume scheme for diffusion equation on polygonal meshes. *J Comput Phys*, 2012, 231: 3739–3754
- 74 Yao Y, Yuan G. Enforcing positivity with conservation for nine-point scheme of nonlinear diffusion equations. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2012, 223: 161–172

- 75 袁光伟. 扩散方程九点格式中网格节点值的计算与分析. 计算物理实验室年报, 2005, 512–529
- 76 袁光伟, 杭旭登, 盛志强, 等. 辐射扩散计算方法若干研究进展. 计算物理, 2009, 26: 475–500
- 77 Hermeline F. A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes. *J Comput Phys*, 2000, 160: 481–499
- 78 Yuan G Sheng, Z. Analysis of accuracy of a finite volume scheme for diffusion equations on distorted meshes. *J Comput Phys*, 2007, 224: 1170–1189
- 79 Sheng Z, Yuan G. A nine point scheme for the approximation of diffusion operators on distorted quadrilateral meshes. *SIAM J Sci Comput*, 2008, 30: 1341–1361
- 80 Zhao Q, Yuan G. Analysis and construction of cell-centered finite volume scheme for diffusion equation on distorted meshes. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2009, 198: 3039–3050
- 81 Chang L, Yuan G. Cell-centered finite volume methods with flexible stencils for diffusion equations on general non-conforming meshes. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2009, 198: 1638–1646
- 82 Yin L, Wu J, Yao Y. A cell functional minimization scheme for parabolic problem. *J Comput Phys*, 2010, 229: 8935–8951
- 83 Wu J, Dai Z, Gao Z, et al. Linearity preserving nine-point schemes for diffusion equation on distorted quadrilateral meshes. *J Comput Phys*, 2010, 229: 3382–3401
- 84 Wu J, Gao Z, Dai Z. A stabilized linearity-preserving scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion problems on polygonal meshes. *J Comput Phys*, 2012, 231: 7152–7169
- 85 Chang L, Yuan G. An efficient and accurate reconstruction algorithm for the formulation of cell-centered diffusion schemes. *J Comput Phys*, 2012, 231: 6935–6952
- 86 吕桂霞, 沈隆钧, 沈智军. 有限点方法研究. 计算物理, 2008, 25: 505–524
- 87 Shen L, Lv G, Shen Z. A finite point method based on directional differences. *SIAM J Numer Anal*, 2009, 47: 2224–2242
- 88 Lv G, Shen L, Shen Z. Numerical methods for energy flux of temperature diffusion equation on unstructured meshes. *Int J Numer Meth Biomed Engrg*, 2010, 26: 646–665
- 89 Knoll D A, Rider W J, Olson G L. An efficient nonlinear solution method for non-equilibrium radiation diffusion. *J Quant Spect Radiat Transfer*, 1999, 63, 15–29
- 90 Knoll D A, Rider W J, Olson G L. Nonlinear convergence, accuracy, and time step control in non-equilibrium radiation diffusion. *J Quant Spect Radiat Transfer*, 2001, 70: 25–36
- 91 Knoll D A, Keyes D E. Jacobian-free Newton-Krylov methods: A survey of approaches and applications. *J Comput Phys*, 2004, 193: 357–397
- 92 袁光伟. 非线性抛物型方程迭代加速计算方法. 计算物理实验室年报, 2004, 366–413
- 93 袁光伟. 二维非线性抛物型方程加速迭代方法的构造、收敛速度与误差估计. 计算物理实验室年报, 2005, 576–613
- 94 Yuan G, Hang X. Acceleration methods of nonlinear iteration for nonlinear parabolic equations. *J Comput Math*, 2006, 24: 412–424
- 95 Bowers R L, Wilson J R. *Numerical Modeling in Applied Physics and Astrophysics*. Boston: Jones and Bartlett, 1991
- 96 袁光伟. 强非线性抛物型方程无导数的 Picard-Newton 迭代方法. 计算物理实验室年报, 2004, 453–464
- 97 Knupp P, Steinberg S. *Fundamentals of Grid Generation*. Boca Raton: CRC Press, 1993
- 98 姚彦忠, 袁光伟. 一类高度非线性网格生成方程的迭代求解方法. 数值计算与计算机应用, 2007, 28: 306–320
- 99 Yue J, Yuan G. Picard-Newton iterative method with time step control for multi-material non-equilibrium radiation diffusion problem. *Commun Comput Phys*, 2011, 10: 844–866
- 100 袁光伟, 沈隆钧. 抛物型方程实验的隐式区域分解方法 (I). 计算物理实验室年报, 2000, 472–489
- 101 袁光伟, 沈隆钧. 抛物型方程实验的隐式区域分解方法 (II). 计算物理实验室年报, 2000, 490–499
- 102 袁光伟, 杭旭登. 热传导方程基于界面修正的迭代并行计算方法. 计算物理实验室年报, 2003, 535–549
- 103 Sheng Z, Yuan G, Hang X. Unconditional stability of parallel difference schemes with second order accuracy for parabolic equation. *Appl Math Comput*, 2007, 184: 1015–1031
- 104 袁光伟, 杭旭登, 盛志强. 拟线性抛物方程组具有界面外推的并行本性差分方法. 中国科学 A 辑, 2007, 37: 145–164 (Yuan G, Hang X, Sheng Z. Parallel difference schemes with interface extrapolation terms for quasi-linear parabolic systems. *Sci China Ser A*, 2007, 50: 253–275)
- 105 Yuan G, Sheng Z, Hang X. The unconditional stability of parallel difference schemes with second order convergence for nonlinear parabolic system. *J Partial Differential Equations*, 2007, 20: 45–64
- 106 Shi H, Liao H. Unconditional stability of corrected explicit-implicit domain decomposition algorithms for parallel approximation of heat equations. *SIAM J Numer Anal*, 2006, 44: 1584–1611

- 107 廖洪林, 史汉生, 孙志忠. 求解二维半线性抛物方程的校正型显隐区域分解算法. 中国科学 A 辑, 2009, 39: 749–774
(Liao H, Shi H, Sun Z. Corrected explicit-implicit domain decomposition algorithms for two-dimensional semilinear parabolic equations. Sci China Ser A, 2009, 52: 2362–388)
- 108 Yuan G, Yao Y, Yin L. Conservative domain decomposition procedure for nonlinear diffusion problems on arbitrary quadrilateral grids. SIAM J Sci Comput, 2011, 33: 1352–1368

The computational method for nonlinear parabolic equation

YUAN GuangWei, YUE JingYan, SHENG ZhiQiang & SHEN LongJun

Abstract In this paper, we briefly review some work on finite difference methods for nonlinear parabolic equations, including parts of achievements contributed by Professor ZHOU Yulin. Moreover, a survey of recent advances on discretization methods for nonlinear parabolic equations is presented and some plans on future research are described.

Keywords parabolic equations, finite difference methods, nonlinear

MSC(2010) 65M06, 65M12, 65M55

doi: 10.1360/012012-616