中国科学 E 辑: 技术科学
2007 年 第 37 卷 第 7 期: 904~913
http://www.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

多环运动链环路代数基础理论的建立及其应用

黄 真* 丁华锋

(燕山大学机器人研究中心, 秦皇岛 066004)

摘要 基于运动链环路的数学描述, 首次提出了环路的"⊕"代数运算及其基本规律, 建立了运动链环路代数体系基础. 基于此, 提出了运动链的基本环路集及其确定条件, 讨论了如何经过环路的代数运算得到有决定意义的运动链的周长拓扑图, 并形成特征周长拓扑图及其特征邻接矩阵. 此理论的最大特点就是对任意方式绘制、标号的运动链拓扑图, 运用该理论得到的运动链特征周长拓扑图及特征邻接矩阵都是唯一的, 它们与运动链是一一对应的. 这个特点首先极大地简化了同构识别, 并为拓扑图的数字化提供了理论基础, 为今后的机构的型综合以及进一步的机械设计的数字化和计算机化开辟了新的思路. 最后还提出了基于特征邻接矩阵的简便的运动链同构识别方法.

关键词 运动链 环路代数 周长拓扑图 同构判别

人们对机构运动链系统的研究已有百年历史, 1964 年, Freudenstein 和Dobrjanskyj [1]首次将图论引入机构学, 用于表示运动链的拓扑结构. 借助图论 [2]这一工具, 到目前为止, 人们综合了大量的各种构件数和运动副数的运动链 [3,4], 比如 16 种 8 杆 10 副运动链, 40 种 9 杆 11 副运动链, 230 种 10 杆 13 副运动链, 839 种 11 杆 15 副运动链, 6862 种 12 杆 16 副运动链等, 这些运动链又可以转化为更多不同的机构, 这就极大地丰富了平面机构的结构类型, 因此图论为机构学的研究开辟了新的途径, 形成了机构学基本理论研究的新方向.

但是, 现实中运动链的拓扑图有不同的画法, 拓扑图的顶点又可能有不同的编号, 同一个运动链可以对应许多不同的拓扑图及相应的拓扑矩阵, 因此, 拓扑矩阵和没有编号的拓扑图与机构的运动链简图之间都不是一一对应的, 没有一一对应的关系, 这就是运动链拓扑表达的多值性, 这个问题是机构拓扑研究中的一个瓶颈问题. 在平面运动链的综合过程中, 几乎所有的综合方法都产生大量的同构运动链. 只要对运动链进行型综合, 就不得不进行同构判别. 而对于运动链同构判别这一问题, 自 20 世纪 70 年代以来, 国内外的许多学者在这方面进行了

收稿日期: 2005-10-22; 接受日期: 2007-03-16
国家自然科学基金资助项目(批准号: 50575197)
* E-mail: huangz@ysu.edu.cn

大量的研究, 提出了很多方法, 其中有多项式法, 如顶点邻接矩阵特征多项式法 [5], 还有后来曾被一度看好的度矩阵的特征多项式法[6]等, 但是它们的准确性欠佳, 而且还发现很多失效的反例. 与此同时, 人们还陆续提出了多种新的方法, 如Hamming串法 [7]、邻度码法 [8]、最小码法 [9]、关联度码法 [10]、标准码法 [11]、邻接链表法 [12]、多面立体拓扑结构码置换群法 [13]、基因遗传算法 [14]、人工神经网络法 [15]、邻接矩阵的特征值和特征向量法 [16]等. 但是这些方法往往不能同时兼顾准确性与高效性, 同构判别这一问题至今没有得到很好的解决 [17], 仍然是一个限制运动链综合的难题.

进一步说, 在机械系统的创新设计中, 机构的类型综合是最基本和首要的. 综合方法的实时化和人机交互及机械设计的数字化、网络化和智能化是机构学和机械设计的发展方向. 这个新方向需要一个对应的平台, 这就是一个运动链图谱的数据库, 这里关键是数字化的运动链的拓扑表达. 只有完全数字化了的数据库才能具有良好的分类、检索和管理所有运动链的功能. 可是到现在还没有这样的完全数字化的数据库, 设计者不能面向计算机进行机型综合, 致使机械系统的创新进展缓慢.

本文基于运动链一般环路的概念 [3,18]和运动链的新拓扑描述 [19], 提出了环路的代数表达和代数运算 [20], 建立了比较完善的运动链环路代数分析体系, 并且提出运动链环路集的思想, 和经由环路分析进一步提出了周长拓扑图、特征周长拓扑图及特征邻接矩阵, 给出了运动链唯一的数字化描述. 这样, 机构的运动链简图和特征周长拓扑图与拓扑矩阵之间都实现了一一对应的关系. 这个理想的一一对应关系的实现, 首先一个直接的结果是同构判别简单和直截了当; 在机构综合后也不必进行机构的同构判别, 特别是对于今后的机械设计的数字化、网络化和智能化开辟一条通路. 本文最后以典型实例给出了基于特征邻接矩阵的运动链简洁的同构判别. 运用环路代数的基本理论已经成功开发出两套软件系统 [21,22].

1　基本理论

1.1　环路的基本概念

1.1.1　运动链的拓扑图　在机构结构综合的研究中, 为了研究方便, 常常用拓扑图来表示运动链的结构组成. 对运动链的结构简图, 若以点表示其构件, 边表示其运动副, 则当两构件之间有运动副直接连接时, 与该两构件对应的两顶点之间用一条边连接之, 由此得到的图为运动链的拓扑图. 在图 1 中, (a)图为一个 3 自由度 8 杆运动链的结构简图, (b)图为其拓扑图. 需要指出的是, 对同一个运动链, 可以有很多不同形式的结构简图, 对每种形式的结构简图, 其拓

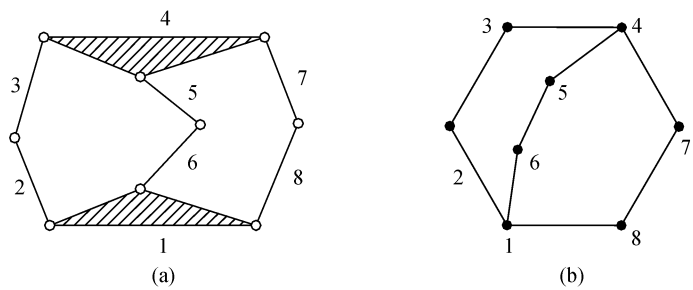

图 1　3 自由度 8 杆运动链的结构简图及相应的拓扑图

扑图的表现形式也是多种多样的, 这就导致了运动链结构难以完全数字化描述, 也导致了同构判别难题的产生.

1.1.2 拓扑图顶点的度 与顶点相连的边的数目定义为拓扑图顶点的度. 如图 1(b)所示运动链拓扑图中有 3 条边与顶点 4 相连, 故顶点 4 的度为 3.

1.1.3 拓扑图的路径与环路 拓扑图的一条路径是一个顶点与边的交替序列, 并且满足: 起点与终点为不同顶点, 并且它不包含相同的顶点. 若一条路径的起点与终点重合, 即此路径的所有顶点皆只与两条边相关联, 该路径称为环路. 如顺次连接图 1(b)的顶点 1, 2, 3, 4 即可构成一个路径; 而顺次连接顶点 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1 即可构成一个环路.

1.1.4 拓扑图的路径与环路的数学描述 为了便于研究, 这里用 n 维数组 $P(a)$来表示路径 a, 其中 n 表示拓扑图顶点总的个数. 数组的第 j 位(从右向左)表示第 j 个顶点与路径 a 的关系: 如果第 j 个顶点在路径 a 中, 相应位的值为 1; 否则值为 0. 如图 1 所示的拓扑图, 用 $P(s)$来表示由顶点 1, 2, 3, 4 所构成的路径 s, 则

$$P(s) = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1].$$

当路径的起点与终点重合, 相应的路径便构成环路. 环路 a 用 $L(a)$来表示. 在图 1 中, 由顶点 1, 2, 3, 4, 5, 6 所构成的路径便是一个环路, 如果用 $L(1)$表示, 则

$$L(1)=[0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1].$$

1.1.5 路径与环路的子维数 路径或环路所包含顶点的数目定义为路径或环路的子维数, 也就是表示路径或环路的数组中所有非 0 元素的个数. 用 $S[P(e)]$ 表示路径 e 的子维数; $S[L(a)]$表示环路 a 的子维数. 显然有: $S[P(s)] = 4$, $S[L(1)]=6$.

1.2 环路的运算

1.2.1 环路的运算 定义环路的“⊕”运算为

$$LP = L(a) \oplus L(b),$$

其中 LP 为一个数组, 其维数与参加运算的两环的数组的维数相同.

“⊕”运算规则: 环 $L(a)$数组的每一位元素与环 $L(b)$的对应位元素代数求和, 如果其和不为 0 并且小于相应位顶点的局部度, 则 LP 对应位的值为 1; 否则其值为 0, 即

$$LP(i) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 < b_a(i) + b_b(i) < d_l(i), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$b_a(i)$——环 $L(a)$数组的第 i 位元素;

$b_b(i)$——环 $L(b)$数组的第 i 位元素;

$d_l(i)$——第 i 个顶点的局部度.

所谓顶点的局部度, 只考虑参加运算的两环所包含的顶点及其连接关系, 即去掉不在参加运算的两环所包含的顶点及其相应连接关系后, 所得到的拓扑图的顶点的度为顶点的局部度.

如果运算后的数组 LP 也为一个环, 则其可用 $L(a \oplus b)$表示, 表示由环 $L(a)$和环 $L(b)$组合而成的组合环路.

如果定义图 1 所示运动链的环 $L(2)$由顶点 1, 4, 7, 8, 5, 6 所构成, 则

$$L(2)=[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1],$$

显然有

$$L(1)=[0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$
$$\oplus$$
$$L(2)=[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1]$$
$$=$$
$$[1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$$

对于第 1 位, 其和为 2, 而构件 1 的局部度为 3, 故数组 LP 第 1 位的值为 1;

对于第 5 位, 其和为 2, 而构件 5 的局部度为 2, 故数组 LP 第 5 位的值为 0, 即 $LP = L(1)\oplus L(2)=[1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$.

数组 LP 表示由顶点 1, 2, 3, 4, 7, 8 构成的数组, 显然也是一个环, 表示由环 $L(1)$和环 $L(2)$组合而成的组合环路 $L(1\oplus 2)$.

1.3　运动链环路运算的存在条件

根据环路的运算规则, 显然所有的环路都可以进行“⊕”运算, 但是运算所得到的结果并不一定都是运动链的环路, 因此, 在进行环路的运算时, 必须考虑环路运算的存在条件. 环路运算的存在条件必须保证通过运算后, 得到的数组仍然表示一个环路.

环路“⊕”运算的存在条件可表述为

(ⅰ) 参加运算的两环路至少有两个公共顶点.

(ⅱ) 在运算时, 两环路相应位元素值均为 1, 并且“⊕”运算后所得数组的相应元素仍为 1 出现有且仅有 2 次.

1.4　环路的运算性质

“⊕” 运算的性质.

在运动链的拓扑图中, 对于任意的环路 $L(a)$, $L(b)$和 $L(c)$, “⊕” 运算有下列的规律:

(ⅰ) 运算“⊕”满足交换律, 即

$$L(a)\oplus L(b) = L(b)\oplus L(a).$$

(ⅱ) 如果 $L(a)\oplus L(b)$和 $L(b)\oplus L(c)$运算的结果都有意义, 即都能构成新的环路, 则运算“⊕”满足结合律. 即

$$L(a)\oplus L(b)\oplus L(c) = L(a)\oplus (L(b)\oplus L(c)).$$

(ⅲ) 运算“⊕”满足自消律, 即

$$L(a)\oplus L(a) = \theta,$$

其中θ为 n 维 0 数组, n 为拓扑图的顶点个数.

证明: 当环路和本身进行“⊕”运算时, 数组中的每一位总是相同的. 在数组的每一位, 当它们都为 0 时, 结果显然是 0; 当都为 1 时, 其和为 2, 由于局部度的值也是 2, 故其结果也是 0, 所以有 $L(a)\oplus L(a) = \theta$.

(ⅳ) 运算“⊕”满足吸收律, 即

$$L(a)\oplus L(a\oplus b) = L(b).$$

证明

$$L(a)\oplus L(a\oplus b) = L(a)\oplus (L(a)\oplus L(b))$$
$$= (L(a)\oplus L(a))\oplus L(b)$$

$$= \theta \oplus L(b)$$
$$= L(b).$$

2 环路分析

对于运动链的拓扑图, 根据环路的运算及其运算性质, 任何环路都可以表示为其他两个以上环路的“⊕”运算, 即任何环路都可以通过其他的环路经过“⊕”运算得到. 这里存在2个问题, 一个就是对于一个运动链的拓扑图, 最少要选取多少个环路, 才能得到所有其他的环路, 即运动链环路组的秩问题; 另一个问题就是这些环路该如何选择, 即如何确定基本环路集.

2.1 运动链环路组的秩

Euler定理[2]指出, 在一个由 n 个顶点和 m 条边组成的多边形网络中, 其顶点数 n, 边数 m 和基本环路数 v 满足

$$v = m - n + 1.$$

Euler 定理建立了拓扑图的顶点数、边数和环数之间的关系. 如果运动链用顶点表示构件, 边表示运动副的拓扑图表示后, 由 Euler 定理可以直接得到运动链的基本环路数. 这里的运动链环路组的秩即等于运动链的基本环路数. 如图 1 所示, 运动链的基本环数为 $v = 9 - 8 + 1 = 2$, 即此运动链环路组的秩为 2.

2.2 基本环路集的确定

基本环路集的选取定理 对于一个由 v 个环路构成的环路集 $\mathcal{S}\{L(1), L(2), \cdots, L(v)\}$, 其中 v 表示基本环的数目. 如果对于其中的任何 3 个不同环路 $L(i)$, $L(j)$和 $L(k)$, $(i, j, k = 1, 2, \cdots, v)$, 都有

$$L(i) \oplus L(j) \neq L(k),$$

则环路集 $\mathcal{S}\{L(1), L(2), \cdots, L(v)\}$是一个基本环路集, 或称独立环集.

对于给定的拓扑图, 通常有多种基本环路集的选取方法, 可以直观地按方便来选取. 例如对于图 2(b)所示的运动链拓扑图, 可以选取由顶点 1, 2, 8 和 7 所构成的环为 $L(1)$, 选取由顶点 1, 7, 8, 9 和 10 所构成的环为 $L(2)$, 选取由顶点 1, 10, 4, 5 和 6 所构成的环为 $L(3)$, 选取由顶点 2, 3, 4, 10, 9 和 8 所构成的环为 $L(4)$, 显然环路集 $\mathcal{S}\{L(1), L(2), L(3), L(4)\}$满足环路选取定理, 为一个基本环路集.

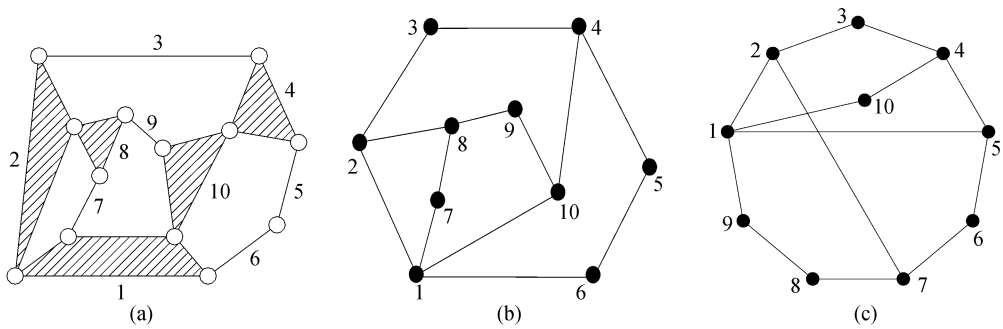

图 2 运动链与拓扑图及特征周长拓扑图

(a) 10 杆运动链的结构简图; (b) 相应的拓扑图; (c) 特征周长拓扑图

2.3　运动链的周长环

对于一个拓扑图, 选定了基本环路集, 通过基本环路集中环路的代数运算, 就可以得到运动链的所有环路, 这个包含运动链的所有环路的集合称为运动链的最大环路集合, 记以 $\mathcal{SE}_{\max}$. 而运动链的最大环路集合中所包含的环路数称为运动链的最大环路集合的阶, 记以 $Or(\mathcal{SE}_{\max})$, 它依赖于运动链环路基本环路集的秩 v 的组合数 $\sum_{i=1}^{v} C_v^i$, 减去环路中不符合环路运算条件的"环路组数 μ",

$$Or\left(\mathcal{SE}_{\max}\right)=\sum_{i=1}^{v} C_v^i-\mu.$$

在运动链的最大环路集合中, 环路顶点数为最大的有时不止 1 个, 这些环都称之为极大环. 从极大环的某个顶点开始, 把顶点的度按顺时针或逆时针的方向排列成一个数字串, 称为极大环的顶点度序列. 所有的极大环的顶点度序列中最大的一个称为周长环顶点度的最大序列, 相应的极大环定义为周长环. 显然, 对同一个运动链, 由于其拓扑图绘制方式不同, 顶点编号不同, 故得到的邻接矩阵多种多样, 但是其周长环顶点度的最大序列是唯一的. 这样, 在机构的运动简图、拓扑图与拓扑矩阵之间建立理想的一一对应的关系就有实现的可能.

2.4　运动链的规范周长拓扑图

周长拓扑图　在映射运动链拓扑图的时候, 按照下列规则进行:

(ⅰ) 把周长环放在拓扑图的外围成为外圈, 并构成正多边形.

(ⅱ) 其余的不在周长环上的顶点放在正多边形内.

这样得到的拓扑图定义为周长拓扑图. 如在图 2 中图(b)为图(a)所示运动链的周长拓扑图.

规范周长拓扑图　按周长环上顶点度的最大序列方向对周长上的顶点重新分配顶点的序列标号. 如果从一个顶点, 其顺时针方向和逆时针方向度的序列都一样, 则选用顺时针. 对不在周长环上的顶点, 其重新标号遵循以下规则:

(ⅰ) 先排非周长上顶点数多的大支链, 再排小支链.

(ⅱ) 如果两支链大小相同, 则先排连接周长上的序号小的支链, 再排连接周长上的序号大的支链. 比如支链 A 和 B 分别与周长上序号为(2, 4), (2, 5)的顶点相连, 显然先排 A 支链.

(ⅲ) 在同一个支链中, 按此支链连接周长上顶点的序号递增排列. 如一个包含顶点依次为 A, B 和 C 的支链与周长上序号为(1, 8)的顶点相连接, 且顶点 A 与 1 连接, 那么排的顺序即为 A, B, C.

所有的顶点都重新标号后, 得到的拓扑图为运动链的规范周长拓扑图.

3　运动链的特征邻接矩阵

对于一个运动链, 把其规范邻接矩阵右上三角阵的行向量依次进行串联得到二进制数字串, 定义与最大的一个二进制串相对应的邻接矩阵为此运动链的特征邻接矩阵, 对应于特征邻接矩阵的规范周长拓扑图称之为运动链的特征周长拓扑图. 显然, 对于同一个运动链, 不管其初始拓扑图如何绘制, 顶点如何编号, 其特征邻接矩阵是唯一的.

对图 2 所示的运动链, 通过基本环路的"⊕"运算可以得到此运动链所有环, 其特征周长拓扑图如图 2(c)所示, 其特征邻接矩阵为

$$\boldsymbol{CAM} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 运动链同构判别

运动链的同构判别定理 对于两个运动链 A 和 B, 其同构的充分必要条件是其特征邻接矩阵相等, 即如果

$$\boldsymbol{CAM}(\mathrm{A}) = \boldsymbol{CAM}(\mathrm{B}),$$

则运动链 A 和 B 同构; 否则, 它们不同构.

证明 由环路分析理论可以得到运动链的所有环路及周长环. 根据周长环的定义, 一个周长环对应一个周长拓扑图, 从而得到运动链的所有周长拓扑图. 规范周长拓扑图是先对周长拓扑图周长环上的顶点进行规范标号, 然后对其子链上的顶点进行规范标号得到的, 因此规范周长拓扑图把运动链拓扑图的画法形式和顶点标号方式减少到了很少的几种, 甚至只有 1 种, 故由此得到的规范邻接矩阵集的元素只有很少的几个或者唯一. 而运动链的特征邻接矩阵是对应于右上三角阵的行向量串联之后具有最大值的规范邻接矩阵, 故其是唯一的. 因此, 对于同一个运动链, 不管其初始拓扑图如何绘制, 顶点如何编号, 其特征邻接矩阵是唯一的, 故两个运动链同构的充要条件是其特征邻接矩阵相等.

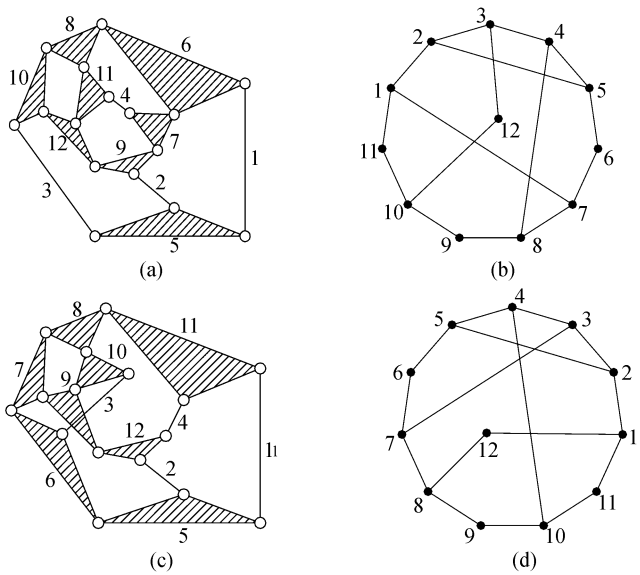

图 3 运动链及其特征周长拓扑图

(a)和(b)为一个 12 杆运动链的结构简图及特征周长拓扑图; (c)和(d)为另一个 12 杆运动链的结构简图及特征周长拓扑图

对于图 3 所示的两个 12 杆运动链, 其特征邻接矩阵为

$$\boldsymbol{CAM}(\mathrm{A})=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{CAM}(\mathrm{B})=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{CAM}(\mathrm{A})\neq\boldsymbol{CAM}(\mathrm{B})$, 这两个运动链不同构.

又如对于如下的 15 杆运动链, 其特征邻接矩阵分别为

$$\boldsymbol{CAM}(\mathrm{A})=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

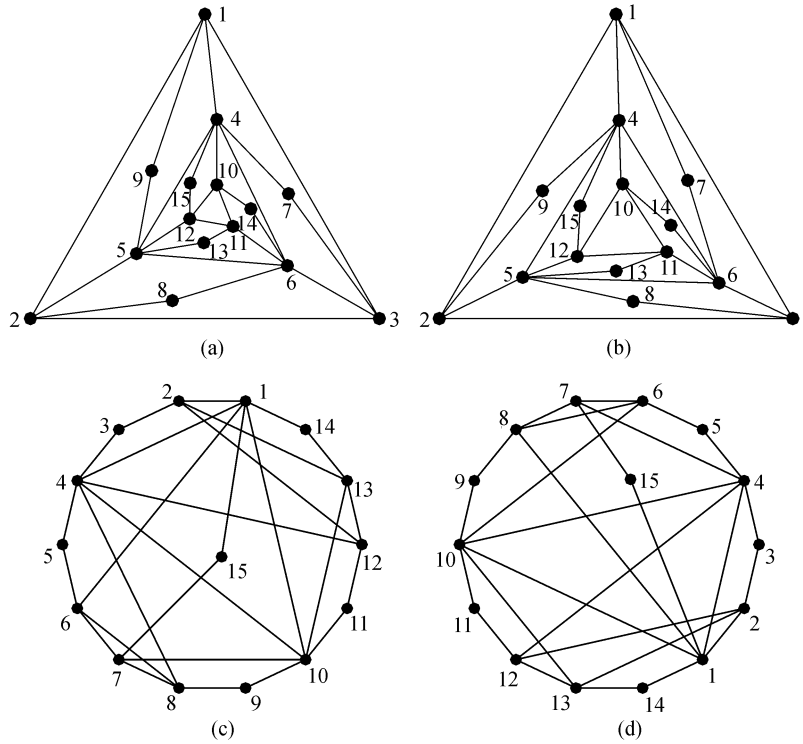

图 4 运动链及其特征周长拓扑图

(a)和(c)为一个 15 杆运动链的结构简图及特征周长拓扑图; (b)和(d)为另一个 15 杆运动链的结构简图及特征周长拓扑图

$$\boldsymbol{CAM}(\mathrm{B})=\begin{pmatrix}
0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}.$$

显然 $\boldsymbol{CAM}(\mathrm{A})\neq\boldsymbol{CAM}(\mathrm{B})$, 这两个运动链不同构.

5 结论

本文给出了运动链环路的数学描述及其环路之间的“⊕”代算运算规则, 并根据运动链环路的特点, 给出了运动链基本环之间的相互运算构成所有环路的算法及环路运算存在的条件.

讨论了如何经过环路的代数运算得到有决定意义的运动链的周长环, 进而建立特征周长拓扑图和特征邻接矩阵, 形成运动链环路代数理论的基础. 此理论的最大特点就是不管初始所综合出的运动链的拓扑图如何绘制, 其顶点如何编号, 最后得到的运动链的特征周长拓扑图及特征邻接矩阵都是唯一的, 它们与运动链是一一对应的. 这个理论的一个直接结果是简化了运动链同构识别这一历史性难题. 这个理论还使得今后在运动链的型综合时不仅不必进行同构识别, 并且综合过程易于计算机的自动实现. 拓扑图的特征表达和方便的数字化还为运动链图谱库的建立提供了好的数学模型, 特别是为进一步实现机械设计的完全数字化和计算机化开辟了新的发展思路.

参　考　文　献

1 Freudenstein F, Dobrjanskyj L. On a theory of type synthesis of mechanisms. In: Proceedings of 11th International Congress of Applied Mechanics. Berlin: Springer, 1964. 420—428

2 卢开澄. 图论及其应用. 北京: 清华大学出版社, 1984. 3—20

3 杨廷力. 机械系统基本理论——结构学、运动学、动力学. 北京: 机械工业出版社, 1995. 1—69

4 曹惟庆. 连杆机构的分析与综合(第二版). 北京: 科学出版社, 2002. 1—58

5 Yan H S, Hall A S. Linkage characteristic polynomials: Definitions, coefficients by inspection. Trans ASME J Mech Design, 1981, 103(3): 578—589

6 Mruthyunjaya T S, Balasubramanzan H R. In quest of a reliable and efficient computational test for detection of isomorphism in kinematic chains. Mech Mach Theory, 1987, 22(2): 131—140[DOI]

7 Rao A C, Varada R D. Application of the hamming number technique to detect isomorphism among kinematic chains and inversion. Mech Mach Theory, 1991, 26(1): 55—75[DOI]

8 罗玉峰, 杨廷力, 曹惟庆. 利用点的邻度识别运动链同构. 第七届机构学学术讨论会论文集. 北戴河, 1990. 16—20

9 Ambeker A G, Agrawal V P. Canonical numbering of kinematic chains and isomorphism problem: min code. Mech Mach Theory, 1987, 22(5): 453—467[DOI]

10 罗玉峰, 杨廷力, 曹惟庆. 用关联度和关联度码识别运动链同构. 机械工程学报, 1991, 27(2): 44—50

11 Shin J K, Krishnamurty S. Development of a standard code for colored graphs and its application to kinematic chains. Trans ASME J Mech Design, 1994, 116(1): 189—196

12 Chu J K, Cao W Q. Identification of isomorphism among kinematic chains and inversion using link's adjacent-chain-table. Mech Mach Theory, 1994, 9(1): 53—68

13 刘川禾, 杨廷力. 用多面立体拓扑结构码置换群法判定运动链同构. 机械科学与技术, 1999, 27(2): 180—185

14 冯春, 陈永. 基于遗传算法的机构运动链同构识别. 机械工程学报, 2001, 37(10): 27—30

15 孔凡国, 邹慧君. 一种机构运动链同构识别的新方法研究. 中国机械工程, 1997, 8(2): 30—33

16 Chang Z Y, Zhang C, Yang Y H, et al. A new method to mechanism kinematic chain isomorphism identification. Mech Mach Theory, 2002, 37(4): 411—417[DOI]

17 Mruthyunjaya T S. Kinematic structure of mechanisms revisited. Mech Mach Theory, 2003, 38(4): 279—320[DOI]

18 Rao A C, Prasad Raju Pathapati V V N R. Loop based detection of isomorphism among chains, inversions and type of freedom in multi-degree of freedom chains. ASME J Mech Design, 2000,122(1): 31—42[DOI]

19 Ding H F, Huang Z. A new topological description method of kinematic chain. In: The 14th National Conference on Mechanisms in Chongqing, 2004. 161—164

20 Ding H F, Huang Z. The systemic research on loop characteristics of kinematic chains and its applications. In: ASME Conference, MECH-84283, Sept. 24-28, 2005, Long Beach, California, USA

21 黄真, 丁华锋. 运动链拓扑图绘图及特征描述自动生成软件 V1.0. 中国版权保护中心, 受理号: 2005SR04488, 2005

22 丁华锋, 黄真. 运动链拓扑图图谱库软件 V1.0. 中国版权保护中心, 受理号: 2005SR04487, 2005