中国科学: 数学　2014 年　第 44 卷　第 7 期: 741～754
link.springer.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

混合体积、对数凹序列和 B 样条函数

许艳

东北财经大学数学与数量经济学院, 大连 116025
E-mail: yan_xu@dufe.edu.cn

收稿日期: 2013-09-10; 接受日期: 2013-12-24
国家自然科学基金 (批准号: 11301060, 11226326, 11071031, 71171035, 71271045 和 71273044)、中国博士后科学基金 (批准号: 2013M541234)、辽宁省教育厅科学研究 (批准号: L2012409)、辽宁省高等学校优秀人才支持计划 (批准号: LJQ2012099)、辽宁省高校创新团队支持计划 (批准号: WT2011004) 和东北财经大学优秀科研创新人才 (批准号: DUFE2014R20) 资助项目

摘要　本文主要通过样条函数方法研究与之相关的离散几何学和组合学问题. 在离散几何学方面主要考虑超立方体切面 (cube slicing) 体积和混合体 (mixed volume) 的样条表示, 利用 B 样条函数的几何解释, 将超立方体切面问题转化为与之等价的样条函数问题, 分别给出 Laplace 和 Pólya 关于超立方体切面定理的样条证明, 将样条函数与混合体积联系起来, 给出一类混合体积的样条解释. 利用这种解释可以得到一类具有对数凹性质的组合序列, 从而部分地回答了 Schmidt 和 Simion 所提出的关于混合体积的公开问题. 在组合数学方面主要考虑多种组合多项式与样条函数的关联以及组合序列对数凹性质的样条方法研究. 本文借助丰富的样条函数理论, 不但验证了离散几何学和组合数学中很多现有的结果, 而且得到了一系列离散数学对象的新性质, 建立了离散数学问题与具有连续性特质的样条函数之间的内在联系.

关键词　B 样条　混合体积　Eulerian 数　多面体体积　对数凹性质
MSC (2010) 主题分类　05A16, 41A15

1　引言

1946 年, 样条函数之父 Schoenberg [1] 给出了一元样条函数的 4 种观点: Fourier 变换观点、Taylor 展开观点、力学观点和概率论观点. 此后, 分别由 de Boor [2]、Micchelli、Dahmen [3] 和 De Vore 等人将这些观点推广到了高维. 这 4 种观点使得样条函数结合计算机技术渗透到数学和科学技术的诸多领域. 更为有趣的是, 产生于逼近论的多元样条与研究离散对象的离散几何学和组合学也有着密切的关系. 但是, 由于这两个学科相距较远, 在很长一段时间里, 人们并没有意识到它们之间的内在联系. 直至近年来, 多元样条在离散数学中的应用才逐渐的引起了人们的重视. 法国数学家 Vergne [4] 在 2006 年数学家大会的 1 小时报告中, 首次介绍了多元样条在表示论中的应用. 此后, 她的研究团队系统地开展了这一领域的研究 [5,6]. 其近期发表了论文 [7], 建立了 Box 样条的卷积形式与多元 Bernoulli 多项式的关联. 我国学者许志强 [8,9] 率先开展了多面体体积及其内部整点计数问题的多元样条方法研究. 可以说, 样条函数在其他数学分支中的渗入已经逐渐吸引不同领域的数学家的关注, 成为沟通这些数学分支的新的桥梁.

英文引用格式: Xu Y. Mixed volumes, log-concave sequences and B-splines (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 741–754, doi: 10.1360/N012013-00132

本文的主要目的是通过样条函数方法研究与之相关的离散几何学和组合学问题, 离散几何方面主要考虑超立方体切面问题和混合体的样条表示; 组合数学方面主要考虑多种组合多项式和样条函数的关联以及组合序列对数凹性质的样条方法研究. 本文借助丰富的样条函数理论, 不但验证了很多离散几何学和组合数学中已有的结果, 而且得到一系列离散数学对象的新性质, 从而将离散数学问题与产生于逼近论的样条函数联系在一起. 本文结构如下: 第 2 节回顾 B 样条函数的基本理论; 第 3 节给出 B 样条在超立方体切面问题中的应用; 第 4 节讨论 B 样条与经典 Eulerian 数的关联; 第 5 节研究 B 样条与细化 Eulerian 数、下降多项式和混合体积的内在联系; 第 6 节探索组合序列对数凹性质的 B 样条方法研究.

2 B 样条函数理论

B 样条方法又称为投影子法, 起源于 Curry 和 Schoenberg [10] 关于一元样条的工作, 是一种定义 B 样条的几何直观方法. 这种方法本质是研究高维空间的多面体在较低维空间投影的测度函数.

以 t_i, $0 \leqslant i \leqslant n$ 为结点的一元 B 样条定义为

$$\int_{\mathbb{R}} S(t \mid t_0, \ldots, t_n) g(t) dt = \int_{\Delta} g((v,t)) dm(t), \quad \forall g \in C_0(\mathbb{R}), \tag{2.1}$$

其中 $C_0(\mathbb{R})$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的具有有限支集的连续函数全体. Curry 和 Schoenberg [10] 就 (2.1) 给出了一元 B 样条的一种几何解释. 设 n 单纯形 σ 顶点 v_i 的第一个分量是 t_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, 则

$$S(t \mid t_0, \ldots, t_n) = \frac{\mathrm{vol}_{n-1}\{v \in \sigma \mid v^{(1)} = t\}}{n! \mathrm{vol}_n \sigma}, \tag{2.2}$$

其中 $v^{(1)}$ 表示 v 的第一个分量, vol_i 为 $\mathbb{R}^i$ 中的 Lebesgue 测度. 如无特别说明, 测度均指 Lebesgue 测度.

de Boor 和 De Vore [11] 首先将 (2.1) 和 (2.2) 推广到了高维情形. 令 V 为 $s \times n$ 实矩阵且 $\mathrm{rank}(V) = s$. V 也可看作元素为 s 维列向量 $v_1, \ldots, v_n$ 组成的可重集合. 假定 V 的凸包不包含原点, 则与 V 相关的 Box 样条函数 $B(x \mid V)$ 可由如下规则所定义 [2,11]:

定义 2.1

$$\int_{\mathbb{R}^s} \phi(x) B(x \mid V) dx = \int_{[0,1)^n} \phi(Vu) du, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^s), \tag{2.3}$$

其中 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^s)$ 为 $\mathbb{R}^s$ 上连续且紧支集函数组成的空间.

根据上述 Box 样条的定义, 得到了 Box 样条的如下几何解释 [2]:

$$B(x \mid V) = \frac{\mathrm{vol}_n(V^{-1}x \cap [0,1)^n)}{\sqrt{|\det(VV^{\mathrm{T}})|}}, \tag{2.4}$$

其中 $V^{-1}x = \{y \mid Vy = x\}$, 且 $\mathrm{vol}_n(V^{-1}x)$ 为多面体 $V^{-1}x$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的体积.

注 2.1 若将定义 (2.2) 和 (2.4) 中的 $[0,1)^n$ 替换为标准单纯形 Δ^n, 则由此定义的 B 样条就是 Micchelli [12] 引入的单纯形样条. 若将 $[0,1)^n$ 替换为 $\mathbb{R}^n_+$, 则得到由 Dahmen [13] 定义的锥样条.

由上述定义可看出, $B(x \mid V)$ 的支集为

$$[[V]] := \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \;\middle|\; 0 \leqslant a_j \leqslant 1, \forall\, j \right\}.$$

若取 $\phi = \exp(-\mathrm{i}y\cdot)$, 可求得 $B(\cdot \mid V)$ 的 Fourier 变换为

$$\widehat{B}(\zeta \mid V) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1-\exp(-\mathrm{i}\zeta^{\mathrm{T}} v_j)}{\mathrm{i}\zeta^{\mathrm{T}} v_j}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^s. \tag{2.5}$$

(2.5) 表明, Box 样条的卷积仍然是 Box 样条, 即

$$B(x \mid W) * B(x \mid V) = B(x \mid V \cup W). \tag{2.6}$$

对 $B(x \mid V)$ 作适当的平移, 即得到中心 Box 样条

$$M(x \mid V) := B(x + c_V \mid V), \quad c_V := \sum_{v_j \in V} \frac{v_j}{2}. \tag{2.7}$$

同样有 $M(x \mid V)$ 的 Fourier 变换

$$\widehat{M}(\omega \mid V) = \prod_{v_i \in V} \operatorname{sinc}(v_i^{\mathrm{T}} \omega), \quad \operatorname{sinc}(t) := \frac{\sin(t/2)}{t/2}. \tag{2.8}$$

特别地, 令 $V = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{1\times n}$, 就得到定义在等距结点 $\{0, 1, \ldots, n\}$ 上的一元 B 样条 — 基数 B 样条, 记作 $B_n(x)$. 因此,

$$\widehat{B}_n(\omega) = \left(\frac{1-\exp(-\mathrm{i}\omega)}{\mathrm{i}\omega} \right)^n. \tag{2.9}$$

从而, 可以得到 n 阶基数样条 $B_n(\cdot)$ 的卷积定义

$$B_1(x) = \begin{cases} 1, & 若\ x \in [0, 1), \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

而且当 $n \geqslant 1$, 有

$$B_n = B_1 * B_{n-1}.$$

由定义可知, B_n 具有紧支集 $[0, n]$ 且关于 $\frac{n}{2}$ 对称. 当 $n \geqslant 2$ 时,

$$B_{n+1}(x) = \frac{x}{n} B_n(x) + \frac{n+1-x}{n} B_n(x-1); \tag{2.10}$$

且有显式表达式

$$B_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i (x-i)_+^{n-1}, \tag{2.11}$$

其中

$$(x-i)_+^{n-1} := (\max\{x-i, 0\})^{n-1}.$$

若将 B_n 作一下平移, 就得到关于原点中心对称的均匀 B 样条

$$M_n(x) := B_n\left(x + \frac{n}{2}\right), \quad n \geqslant 1.$$

关于 $M_n(x)$ 有如下 Fourier 变换性质:

定理 2.1 $M_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$,

$$\widehat{M_d}(\omega) = \operatorname{sinc}^n\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \operatorname{sinc}(\omega) := \frac{\sin(\omega)}{\omega}. \tag{2.12}$$

关于 B 样条渐近性质的研究, 最早可以追溯到 1904 年, Sommerfeld [14] 从力学问题出发, 证明了 B 样条随着次数的增大, 渐近到 Gauss 函数. 此后, Schoenberg [10] 证明了一般结点的 B 样条随着次数的增大, 渐近到 Pólya 频率函数. 直到 1992 年, Unser 等人[15] 证明了基数 B 样条的渐近性质在 $L^p(\mathbb{R})$ 空间中仍然成立. Brinks [16] 将 Unser 等人的结果推广到了 B 样条的导数情形, 并且用于构造新的小波基底. 此后, 许艳和王仁宏[17] 给出了 B 样条及其导数在 $L^p(\mathbb{R})$ 空间中渐近性质的收敛阶, 得到了如下定理:

定理 2.2 [17] 令 $k \in \mathbb{N}$, 则对于 $d > k+2$, B 样条的 k 阶导数构成的序列 $B_d^{(k)}$ 收敛于 Gauss 函数的 k 阶导数, 即

$$\left(\frac{d}{12}\right)^{\frac{k+1}{2}} B_d^{(k)}\left(\sqrt{\frac{d}{12}}x + \frac{d}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} D^k \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + O\left(\frac{1}{d}\right), \tag{2.13}$$

并且

$$\lim_{d\to\infty} \left\{\left(\frac{d}{12}\right)^{\frac{k+1}{2}} B_d^{(k)}\left(\sqrt{\frac{d}{12}}x + \frac{d}{2}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} D^k \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{2.14}$$

其中极限是点态收敛或者在 $L^p(\mathbb{R})$, $p \in [2, \infty)$ 中.

当 $k = 0$, 定理 2.2 退化为下面的推论:

推论 2.1 对于任意 $d \in \mathbb{N}$, 基数 B 样条收敛到 Gauss 函数,

$$\sqrt{\frac{d}{12}} B_d\left(\sqrt{\frac{d}{12}}x + \frac{d}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + O\left(\frac{1}{d}\right), \tag{2.15}$$

并且有

$$\lim_{d\to\infty} \sqrt{\frac{d}{12}} B_d\left(\sqrt{\frac{d}{12}}x + \frac{d}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{2.16}$$

其中极限为点态收敛或者在 $L^p(\mathbb{R})$, $p \in [2, \infty)$ 中.

3 B 样条和超立方体切面问题

超立方体切面问题是离散几何学的核心问题. Zong 在文献 [18] 和 "Cambridge Tracts in Mathematics" 丛书出版的专著 "The Cube: A Window to Convex and Discrete Geometry" [19] 中系统地介绍了超立方体在离散几何学中的重要性. 这方面研究最早可以追溯到 Laplace [20] 和 Pólya [21] 的工作.

Laplace 为了解释一个概率问题, 考虑了如下情形: 令 I^n 表示 n 维单位立方体, 即

$$I^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, \ldots, n\}.$$

考虑 I^n 被平面

$$H_e(t) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = t\}$$

所截部分的 "面积" (将 $n-1$ 维切片体积叫作面积), 并将其表示为如下的积分公式:

定理 3.1 [20]

$$\mathrm{vol}_{n-1}(H_e(t)) = \frac{2\sqrt{n}}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^n \cos((n-2t)\mu)d\mu,$$

其中 $\mathrm{vol}_i(X)$ 为集合 X 在 $\mathbb{R}^n$ 中的 i 维测度.

如果 $t \geqslant n/2$, 则平面 $H_e(t)$ 距离立方体中心点 $e_{12} := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ 的距离为

$$S := \frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

我们作一个简单的变换就得到立方体 I^n 的过点 e_{12} 且垂直于主对角线 $(1, 1, \dots, 1)$ 的切片面积

$$\mathrm{vol}_{n-1}\left(H_e\left(\frac{n}{2} + s\sqrt{n}\right)\right) = \frac{2\sqrt{n}}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^n \cos(2\sqrt{n}s\mu)d\mu.$$

Pólya [21] 将这一结果推广到更一般的情形: 考虑任意通过点 e_{12} 且垂直于向量 $\alpha := (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 的超平面

$$H_\alpha(x) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_nx_n = t\}$$

截 I^n 所得 $n-1$ 维切面面积, 得到了类似的积分公式:

定理 3.2 [21]

$$\mathrm{vol}_{n-1}(I^n \cap H_\alpha(x)) = \frac{2\sqrt{n}}{\pi}\int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{\sin v_i\mu}{v_i\mu}\cos(2\mu x)d\mu. \tag{3.1}$$

Laplace 和 Pólya 都曾经证明如下结论:

定理 3.3

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}_{n-1}\left(H_e\left(\frac{n}{2} + s\sqrt{n}\right)\right) = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\mathrm{e}^{-6s^2}. \tag{3.2}$$

迄今为止, Pólya 所给出的立方体切面定理 (定理 3.2) 已成为研究多面体切面的核心方法. 例如, 由 Good 给出的关于超立方体截面的下界估计, 即著名的 Good 猜想, 其证明就是由 Hensley [22] 利用概率论的方法巧妙地估计了 Pólya 所给出的上述公式. 此外, Hensley 还给出了另一个关于切面最大值的猜想. 直至 1989 年, 由 Ball [23] 同样地对 Pólya 所给出的体积积分公式 (3.2) 进行估计, 从而证明了 Hensley 猜想. 2001 年, Borwein [24] 也曾给出类似于 Pólya 的积分公式 (3.2). 关于这方面的详细介绍可以参见文献 [18]. 但是上述关于超立方体切面的结果大多由概率方法得到. 然而, 在过去的几十年里, 研究超立方体切面问题的学者并没有注意到样条函数这个独立发展的数学工具. 许志强[9] 率先将超立方体切面问题转化为与之等价的样条函数问题, 利用 Box 样条, 给出了计算超立方体切面体积的显示表达式. 在此, 我们给出定理 3.2 和 3.3 的样条证明.

定理 3.2 和 3.3 的证明 考虑任意通过点 e_{12} 且垂直于向量 $\alpha := (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 的超平面截 I^n 所得 $n-1$ 维切面面积 $\mathrm{vol}_{n-1}(I^n \cap H_\alpha(x))$. 由 Box 样条的几何意义 — 公式 (2.4) 可知, 在 $M(x \mid V)$ 中, 令 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, 则 $\mathrm{vol}_{n-1}(I^n \cap H_\alpha(x)) = M(x \mid V)$. 同样有 $M(x \mid V)$ 的 Fourier 变换

$$\widehat{M}(\omega \mid V) = \prod_{i=1}^n \mathrm{sinc}\frac{v_i\omega}{2}, \quad \mathrm{sinc}(t) := \frac{\sin(t)}{t}. \tag{3.3}$$

对 $\widehat{M}(\omega \mid V)$ 作 Fourier 逆变换, 可得 Laplace 和 Pólya 积分公式 (3.1):

$$\mathrm{vol}_{n-1}(I^n \cap H_\alpha(x)) = \sqrt{n}M(x \mid V) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n \frac{\sin(v_i\omega/2)}{v_i\omega/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}d\omega$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\pi} \int_0^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin(v_i \omega/2)}{v_i \omega/2} \cos(\omega x) d\omega$$
$$= \frac{2\sqrt{n}}{\pi} \int_0^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin(v_i \omega)}{v_i \omega} \cos(2\mu x) d\mu.$$

根据 B 样条的几何性质可知,

$$\mathrm{vol}_{n-1}\left(H_e\left(\frac{n}{2} + s\sqrt{n}\right)\right) = \sqrt{n} B_n\left(\frac{n}{2} + s\sqrt{n}\right).$$

则根据推论 2.1 有

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}_{n-1}\left(\sqrt{\frac{n}{12}} H_e\left(\frac{n}{2} + s\sqrt{\frac{n}{12}}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} B_n\left(\sqrt{\frac{n}{12}} s + \frac{n}{2}\right) = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right).$$

从而证明了 Laplace 和 Pólya 所给出的超立方体截面面积渐近结论 — 定理 3.3. □

4 B 样条和 Eulerian 数

许多组合计数问题都与多面体的体积计算有关, 其中比较著名的例子就是 Eulerian 数的几何解释. Laplace [20] 在 1886 年将 Eulerian 数与超立方体切面体积联系在一起, 给出 Eulerian 数的如下几何解释: 在主对角线 $(1,1,\ldots,1)$ 上, 等距地选取 $d+1$ 个点, 用通过这些点并且垂直于主对角线 $(1,1,\ldots,1)$ 的一组超平面截单位立方体 I^d, 得到单位立方体的 d 个切片

$$T_k^d := \left\{x \in I^d \;\middle|\; k-1 \leqslant \sum_{i=1}^{d} x_i \leqslant k, k=0,\ldots,d\right\}.$$

从而有

$$\mathrm{vol}_d(T_k^d) = \frac{1}{d!} A_{d,k}, \tag{4.1}$$

其中 Eulerian 数 $A_{d,k}$ 有显式表达式

$$A_{d,k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{d+1}{i} (-1)^i (k-i)^d, \tag{4.2}$$

且满足递归关系

$$A_{d,k+1} = (k+1)A_{d-1,k+1} + (d-k)A_{d-1,k}, \quad A_{0,0} = 1, \quad A_{d,0} = 0, \quad d > 0. \tag{4.3}$$

众所周知, Eulerian 数有如下组合解释: $A_{d,k}$ 可以用来表示 S_d 对称群中所有降序数为 k 的排列总数, 即

$$A_{d,k} = \#\{\pi \mid \pi \in S_d, \#(D(\pi) = k)\},$$

其中 $\pi := a_1, a_2, \ldots, a_d \in S_d$. $D(\pi)$ 为降序集合 (descent) 定义为

$$D(\pi) := \{i \mid a_i > a_{i-1}, 1 \leqslant i \leqslant d-1\}.$$

从这个组合解释不难看出, $A_{d,k}$ 恰好是集合 $S_k := \{x \in I^n \mid x_i > x_{i+1}$, 对于 i 的 k 个值$\}$ 的体积. 一个很自然的问题是, 集合 T_k^d 与集合 S_k 之间是否存在一个保测度的映射使得二者同构. 这个问

题最早由 Foata [25] 提出, 并由 Stanley [26] 给出了构造性的证明, 从而给出了 Eulerian 数几何解释的组合证明. Stanley 的方法极具代表性, 至今很多与体积相关联的组合数仍是用类似的构造方法得到其几何解释的. 例如, 下文中将要提到的指标序列的下降多项式系数 $D(d,n,k)$ 的几何解释, 便是由 Steingrímsson [27] 在其博士论文中利用类似于 Stanley 的映射给出.

下面的定理给出了 B 样条函数与 Eulerian 数之间的关系.

定理 4.1 [28] $A_{d,k} = d! \cdot B_{d+1}(k)$.

该定理表明, Eulerian 数可以看作是离散 B 样条. 因而可以利用发展成熟的样条函数理论, 对与 Eulerian 数相关联的组合问题进行研究.

4.1 Eulerian 数经典结果的样条解释

Eulerian 数的样条解释 (定理 4.1) 揭示了这两个领域的内在联系, 使得这两个领域的很多定理的相互关联.

例 4.1 (Worpitzky 恒等式) B 样条满足如下 Marsden 恒等式:

$$(x-y)^d = \sum_{k\in\mathbb{Z}} B_{d+1}(y+k) \prod_{\gamma=1}^{d} (x+k-\gamma). \tag{4.4}$$

在 (4.4) 中, 令 $y=0$, 注意到 B_d 具有紧支集性质, 即于区间 $[0,d]$ 外恒为零, 则 (4.4) 退化为

$$x^d = \sum_{k=1}^{d} B_{d+1}(k) \prod_{\gamma=1}^{d} (x+k-\gamma).$$

因而得到关于 Eulerian 数的著名的 Worpitzky 恒等式

$$x^d = \sum_{k=1}^{d} \binom{x+k-1}{d} A_{d,k}.$$

从这个例子中可以看出 Worpitzky 恒等式可以看作是 Marsden 恒等式的特例.

例 4.2 (积分表示) 1991 年, Nicolas [29] 给出了 Eulerian 数的积分形式

$$A_{d,k} = 2\frac{d!}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(d+1-2k)\omega \left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^{d+1} d\omega. \tag{4.5}$$

这个结果可以看作是 Laplace 的结果的特例. 更为有趣的是, 在样条函数研究中, 对于 B 样条类似的表达形式的研究似乎可以追溯到 Sommerfeld [14] 在 1904 年的工作. 下面给出 Nicolas 关于 Eulerian 数积分表示的样条证明. 注意到 $B_d(x)$ 的 Fourier 变换

$$\widehat{B}_d(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}d\omega/2} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^d.$$

对 $\widehat{B}_d(\omega)$ 取 Fourier 逆变换, 则有

$$\begin{aligned} B_{d+1}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-(d+1)/2)} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^d d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(d+1-2x)\omega \left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^{d+1} d\omega. \end{aligned} \tag{4.6}$$

根据定理 4.1 和 (4.6), 可以得到 Eulerian 数的积分表示 (4.5).

例 4.3 (双尺度方程) B 样条的双尺度方程

$$B_{d+1}(x)=\sum_{j=0}^{d+1}2^{-d}\binom{d+1}{j}B_{d+1}(2x-j) \tag{4.7}$$

在细分和小波分析等领域有着重要的应用. 有趣的是, Eulerian 数的也有着类似的双尺度方程

$$A_{d,k}=\sum_{j=0}^{d+1}2^{-d}\binom{d+1}{j}A_{d,2k-j},$$

并且可以看作是 B 样条双尺度方程的特列.

例 4.4 1973 年, Tanny [30] 利用概率论中的中心极限定理给出了 Eulerian 数的渐近形式. 此后, Carlitz 等人[31] 利用类似的方法得到了这一渐近公式的逼近阶. 但是 Carlitz 等人给出的逼近阶并不精确, 仅是关于 d 的 $-\frac{3}{4}$ 阶. 利用上文给出的 Eulerian 数的样条解释 (定理 4.1) 有下面的定理:

定理 4.2 [17] 对于 $x_d=\sqrt{\frac{d+1}{12}x+\frac{d+1}{2}}$, 有

$$\frac{1}{d!}A_{d,[x_d]}=\sqrt{\frac{6}{\pi(d+1)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)+O(d^{-\frac{3}{2}}). \tag{4.8}$$

这一结果改进了 Carlitz 等人[31] 给出的逼近阶.

5 B 样条与细化混合体积、Eulerian 数和下降多项式

定义 5.1 令 P_1 和 P_2 为 $\mathbb{R}^d$ 中的凸体 (非空紧凸集), 对于任意的 $\lambda,\mu\geqslant 0$, 有

$$\lambda P_1+\mu P_2=\{\lambda\alpha+\mu\beta:\alpha\in P_1,\beta\in P_2\}.$$

根据定义 5.1, Minkowski [32] 提出了更为重要的混合体积的概念 (尽管他只研究了 $d\leqslant 3$ 的情形). 存在实数 $V(T_k^d,d-j;T_{k+1}^d,j)\geqslant 0$, 对于任意的 $\lambda,\mu\geqslant 0$ 满足

$$\mathrm{vol}(\lambda P_1+\mu P_2)=\sum_{j=0}^{d}\binom{d}{j}V(P_1,d-j;P_2,j)\lambda^{d-j}\mu^j, \tag{5.1}$$

则 $V(P_1,d-j;P_2,j)$ 称为 P_1 和 P_2 的 j- 阶混合体积.

令

$$X_{\lambda,k}^d:=\left\{x\in\lambda\cdot[0,1]^d\;\middle|\;(k-1)\lambda+1\leqslant\sum_{i=1}^{d}x_i\leqslant k\lambda+1\right\},$$

则有 $X_{\lambda+1,k}^d=\lambda T_k^d+T_{k+1}^d$ (参见文献 [33]) 且

$$\mathrm{vol}(X_{\lambda+1,k}^d)=\sum_{j=0}^{d}\binom{d}{j}V(T_k^d,j;T_{k+1}^d,d-j)\lambda^j, \tag{5.2}$$

其中 $\mathrm{vol}(\cdot)$ 记作标准化的体积函数, 即将 d 维单位立方体 I^d 的体积 $\mathrm{vol}([0,1]^d)$ 记作 $d!$. 混合体积的 Aleksandrov-Fenchel 不等式表明, 序列 $V(T_k^d,j;T_{k+1}^d,d-j)$, $j=0,\dots,d$ 具有对数凹性[34, 35].

为了叙述的方便, 我们用 $[\lambda^j]f(\lambda)$ 表示给定的关于 λ 的级数 $f(\lambda)$ 中 λ^j 项的系数. 单位立方体相邻切片 T_k 和 T_{k+1} 的混合体积与 B 样条有如下关系:

定理 5.1

$$V(T_k^d, j; T_{k+1}^d, d-j) = d! \cdot [\lambda^j]\left((\lambda+1)^d B_{d+1}\left(k + \frac{1}{\lambda+1}\right)\right) \Big/ \binom{d}{j}, \quad \lambda \geqslant 0. \tag{5.3}$$

证明 由 (5.2) 和 B 样条的几何解释 — 公式 (2.4) 可证. □

由 B 样条的显示表达式 — 公式 (2.11) 和定理 5.1 可得下面的定理:

定理 5.2

$$V(T_k^d, j; T_{k+1}^d, d-j) = \sum_{i=0}^{k} \binom{d+1}{i} (-1)^i (k-i)^j (k-i+1)^{d-j}.$$

更进一步, 可以给出一些特殊情形下混合体积的样条解释:

定理 5.3 若两个凸多面体定义为

$$P_i := \{x \in I^n \mid Vx = b_i\}, \quad i = 1, 2,$$

且它们的混合体积为

$$V(\lambda P_1 + \mu P_2) = \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} V(P_1, d-j; P_2, j) \lambda^{d-j} \mu^j, \tag{5.4}$$

我们有

$$V(P_1, j; P_2, d-j) = d! \cdot [\lambda^j]\left((\lambda+m)^d B_{d+1}\left(b_1 + \frac{q}{\lambda+m}\right)\right) \Big/ \binom{d}{j}, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{5.5}$$

其中 b_1 和 b_2 为整数且有 $b_2 = mb_1 + q$.

证明 由 B 样条的几何解释可知,

$$V(\lambda P_1 + P_2) = d!(\lambda+m)^d B_{d+1}\left(b_1 + \frac{q}{\lambda+m}\right).$$

不妨令 $\mu = 1$, 则由 (5.4) 有

$$V(P_1, j; P_2, d-j) = d! \cdot [\lambda^j]\left((\lambda+m)^d B_{d+1}\left(b_1 + \frac{q}{\lambda+m}\right)\right) \Big/ \binom{d}{j}, \quad \lambda \geqslant 0. \tag{5.6}$$

证毕. □

定理 5.1 给出了特殊情形下混合体积的样条解释. 混合体积在组合序列的对数凹性研究中具有十分重要的地位. 美国科学院院士 Stanley [36] 和 Brenti [37, 38] 在这一领域的综述性文献中多次提到研究组合数的对数凹性质的混合体积方法. Schmidt 和 Simion [39] 提出如下的公开问题:

公开问题 5.1 有哪些组合序列是产生于多面体的截面? 它们中具有对数凹性质的序列是否可以与混合体积相互关联?

B 样条的几何解释使得它在研究这些与多面体截面相关的组合计数问题中有着独特的优势.

5.1 下降多项式、细化 Eulerian 数和 B 样条

下降多项式, 记作 $D_d^n(t)$, 定义为

$$D_d^n(t) = \sum_{k=0}^{d} D(d, n, k) t^k,$$

其中 $D(d,n,k)$ 是 S_d^n 中有 k 个降序的指标序列的数量, 这里 S_d^n 表示所有指标序列的集合. 指标序列为 S_d 对称群中的一般序列加上一个 0 到 $n-1$ 之间的脚标[27,33].

$D(d,n,k)$ 是 Eulerian 数的一种推广, 当 $n=1$ 时, 就是通常的 Eulerian 数. 近年来, 文献 [27,33,40] 等对其进行了深入的研究. 指标序列也通常称作着色序列.

Steingrímsson [27] 给出了指标序列的几何解释为

$$D(d,n,k)=V(X_{n,k}^d). \tag{5.7}$$

由此, 我们给出 $D(d,n,k)$ 的样条解释:

定理 5.4

$$D(d,n,k)=d!\cdot n^d\cdot B_{d+1}\left(k+\frac{1}{n}\right). \tag{5.8}$$

证明 令

$$Y_k:=\left\{y\in[0,1]^d\ \middle|\ (k-1)+\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^d y_i\leqslant k+\frac{1}{n}\right\},$$

那么,

$$V(Y_k)=d!\int_{(k-1)+\frac{1}{n}}^{k+\frac{1}{n}}B_d(x)dx=d!\cdot\int_0^1 B_d\left(k+\frac{1}{n}-t\right)dt=d!\cdot B_{d+1}\left(k+\frac{1}{n}\right),$$

其中第一个等式利用 B 样条的几何解释 — 公式 (2.4) 得到, 最后一个等式由

$$B_{d+1}(x)=\int_0^1 B_d(x-t)dt$$

得到. 由于 $X_{n,k}^d=nY_k$, 我们有 $V(X_{n,k}^d)=n^d\cdot V(Y_k)$. 由 (5.7) 可得定理 5.4. □

Steingrímsson [27] 给出了 $D(d,n,k)$ 所满足的三项递归公式:

推论 5.1

$$D(d,n,k)=(nk+1)D(d-1,n,k)+(n(d-k)+(n-1))D(d-1,n,k-1). \tag{5.9}$$

注 5.1 由定理 5.4 和 B 样条的递归关系 (2.10), 我们可以很容易得到上述递归关系, 并且当 $n=1$ 时, 得到广为人知的 Eulerian 数的递归关系 (4.3).

细化 Eulerian 数, 记作 $\mathbf{A}_{d,k,j}$, 为对称群 S_d 中有 k 个降序并且最后一个元素为 j 的排列总数, 即

$$\mathbf{A}_{d,k,j}:=\#\{\pi\mid\pi:=(a_1,\ldots,a_d)\in S_d,\#D(\pi)=k,a_d=j\}.$$

依照上述组合定义可知, $\mathbf{A}_{d,k,j}$ 作为 $A_{d,k}$ 的细化形式, 可以看作是相邻两 Eulerian 数 $A_{d,k}$ 与 $A_{d,k+1}$ 之间的一个插值. 从而有 $\sum_{j=1}^k\mathbf{A}_{d,k,j}=A_{d,k}$ 等一系列显然的结论. 自然地, 人们关心细化 Eulerian 数是否继承了 Eulerian 数的一些性质, 如对数凹性和渐近性质.

Ehrenborg 等人[33] 将 $\mathbf{A}_{d,k,j}$ 表示成单位立方体相邻切片 T_k 与 T_{k+1} 的混合体积, 从而得到了 $\mathbf{A}_{d,k,j}$ 关于 j 的对数凹性. 由于 Eulerian 数 $A_{d,k}$ 关于 d 的渐近形式为 Gauss 型. 人们猜测 $\mathbf{A}_{d,k,j}$ 也 "遗传" 了同样的性质. 然而, Conger [41] 利用数值实验观察到 $\mathbf{A}_{d,k,j}$ 随着 d 值的增大, 其渐

近形式并非正态分布的现象, 但他无法解释这种现象. 在此, 我们给出细化 Eulerian 数的样条解释. 利用这一解释得到了细化 Eulerian 数的显式和递归表达式. 同时也给出了由 Hermite 正交多项式表示的细化 Eulerian 数的渐近形式. 从而解释了 Conger [41] 利用数值实验得到的现象. Ehrenborg 等人[33] 推广了 Laplace 的结果, 将 $\mathbf{A}_{d+1,k,d+1-j}$ 表示成单位立方体相邻切片 T_k 和 T_{k+1} 的混合体积

$$\mathbf{A}_{d+1,k,d+1-j}=V(T_k^d,j;T_{k+1}^d,d-j), \tag{5.10}$$

从而证明了细化 Eulerian 数 $\mathbf{A}_{d+1,k,d+1-j}$ 关于 j 具有对数凹性质. 基于上述讨论, 细化 Eulerian 数与 B 样条有如下关系:

定理 5.5 [28]

$$\mathbf{A}_{d+1,k,d+1-j}=d!\cdot[\lambda^j]\left((\lambda+1)^d B_{d+1}\left(k+\frac{1}{\lambda+1}\right)\right)\Big/\binom{d}{j},\quad \lambda\geqslant 0. \tag{5.11}$$

根据定理 5.4 和 5.5, 可以得到如下关于 $D(d,n,k)$ 和 $\mathbf{A}_{d+1,k,d-j+1}$ 的新结果:

定理 5.6 (i) $D(d,n,k)$ 的显示表达式为

$$D(d,n,k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{d+1}{i}(-1)^i(n(k-i)+1)^d;$$

(ii) $\mathbf{A}_{d+1,k,d-j+1}$ 的显式表达式为

$$\mathbf{A}_{d+1,k,d-j+1}=\sum_{i=0}^{k}\binom{d+1}{i}(-1)^i(k-i)^j(k-i+1)^{d-j};$$

(iii) 序列 $D(d,n,k)$ 满足双尺度方程为

$$D(d,2n,k)=\sum_{j=0}^{d+1}\binom{d+1}{j}D(d,n,2k-j),$$

特别地, 当 $n=1$, 可知

$$D(d,2,k)=\sum_{j=0}^{d+1}\binom{d+1}{j}A_{d,2k+1-j};$$

(v) $\mathbf{A}_{d+1,k,d-j+1}$ 的递归关系式为

$$\mathbf{A}_{d+1,k,d-j+1}=(k+1)\mathbf{A}_{d,k,d-j}+(d-k)\mathbf{A}_{d,k-1,d-j},$$
$$\mathbf{A}_{d+1,k,d-j+1}=k\mathbf{A}_{d,k,d-j+1}+(d-k+1)\mathbf{A}_{d,k-1,d-j+1}.$$

证明 (i) 和 (ii) 可以直接由 B 样条的显式公式 (2.11) 得到. (iii) 可以由 B 样条的细分方程 (4.7) 得到. 利用细化 Eulerian 数的显式公式 (2.11), 可得(v). □

6 B 样条与组合序列对数凹性质

组合数的对数凹性是计数组合学研究的一个中心问题之一, 并与许多数学分支相互关联. 一般而言, 研究组合序列的对数凹性有以下几种方法: 直接的组合方法、多项式实零点方法、解析法、混合体积法和代数方法等. 关于这方面的研究可以参见美国科学院院士 Stanley [36] 和 Brenti [37,38] 在这一领域的综述性文献与专著. 在这里, 我们将引入一种研究组合数对数凹性的新方法 — 样条函数方法. 首先, 给出序列对数凹性和单峰性的定义:

定义 6.1 正序列 $\{a_0,\dots,a_n\}$ 称为具有对数凹性, 如果 $a_i^2 \geqslant a_{i-1}a_{i+1}$, $i=1,\dots,d-1$.

定义 6.2 正序列 $\{a_0,\dots,a_n\}$ 称为具有单峰性, 如果对于指标 $0 \leqslant j \leqslant d$, 有 $a_i \leqslant a_{1+1}$, $i=0,\dots,j-1$ 且 $a_i \leqslant a_{1+1}$, $i=j,\dots,d-1$.

由此可知, 对数凹性是比单峰性更强的一种性质. Curry 和 Schoenberg [10] 曾利用样条函数的几何解释 (2.2) 证明了 B 样条具有对数凹性.

引理 6.1 $\log S(t \mid t_0,t_1,\dots,t_n)$ 在区间 (t_0,t_n) 上是凹函数.

注 6.1 该引理的证明基于 B 样条的几何解释 (2.2) 和 Brunn-Minkowski 不等式.

利用引理 6.1, 可以很容易的得到一些与多面体体积相关联的组合数的对数凹性.

定理 6.1 (Eulerian 数的对数凹性) Eulerian 数 $A_{d,k}$ 对于给定的 d 关于 k 具有对数凹性.

Steingrímsson [27] 利用 Brenti [37] 的方法, 证明了对于任意取定的 d 和 n, 序列 $D(d,n,k)$ 关于 $k=0,\dots,d$ 具有单峰性. 利用序列 $D(d,n,k)$ 的样条解释, 我们得到下面的定理:

定理 6.2 对于任意取定的 d 和 n, 序列 $D(d,n,k)$ 关于 $k=0,\dots,d$ 具有对数凹性.

注 6.2 前文所提到的 Schmidt 和 Simion [39] 在 1997 年提出如下公开问题:

(1) 有哪些组合序列是产生于多面体的截面?

(2) 它们中具有对数凹性质的序列是否可以与混合体积相互关联?

本文中所讨论的 Eulerian 数、细化 Eulerian 数和下降多项式以及特殊的几类混合体积的样条表示定理, 在一定程度上回答了上述公开问题. 本文中的研究方法具有一定的普遍性. 在未来的工作中, 我们将会更进一步地研究计数组合学中的样条函数方法, 给出如 Catlan 数、Bernoulli 数和 Stirling 数等更多具有几何意义的组合数的样条解释, 使得样条函数作为沟通具有对数凹性质的组合序列与混合体积之间的桥梁, 给出一般情形下的混合体积的样条表示, 从而完全回答 Schmidt 和 Simion [39] 提出的公开问题.

致谢 作者对审稿专家所提出的宝贵建议和编辑部的热心帮助表示衷心的感谢.

参考文献

1 Schoenberg I J. Contribution to the problem of application of equidistant data by analytic functions. Quart Appl Math, 1946, 4: 45–99, 112–141

2 De Boor C, Hóllig K. B-splines from parallelepipeds. J Anal Math, 1982, 42: 99–115

3 Dahmen W. On multivariate B-splines. SIAM J Numer Anal, 1980, 17: 179–191

4 Vergne M. Applications of equivariant cohomology. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Zürich: Eur Math Soc, 2007

5 Baldoni M W, Beck M, Cochet C, et al. Volume computation for polytopes and partition functions for classical root systems. Discrete Comput Geom, 2006, 35: 551–595

6 De Concini C, Procesi C, Vergne M. Box splines and the equivariant index theorem. J Inst Math Jussieu, 2013, 12: 503–544

7 Vergne M. A remark on the convolution with the Box spline. Ann Math (2), 2011, 174: 607–618

8 许志强. 多元样条与离散数学相关问题研究进展综述. 数学进展, 2007, 36: 257–267

9 Xu Z Q. Multivariate splines and polytopes. J Approx Theory, 2011, 163: 377–387

10 Curry H B, Schoenberg I J. On Pólya frequency functions IV: The fundamental spline functions and their limits. J Anal Math, 1966, 17: 71–107

11 de Boor C, De Vore R. Approximation by smooth multivariate splines. Trans Amer Math Soc, 1983, 276: 775–788

12 Micchelli C A. A constructive approach to Kergin interpolation in $\mathbb{R}^k$: Multivariate B-splines and Lagrange interpolation. Rocky Mountain J Math, 1980, 10: 485–497

13 Dahmen W. On multivariate B-splines. SIAM J Numer Anal, 1980, 17: 179–191

14 Sommerfeld A. Eine besondere anschauliche Ableitung des Gaussischen Fehlergesetzes. In: Festschrift Ludwig Boltzmann Gewidmet Zum, 60. Leipzig: Johann Ambrosius Barth Verlag, 1904: 848–859
15 Unser M, Aldroubi A, Eden M. On the asympototic convergence of B-spline wavelets to Gabor functions. IEEE Trans Inform Theoy, 1992, 38: 864–872
16 Brinks R. On the convergence of derivatives of B-splines to derivatives of the Gaussian function. Comput Appl Math, 2008, 27: 79–92
17 许艳, 王仁宏. B 样条在一些渐近组合问题中的应用. 中国科学: 数学, 2010, 40: 863–871
18 Zong C. What is known about unit cubes. Bull Amer Math Soc (NS), 2005, 42: 181–221
19 Zong C. The Cube: A Window to Convex and Discrete Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 2006
20 de Laplace M. Oeuvres Complètes, vol. 7. Paris: réédité par Gauthier-Villars, 1886
21 Pólya G. Berechnung eines bestimmten integrals. Math Ann, 1913, 74: 204–212
22 Hensley D. Slicing the cube in $\mathbb{R}^n$ and probability. Proc Amer Math Soc, 1979, 73: 95–100
23 Ball K. Volumes of sections of cubes and related problems. Geom Aspects Funct Anal, 1989, 1376: 251–260
24 Borwein D, Borwein J M. Some remarkable properties of sinc and related integrals. Ramanujan J, 2001, 5: 73–89
25 Foata D. Distribution Eulérienne et Mahoniennes sur le groupe des permutations. In: Higher Combinatorics, Proceedings of the Nato Advanced Study Institute. Berlin: West Germany, 1976, 27–49
26 Stanley R P. Eulerian partitions of a unit hypercube. In: Higher Combinatorics, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute. Berlin: West Germany, 1977, 336–356
27 Steingrímsson E. Permutation statistics of indexed permutations. European J Combin, 1994, 15: 187–205
28 Wang R H, Xu Y, Xu Z Q. Eulerian numbers: A spline perspective. J Math Anal Appl, 2010, 370: 486–490
29 Nicolas J L. An integral representation forEulerian numbers. Sets Graphs Numbers, 1991, 513–527
30 Tanny S. A probabilistic interpretation of Eulerian numbers. Duke Math J, 1973, 40: 717–722
31 Carlitz L, Kurtz D C, Scoville R, et al. Asymptotic properties of Eulerian numbers. Z Wahrschein-lichkeitstheorie und Verw, Gebiete, 1972, 23: 47–54
32 Gelfand I M, Kapranov M, Zelevinsky A. Discriminants, Resultantsand Multidimen-sional Determinants. Boston: Birkhauser, 1994
33 Ehrenborg R, Readdy M, Steingrímsson E. Mixed volumes and slices of the cube. J Combin Theory Ser A, 1998, 81: 121–126
34 Schneider R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
35 Sangwine-Yager J R. Mixed Volumes. In: Handbook of Convex Geometry, vol. A. Amsterdam: Elsevier, 1993
36 Stanley R P. Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry. Ann New York Acad Sci, 1989, 576: 500–534
37 Brenti F. Unimodal log-concave and Pólya frequency sequences in combinatorics. Mem Amer Math Soc, 413. Providence, RI: Amer Math Soc, 1989
38 Brenti F. Log concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry: An update. Contemp Math, 1994, 178: 71–89
39 Schmidt F, Simion R. Some geometric probability problems involving the Eulerian numbers. Electron J Combin, 1997, 4: R18
40 Bagno E. Kazhdan constants of some colored permutation groups. J Algebra, 2004, 282: 205–231
41 Conger M. A refinement of the Eulerian numbers and the joint distribution of $\pi(1)$ and $des(\pi)$ in s_n. Ars Combin, in press, 2010

Mixed volumes, log-concave sequences and B-splines

XU Yan

Abstract In this paper, a series of problems emerged in discrete geometry and combinatorics related to spline functions are systematically studied. For example, in discrete geometry, the spline representations of cube slicing and mixed volumes of polytopes are considered. With the geometric interpretations of B-splines, the volume of cube slicing can be considered as an equivalent problems in spline theory. Based on the connection, a simple proof for Laplace and Pólya's formulas in cub slicing is given by spline theory. A class of mixed volumes are given by the relations between splines and the mixed volumes. A class of log-concave sequence are derived by the connection. Therefore, the open problem proposed by Schmidt and Simion is partially solved. In combinatorics, the combinatorial polynomials and log-concavity for some combinatorial sequences are investigated by spline theory. With the well developed spline theory, not only the existing results in discrete geometry and combinatorics have been verified, but also a novel method for solving related discrete mathematics problems has been studied. Splines as functions of a continuous nature provide an analysis method in combinatorial enumerations which are usually considered as counting discrete objects. This method provides a novel analysis method for studying discrete objects.

Keywords **B-splines, mixed volumes, Eulerian numbers, the volumes of polytopes, log-concavity**

MSC(2010) **05A16, 41A15**

doi: 10.1360/N012013-00132