沿着某个方向凸的调和单叶映射的构造

王智刚^{①*}, 石磊^①, 蒋月评^②^① 安阳师范学院数学与统计学院, 安阳 455000;^② 湖南大学数学与计量经济学院, 长沙 410082

E-mail: zhigangwang@foxmail.com, shimath@163.com, ypjiaing731@163.com

收稿日期: 2013-07-23; 接受日期: 2013-09-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11301008, 11226088, 11371126 和 11071059)、河南省教育厅自然科学基金 (批准号: 14B110012) 和河南省高等学校青年骨干教师资助计划 (批准号: 2013GGJS-146) 资助项目

摘要 本文给出调和单叶映射的凸组合和卷积单叶且沿着某个方向凸的若干充分条件, 部分解决 Dorff 所提出的一个公开问题, 相关结果推广和改进早期的一些结论. 最后, 通过三个例子验证所得到的主要结果.

关键词 调和单叶映射 剪切方法 凸组合 卷积**MSC (2010) 主题分类** 58E20, 30C99, 30C45

1 引言

平面调和映射是微分几何中研究极小曲面问题的一种重要工具. 但是, 平面调和映射作为共形映射的一种自然推广, 关于它的系统研究起步却较晚, 直至 1984 年, Clunie 和 Sheil-Small^[1] 才给出了若干关于调和单叶映射与共形映射中经典问题的类比结果. 由于平面调和映射与微分几何、拟共形映射、高维几何函数论和几何偏微分方程都有着非常密切的联系, 同时在图像处理、统计物理学、信号处理和流体力学等方面也均有着广泛的应用, 平面调和映射近年来已经引起了很多学者的关注. 但是, 迄今为止, 平面调和映射中还有一系列重要的问题尚未得到解决, 参见文献 [1–3].

设 $\mathcal{H}$ 表示在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内满足规范化条件 $f(0) = f_z(0) = f_{\bar{z}}(0) - 1 = 0$ 的复值调和函数 f 所组成的函数类. 这类函数可以写成 $f = h + \bar{g}$, 其中

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \quad (1.1)$$

均在 $\mathbb{D}$ 内解析. 我们注意到函数 $f \in \mathcal{H}$ 在 $\mathbb{D}$ 内局部单叶和保向当且仅当 $|g'(z)| < |h'(z)|$.

我们把 $\mathcal{H}$ 中单叶且保向的调和函数所组成的子类记为 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$. 同时, 以 $\mathcal{P}$ 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内具有形式

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

且满足条件 $\Re(p(z)) > 0$ 的解析函数所组成的类.

如果对于所有的常数 $a \in \mathbb{C}$, 集合 $\Omega \cap \{a + te^{i\gamma} : t \in \mathbb{R}, 0 \leq \gamma < 2\pi\}$ 是连通的, 或者为空集, 则区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 称为是沿着 γ 方向凸的. 特别地, 一个区域称为是沿着实轴 (或者虚轴) 方向凸的, 如果它与每一条水平 (或者垂直) 方向的直线的交集是连通的, 或者为空集. 同时, 如果函数 $f \in \mathcal{H}$ 把 $\mathbb{D}$ 映射成一个沿着实轴 (或者虚轴) 方向凸的区域, 则称函数 f 是沿着实轴 (或者虚轴) 方向凸的. 通过沿着平行方向剪切一个给定的共形映射, Clunie 和 Sheil-Small^[1] 引入了一种“剪切方法”来构造具有特定的解析伸张且沿着某个方向凸的调和单叶映射. 利用复值多项式的零点分布理论和平面调和映射中的剪切方法, 对调和单叶映射卷积的研究近年来取得了一些进展, 可参见文献 [4–8]. 关于平面调和映射的 Landau 定理及 Bloch 常数、调和单叶映射的像域以及特殊调和单叶映射的系数估计等问题也受到数学工作者的关注, 可参见文献 [9–12]. Duren^[2] 系统地介绍了平面调和映射研究所取得的成果.

对于给定的两个调和函数

$$f = h + \bar{g} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \bar{z}^n, \quad F = H + \bar{G} = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \bar{z}^n,$$

我们定义它们的卷积为

$$f * F = h * H + \overline{g * G} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \bar{B}_n \bar{z}^n. \quad (1.2)$$

Macgregor^[13] 已经证明了即使 f 和 g 是解析的凸函数, 它们的凸组合也不一定是单叶的. 关于解析函数凸组合的早期研究, 可参见文献 [14, 15]. 设 $f_j = h_j + \bar{g}_j$ ($j = 1, 2$) 是 $\mathbb{D}$ 内的两个调和单叶映射, 它们的线性组合定义为

$$f_3 = t f_1 + (1-t) f_2 = [t h_1 + (1-t) h_2] + [t \bar{g}_1 + (1-t) \bar{g}_2] = h_3 + \bar{g}_3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

设 ω_1 和 ω_2 分别为 f_1 和 f_2 的解析伸张, 在 $\omega_1 = \omega_2$ 的条件下, Dorff^[12] 给出了凸组合 $f_3 = t f_1 + (1-t) f_2$ 单叶且沿着虚轴方向凸的一个充分条件. 同时, 他提出了如下问题.

问题 1.1 在去掉 $\omega_1 = \omega_2$ 的条件下, 凸组合 $f_3 = t f_1 + (1-t) f_2$ 是否单叶且沿着虚轴方向凸?

此外, Wang 等人^[16] 证明了两个调和单叶映射 $f_j = h_j + \bar{g}_j$ ($j = 1, 2$) 在满足 $h_j + g_j = z/(1-z)$ 的条件下, 它们的凸组合 $f_3 = t f_1 + (1-t) f_2$ 是单叶且沿着实轴方向凸的.

我们把 $\mathcal{H}$ 中规范化的解析函数所组成的子类记为 $\mathcal{A}$. 对于函数 $\phi \in \mathcal{A}$, 定义

$$\mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{\lambda}(\phi) := \{h + \bar{g} \in \mathcal{H} : h + \lambda g = \phi\}, \quad |\lambda| = 1.$$

Nagpal 和 Ravichandran^[17] 引入了函数类 $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}^1(\phi)$ 和 $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{-1}(\phi)$, 他们利用这些函数类研究了平面调和映射的卷积性质.

本文的主要目的是探讨平面调和映射凸组合和卷积的单叶性. 第 2 节介绍几个相关的引理; 第 3 节讨论两个调和单叶映射凸组合单叶且沿着某个方向凸的充分条件, 同时在局部单叶性的假定下考察两个调和单叶映射的卷积沿着某个方向凸的条件; 第 4 节通过 3 个例子验证相关结果.

2 预备知识

为了证明本文的主要结果, 我们需要如下几个引理.

引理 2.1 设函数 φ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内解析. 如果调和函数 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件

$$h_j - \widehat{\lambda} g_j = \varphi, \quad |\widehat{\lambda}| = 1,$$

则凸组合 $f_3 = tf_1 + (1-t)f_2$ 在 $\mathbb{D}$ 内是局部单叶的.

证明 设凸组合 $f_3 = tf_1 + (1-t)f_2$ 的解析伸张为

$$\omega_3 = \frac{tg'_1 + (1-t)g'_2}{th'_1 + (1-t)h'_2}.$$

注意到 $|\widehat{\lambda}\omega_j| = |\omega_j| < 1$ ($j = 1, 2, |\widehat{\lambda}| = 1$) 和 $h_j - \widehat{\lambda}g_j = \varphi$, 我们有

$$\begin{aligned} \Re\left(\frac{1 + \widehat{\lambda}\omega_3}{1 - \widehat{\lambda}\omega_3}\right) &= \Re\left(\frac{th'_1 + (1-t)h'_2 + \widehat{\lambda}[tg'_1 + (1-t)g'_2]}{th'_1 + (1-t)h'_2 - \widehat{\lambda}[tg'_1 + (1-t)g'_2]}\right) = t\Re\left(\frac{h'_1 + \widehat{\lambda}g'_1}{\varphi'}\right) + (1-t)\Re\left(\frac{h'_2 + \widehat{\lambda}g'_2}{\varphi'}\right) \\ &= t\Re\left(\frac{h'_1 + \widehat{\lambda}g'_1}{h'_1 - \widehat{\lambda}g'_1}\right) + (1-t)\Re\left(\frac{h'_2 + \widehat{\lambda}g'_2}{h'_2 - \widehat{\lambda}g'_2}\right) = t\Re\left(\frac{1 + \widehat{\lambda}\omega_1}{1 - \widehat{\lambda}\omega_1}\right) + (1-t)\Re\left(\frac{1 + \widehat{\lambda}\omega_2}{1 - \widehat{\lambda}\omega_2}\right) \\ &> 0, \end{aligned}$$

这就意味着 $|\omega_3| = |\widehat{\lambda}\omega_3| < 1$. 因此, f_3 在 $\mathbb{D}$ 内是局部单叶的. $\square$

引理 2.2 ^[1] 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内局部单叶且保向的调和函数 $f = h + \overline{g}$ 把 $\mathbb{D}$ 映射成沿着实轴 (或者虚轴) 方向凸的区域的充要条件为 $h - g$ (或者 $h + g$) 是沿着实轴 (或者虚轴) 方向凸的共形映射.

我们注意到引理 2.2 可以推广到沿着任意方向凸的情形.

引理 2.3 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内局部单叶且保向的调和函数 $f = h + \overline{g}$ 把 $\mathbb{D}$ 映射成沿着 γ ($0 \leq \gamma < 2\pi$) 方向凸的区域的充要条件为 $h - e^{2i\gamma}g$ 是沿着 γ 方向凸的共形映射.

引理 2.4 ^[18] 设 ψ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内规范化的非常数函数, 则函数 ψ 把 $\mathbb{D}$ 单叶地映射成沿着虚轴方向凸的区域的充要条件是存在两个实数 $\mu \in [0, 2\pi)$ 和 $\nu \in [0, \pi]$ 使得

$$\Re(-ie^{i\mu}(1 - 2ze^{-i\mu}\cos\nu + z^2e^{-2i\mu})\psi'(z)) \geq 0, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (2.1)$$

引理 2.5 如果存在一个解析函数 $p \in \mathcal{P}$ 和两个常数 $\mu, \nu \in [0, \pi]$ 使得

$$\vartheta(z) = \int_0^z \frac{\cos\mu + i(\sin\mu)p(\zeta)}{e^{i\mu}(1 - 2\zeta e^{-i\mu}\cos\nu + \zeta^2 e^{-2i\mu})} d\zeta, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (2.2)$$

则函数 ϑ 是单叶且沿着虚轴方向凸的.

证明 根据引理 2.4, 我们只需验证函数 ϑ 满足条件

$$\Re(-ie^{i\mu}(1 - 2ze^{-i\mu}\cos\nu + z^2e^{-2i\mu})\vartheta'(z)) \geq 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

由 (2.2), 我们得到

$$\Re(-ie^{i\mu}(1 - 2ze^{-i\mu}\cos\nu + z^2e^{-2i\mu})\vartheta'(z)) = \sin\mu\Re(p(z)) \geq 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

因此, 引理的结论成立. $\square$

利用引理 2.5 中类似的证明方法, 我们可以得到以下的引理 2.6, 在此省略证明过程.

引理 2.6 如果存在一个解析函数 $p \in \mathcal{P}$ 和两个常数 $\mu \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$, $\nu \in [0, \pi]$ 使得

$$\eta(z) = \int_0^z \frac{\cos\mu p(\zeta) + i\sin\mu}{e^{i\mu}(1 - 2\zeta e^{-i\mu}\cos\nu + \zeta^2 e^{-2i\mu})} d\zeta, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (2.3)$$

则函数 η 是单叶且沿着实轴方向凸的.

引理 2.7 ^[19] 设 f 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内满足条件 $f(0) = 0$ 且 $f'(0) \neq 0$ 的解析函数. 另外, 函数 κ 定义为

$$\kappa(z) = \frac{z}{(1 + ze^{i\theta_1})(1 + ze^{i\theta_2})}, \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

如果

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{\kappa(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (2.5)$$

则 f 是沿着实轴方向凸的.

引理 2.8 ^[20] 设 ξ 和 ψ 分别为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的凸函数和星象函数, 并满足条件 $\xi(0) = \psi(0) = 0$. 则对于每一个在 $\mathbb{D}$ 内满足条件 $\Re(F(z)) > 0$ 的解析函数 F , 都有

$$\Re\left(\frac{\psi(z)F(z) * \xi(z)}{\psi(z) * \xi(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (2.6)$$

3 主要结果

定理 3.1 设调和函数 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件 $f_j \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^1(\phi)$. 如果函数 ϕ 是沿着虚轴方向凸的, 则凸组合 $f_3 = tf_1 + (1-t)f_2$ 是单叶且沿着虚轴方向凸的.

证明 因为调和函数 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件 $f_j \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^1(\phi)$, 在引理 2.1 中取 $\hat{\lambda} = -1$, 我们得到 f_3 是局部单叶的. 同时, 由于函数 ϕ 是沿着虚轴方向凸的, 我们有

$$h_3 + g_3 = [th_1 + (1-t)h_2] + [tg_1 + (1-t)g_2] = \phi,$$

即 $h_3 + g_3$ 是沿着虚轴方向凸的共形映射. 因此, 根据引理 2.2, 我们断定 f_3 是单叶且沿着虚轴方向凸的. $\square$

注 3.1 在满足附加条件下, 定理 3.1 对问题 1.1 给出了肯定的回答.

根据定理 3.1 和引理 2.5, 对于某个特定的函数 ϕ , 我们得到如下结果.

推论 3.1 设 $\alpha \in [-1, 1]$, $\beta \in [0, 1]$, $\theta \in (0, \pi)$. 如果 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件

$$f_j \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^1\left(\beta \frac{z(1-\alpha z)}{1-z^2} + (1-\beta) \frac{1}{2i \sin \theta} \log \left(\frac{1+ze^{i\theta}}{1+ze^{-i\theta}}\right)\right),$$

则凸组合 $f_3 = tf_1 + (1-t)f_2$ 是单叶且沿着虚轴方向凸的.

证明 首先, 我们定义函数 $\tilde{p}$ 为

$$\tilde{p}(z) = \beta \frac{1-2\alpha z+z^2}{1-z^2} + (1-\beta) \frac{1-z^2}{(1+ze^{i\theta})(1+ze^{-i\theta})}, \quad z \in \mathbb{D},$$

其中 $\alpha \in [-1, 1]$, $\beta \in [0, 1]$, $\theta \in (0, \pi)$. 因此, 函数 $\tilde{p}$ 在 $\mathbb{D}$ 内解析且 $\tilde{p}(0) = 1$. 同时, 注意到

$$\begin{aligned} \Re(\tilde{p}(z)) &= \frac{1}{2}(\tilde{p}(z) + \overline{\tilde{p}(z)}) \\ &= \beta \frac{(1-|z|^2)(1+|z|^2-2\alpha\Re(z))}{|1-z^2|^2} + (1-\beta) \frac{(1-|z|^2)(1+|z|^2+2\cos\theta\Re(z))}{|(1+ze^{i\theta})(1+ze^{-i\theta})|^2} > 0. \end{aligned}$$

在引理 2.5 中分别取 $\mu = \nu = \pi/2$, $p = \tilde{p}$, 我们知道

$$\phi(z) = \beta \frac{z(1-\alpha z)}{1-z^2} + (1-\beta) \frac{1}{2i \sin \theta} \log \left(\frac{1+ze^{i\theta}}{1+ze^{-i\theta}} \right)$$

是沿着虚轴方向凸的. 因此, 根据定理 3.1, 我们断定 f_3 是单叶且沿着虚轴方向凸的. $\square$

定理 3.2 设调和函数 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件 $f_j \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{-1}(\phi)$. 如果函数 ϕ 是沿着实轴方向凸的, 则凸组合 $f_3 = tf_1 + (1-t)f_2$ 是单叶且沿着实轴方向凸的.

证明 因为调和函数 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件 $f_j \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^1(\phi)$, 在引理 2.1 中取 $\hat{\lambda} = 1$, 我们得到 f_3 是局部单叶的. 同时, 由于 ϕ 是沿着实轴方向凸的, 我们有

$$h_3 - g_3 = [th_1 + (1-t)h_2] - [tg_1 + (1-t)g_2] = \phi,$$

即 $h_3 - g_3$ 是沿着实轴方向凸的共形映射. 因此, 根据引理 2.2, 我们断定 f_3 是单叶且沿着实轴方向凸的. $\square$

结合定理 3.2 和引理 2.6, 我们得到如下推论.

推论 3.2 设 $\hat{\beta} \in [-2, 2]$, $\hat{\gamma} \in [0, 1]$. 如果 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件

$$f_j \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{-1} \left(\hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} \right) + (1-\hat{\gamma}) \frac{z}{1+\hat{\beta}z+z^2} \right),$$

则凸组合 $f_3 = tf_1 + (1-t)f_2$ 是单叶且沿着实轴方向凸的.

证明 我们定义函数 $\hat{p}$ 为

$$\hat{p}(z) = \hat{\gamma} \frac{1+\hat{\beta}z+z^2}{1-z^2} + (1-\hat{\gamma}) \frac{1-z^2}{1+\hat{\beta}z+z^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

其中 $\hat{\beta} \in [-2, 2]$, $\hat{\gamma} \in [0, 1]$. 因此, 函数 $\hat{p}$ 在 $\mathbb{D}$ 内解析且 $\hat{p}(0) = 1$. 进一步地, 定义函数 q 为

$$q(z) = \frac{1+\beta z+z^2}{1-z^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

容易知道

$$\Re(q(z)) = \frac{(1-|z|^2)(1+|z|^2+\beta\Re(z))}{|1-z^2|^2} > 0, \quad z \in \mathbb{D},$$

因此, 我们有

$$\Re(\hat{p}(z)) = \hat{\gamma} \Re(q(z)) + (1-\hat{\gamma}) \frac{\Re(q(z))}{|q(z)|^2} > 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

在引理 2.6 中取 $\mu = 0$, $\cos \nu = -\beta/2$, $p = \hat{p}$, 我们知道

$$\phi(z) = \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} \right) + (1-\hat{\gamma}) \frac{z}{1+\hat{\beta}z+z^2}$$

是沿着实轴方向凸的. 因此, 根据定理 3.2, 我们断定 f_3 是单叶且沿着实轴方向凸的. $\square$

现在, 我们把定理 3.1 和 3.2 的结果推广到沿着任意方向凸的情形.

定理 3.3 设调和函数 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件 $f_j \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{\lambda}(\phi)$. 如果函数 ϕ 是沿着 $[\text{Arg}(-\lambda)]/2 \in [0, 2\pi)$ 方向凸的, 则凸组合 $f_3 = tf_1 + (1-t)f_2$ 是单叶且沿着 $[\text{Arg}(-\lambda)]/2$ 方向凸的.

证明 因为调和函数 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件 $f_j \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{\lambda}(\phi)$, 在引理 2.1 中取 $\hat{\lambda} = -\lambda$, 我们得到 f_3 是局部单叶的. 同时, 由于函数 ϕ 是沿着 $[\text{Arg}(-\lambda)]/2$ 方向凸的, 根据引理 2.3, 我们有

$$h_3 - e^{i[\text{Arg}(-\lambda)]} g_3 = [th_1 + (1-t)h_2] - e^{i[\text{Arg}(-\lambda)]} [tg_1 + (1-t)g_2] = \phi,$$

即 $h_3 - e^{i[\text{Arg}(-\lambda)]} g_3$ 是沿着 $[\text{Arg}(-\lambda)]/2$ 方向凸的共形映射. 因此, 再根据引理 2.3, 我们断定 f_3 是单叶且沿着 $[\text{Arg}(-\lambda)]/2$ 方向凸的. $\square$

定理 3.4 设调和函数 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件 $f_1 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^1(\phi)$ 和 $f_2 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^1(\psi)$. 如果函数 $t\phi + (1-t)\psi$ 是沿着虚轴方向凸的, 同时 $\Re((1-\omega_1\overline{\omega_2})h'_1\overline{h'_2}) \geq 0$, 其中 ω_1 和 ω_2 分别为 f_1 和 f_2 的解析伸张, 则凸组合 $f_3 = tf_1 + (1-t)f_2$ 是单叶且沿着虚轴方向凸的.

证明 由于 $\Re((1-\omega_1\overline{\omega_2})h'_1\overline{h'_2}) \geq 0$, 根据 [16, 定理 2] 的证明, 我们知道 f_3 是局部单叶的. 注意到

$$h_3 + g_3 = [th_1 + (1-t)h_2] + [tg_1 + (1-t)g_2] = t\phi + (1-t)\psi$$

是沿着虚轴方向凸的, 根据引理 3.2, 我们知道 f_3 是单叶且沿着虚轴方向凸的. $\square$

利用定理 3.4 中类似的证明方法, 我们得到如下结论.

推论 3.3 设调和函数 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件 $f_1 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{-1}(\phi)$ 和 $f_2 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{-1}(\psi)$. 如果函数 $t\phi + (1-t)\psi$ 是沿着实轴方向凸的, 同时 $\Re((1-\omega_1\overline{\omega_2})h'_1\overline{h'_2}) \geq 0$, 其中 ω_1 和 ω_2 分别为 f_1 和 f_2 的解析伸张, 则凸组合 $f_3 = tf_1 + (1-t)f_2$ 是单叶且沿着实轴方向凸的.

注 3.2 推论 3.3 修正了文献 [16, 定理 2] 中的一个条件, 条件 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 沿着实轴方向凸应该加强为 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足 $f_1 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{-1}(\phi)$ 和 $f_2 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{-1}(\psi)$ 且 $t\phi + (1-t)\psi$ 是沿着实轴方向凸的. 否则, f_3 不一定是沿着实轴方向凸的.

定理 3.5 设调和函数 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件 $f_1 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^1(\phi)$ 和 $f_2 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{-1}(\phi)$. 如果

$$\Re\left(\frac{1-\omega_1\overline{\omega_2}}{(1+\omega_1)(1-\overline{\omega_2})}\right) > 0,$$

其中 ω_1 和 ω_2 分别为 f_1 和 f_2 的解析伸张. 同时函数 ϕ 满足条件

$$\phi(z) = \int_0^z \frac{1}{(1+\zeta e^{i\theta_1})(1+\zeta e^{i\theta_2})} d\zeta, \quad z \in \mathbb{D},$$

其中 $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, 则凸组合 $f_3 = tf_1 + (1-t)f_2$ 是单叶且沿着实轴方向凸的.

证明 由于 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$), 我们知道 $g'_j = \omega_j h'_j$ 满足 $|\omega_j| < 1$, 从而,

$$|\omega_3| = \left| \frac{tg'_1 + (1-t)g'_2}{th'_1 + (1-t)h'_2} \right| = \frac{|t\omega_1 h'_1 + (1-t)\omega_2 h'_2|}{|th'_1 + (1-t)h'_2|}.$$

根据题设, 我们有

$$\begin{aligned} & |th'_1 + (1-t)h'_2|^2 - |t\omega_1 h'_1 + (1-t)\omega_2 h'_2|^2 \\ &= (th'_1 + (1-t)h'_2)(\overline{th'_1 + (1-t)h'_2}) - (t\omega_1 h'_1 + (1-t)\omega_2 h'_2)(\overline{t\omega_1 h'_1 + (1-t)\omega_2 h'_2}) \\ &= t^2(1-|\omega_1|^2)|h'_1|^2 + (1-t)^2(1-|\omega_2|^2)|h'_2|^2 + 2t(1-t)\Re((1-\omega_1\overline{\omega_2})h'_1\overline{h'_2}) \\ &= t^2(1-|\omega_1|^2)|h'_1|^2 + (1-t)^2(1-|\omega_2|^2)|h'_2|^2 + 2t(1-t)\Re\left(\frac{1-\omega_1\overline{\omega_2}}{(1+\omega_1)(1-\overline{\omega_2})}\right) > 0, \end{aligned}$$

这就意味着 $|\omega_3| < 1$. 故 f_3 是局部单叶的.

现在, 我们证明 f_3 是沿着实轴方向凸的. 注意到

$$h'_1 - g'_1 = (h'_1 + g'_1) \left(\frac{h'_1 - g'_1}{h'_1 + g'_1} \right) = \phi'(z) \left(\frac{1 - \omega_1}{1 + \omega_1} \right) = \phi'(z) p_1(z),$$

其中

$$p_1(z) = \frac{1 - \omega_1}{1 + \omega_1} \quad (3.1)$$

满足条件 $\Re(p_1(z)) > 0$. 由 (2.4), 我们得到

$$\begin{aligned} \Re \left(\frac{z(h'_3 - g'_3)}{\kappa(z)} \right) &= \Re \left(\frac{z}{\kappa(z)} [t(h'_1 - g'_1) + (1-t)(h'_2 - g'_2)] \right) = t \Re \left(\frac{z\phi'(z)}{\kappa(z)} p_1(z) \right) + (1-t) \Re \left(\frac{z\phi'(z)}{\kappa(z)} \right) \\ &= t \Re(p_1(z)) + (1-t) > 0. \end{aligned}$$

因此, 根据引理 2.7, 我们知道 $h_3 - g_3$ 是沿着实轴方向凸的. 更进一步地, 由引理 2.2, 我们断定 f_3 是单叶且沿着实轴方向凸的. $\square$

定理 3.1–3.5、推论 3.3 和文献 [16, 定理 3] 已经给出了两个调和单叶映射的凸组合沿着某个方向凸的一系列充分条件, 但是, 下面两个问题值得我们进一步去研究.

问题 3.1 两个调和单叶映射的凸组合单叶且沿着某个方向凸的充要条件是什么?

问题 3.2 两个调和单叶映射的凸组合单叶的充要条件是什么?

接下来考虑两个调和函数 f_1 和 f_2 的卷积 $f_1 * f_2$ 是单叶且沿着某个方向凸的充分条件.

定理 3.6 设 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件 $f_1 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^1(z/(1-z))$ 和 $f_2 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^1(\phi)$. 如果 $f_1 * f_2$ 是局部单叶的, 且存在函数 ϕ 满足条件

$$\phi(z) = \int_0^z \frac{1}{(1 + \zeta e^{i\theta_1})(1 + \zeta e^{i\theta_2})} d\zeta, \quad z \in \mathbb{D},$$

其中 $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, 则 $f_1 * f_2$ 是单叶且沿着实轴方向凸的.

证明 令

$$F_1 = (h_1 + g_1) * (h_2 - g_2) = h_1 * h_2 - h_1 * g_2 + g_1 * h_2 - g_1 * g_2,$$

$$F_2 = (h_1 - g_1) * (h_2 + g_2) = h_1 * h_2 + h_1 * g_2 - g_1 * h_2 - g_1 * g_2,$$

则

$$\frac{1}{2}(F_1 + F_2) = h_1 * h_2 - g_1 * g_2 = H - G,$$

其中 $H = h_1 * h_2$, $G = g_1 * g_2$. 容易发现 $f_1 * f_2 = H + \overline{G}$. 注意到

$$\begin{aligned} zF'_1(z) &= (h_1 + g_1) * z(h_2 - g_2)' = \frac{z}{1-z} * z(h_2 - g_2)' = z(h'_2 - g'_2) \\ &= z \left(\frac{h'_2 - g'_2}{h'_2 + g'_2} \right) (h'_2 + g'_2) = z \left(\frac{1 - \omega_2}{1 + \omega_2} \right) (h'_2 + g'_2) = z\phi'(z)p_2(z), \end{aligned}$$

其中

$$p_2(z) = \frac{1 - \omega_2}{1 + \omega_2} \quad (3.2)$$

满足条件 $\Re(p_2(z)) > 0$. 同样, 我们可以得到

$$\begin{aligned} zF'_2(z) &= z(h_1 - g_1)' * (h_2 + g_2) = \frac{z}{(1-z)^2} \left(\frac{h'_1 - g'_1}{h'_1 + g'_1} \right) * \phi(z) \\ &= \frac{z}{(1-z)^2} \left(\frac{1 - \omega_1}{1 + \omega_1} \right) * \phi(z) = \frac{z}{(1-z)^2} p_1(z) * \phi(z), \end{aligned}$$

其中 $p_1(z)$ 是由 (3.1) 给出的. 因此, 我们知道

$$z(F'_1(z) + F'_2(z)) = z\phi'(z)p_2(z) + \frac{z}{(1-z)^2}p_1(z) * \phi(z).$$

根据 $z\phi'(z) = \kappa(z)$, (2.4) 和引理 2.8, 我们有

$$\begin{aligned} \Re\left(\frac{zF'_1(z) + zF'_2(z)}{2\kappa(z)}\right) &= \frac{1}{2}\Re(p_2(z)) + \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\frac{z}{(1-z)^2}p_1(z) * \phi(z)}{z\phi'(z)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Re(p_2(z)) + \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\frac{z}{(1-z)^2}p_1(z) * \phi(z)}{\frac{z}{(1-z)^2} * \phi(z)}\right) > 0. \end{aligned}$$

再根据引理 2.7, 我们知道 $H - G$ 是沿着实轴方向凸的. 进一步地, 由于 $f_1 * f_2$ 是局部单叶的, 根据引理 2.2, 我们断定 $f_1 * f_2$ 是单叶且沿着实轴方向凸的. $\square$

注 3.3 定理 3.6 推广了文献 [4, 定理 5] 的结果.

利用定理 3.6 中类似的证明方法, 我们得到如下结论.

推论 3.4 设 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件 $f_1 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{-1}(z/(1-z))$ 和 $f_2 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{-1}(\phi)$. 如果 $f_1 * f_2$ 是局部单叶的, 且存在函数 ϕ 满足条件

$$\phi(z) = \int_0^z \frac{1}{(1 + \zeta e^{i\theta_1})(1 + \zeta e^{i\theta_2})} d\zeta, \quad z \in \mathbb{D},$$

其中 $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, 则 $f_1 * f_2$ 是单叶且沿着虚轴方向凸的.

定理 3.7 设 $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^0$ ($j = 1, 2$) 满足条件 $f_1 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{-1}(\frac{z}{1-z})$ 和 $f_2 \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^1(\frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z})$. 如果 $f_1 * f_2$ 是局部单叶的, 则 $f_1 * f_2$ 是单叶且沿着虚轴方向凸的.

证明 令

$$\begin{aligned} F_1 &= (h_1 - g_1) * (h_2 - g_2) = h_1 * h_2 - h_1 * g_2 - h_2 * g_1 + g_1 * g_2, \\ F_2 &= (h_1 + g_1) * (h_2 + g_2) = h_1 * h_2 + h_1 * g_2 + h_2 * g_1 + g_1 * g_2, \end{aligned}$$

我们得到

$$\frac{1}{2}(F_1 + F_2) = h_1 * h_2 + g_1 * g_2 = H + G,$$

其中 $H = h_1 * h_2$, $G = g_1 * g_2$. 假设 $\Psi(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$. 则

$$\begin{aligned} zF'_1(z) &= (h_1 - g_1) * z(h_2 - g_2)' = \frac{z}{1-z} * z(h_2 - g_2)' = z(h'_2 - g'_2) \\ &= z\left(\frac{h'_2 - g'_2}{h'_2 + g'_2}\right)\Psi'(z) = z\left(\frac{1 - \omega_2}{1 + \omega_2}\right)\Psi'(z) = \frac{z}{1-z^2}p_2(z), \end{aligned}$$

其中 $p_2(z)$ 是由 (3.2) 给出的, 且满足条件 $\Re(p_2(z)) > 0$. 同理, 我们有

$$\begin{aligned} zF'_2(z) &= z(h_1 + g_1)' * (h_2 + g_2) = z(h'_1 - g'_1)\left(\frac{h'_1 + g'_1}{h'_1 - g'_1}\right) * \Psi(z) \\ &= \frac{z}{(1-z)^2}\left(\frac{1 + \omega_1}{1 - \omega_1}\right) * \Psi(z) = \frac{z}{(1-z)^2}p_3(z) * \Psi(z), \end{aligned}$$

其中

$$p_3(z) = \frac{1 + \omega_1}{1 - \omega_1} \quad (3.3)$$

满足条件 $\Re(p_3(z)) > 0$. 因此, 我们有

$$z(F'_1(z) + F'_2(z)) = \frac{z}{1-z^2}p_2(z) + \frac{z}{(1-z)^2}p_3(z) * \Psi(z).$$

根据 $z\Psi'(z) = z/(1-z^2)$ 和引理 2.8, 我们知道

$$\begin{aligned}\Re\left((1-z^2)\frac{F'_1(z) + F'_2(z)}{2}\right) &= \frac{1}{2}\Re(p_2(z)) + \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\frac{z}{(1-z)^2}p_3(z) * \Psi(z)}{\frac{z}{1-z^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Re(p_2(z)) + \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\frac{z}{(1-z)^2}p_3(z) * \Psi(z)}{z\Psi'(z)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Re(p_2(z)) + \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\frac{z}{(1-z)^2}p_3(z) * \Psi(z)}{\frac{z}{(1-z)^2} * \Psi(z)}\right) > 0.\end{aligned}$$

在引理 2.4 中取 $\mu = \nu = \pi/2$, 我们知道 $H + G$ 是沿着虚轴方向凸的. 进一步地, 由于 $f_1 * f_2$ 是局部单叶的, 根据引理 2.2, 我们断定 $f_1 * f_2$ 是单叶且沿着虚轴方向凸的. $\square$

4 例子

本节给出 3 个例子来验证第 3 节所得到的结果.

例 4.1 设 $f_1 = h_1 + \overline{g_1}$, 其中 $h_1 + g_1 = \frac{1}{2}\frac{z}{1-z} + \frac{1}{4i}\log\frac{1+iz}{1-iz}$ 且解析伸张为 $\omega_1 = z$. 则

$$\begin{aligned}h_1 &= \frac{1}{8i}\log\frac{1+iz}{1-iz} + \frac{3}{8}\log(1+z) - \frac{1}{8}\log(1-z) - \frac{1}{8}\log(1+z^2) + \frac{1}{4}\frac{z}{1-z}, \\ g_1 &= \frac{1}{8i}\log\frac{1+iz}{1-iz} - \frac{3}{8}\log(1+z) + \frac{1}{8}\log(1-z) + \frac{1}{8}\log(1+z^2) + \frac{1}{4}\frac{z}{1-z}.\end{aligned}$$

设 $f_2 = h_2 + \overline{g_2}$, 其中

$$h_2 + g_2 = \frac{1}{2}\frac{z}{1-z} + \frac{1}{4i}\log\frac{1+iz}{1-iz}$$

且解析伸张为 $\omega_2 = -z^2$. 则

$$\begin{aligned}h_2 &= \frac{1}{8i}\log\frac{1+iz}{1-iz} + \frac{3}{16}\log\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{8}\frac{z}{1-z} + \frac{1}{8}\frac{2z-z^2}{(1-z)^2}, \\ g_2 &= \frac{1}{8i}\log\frac{1+iz}{1-iz} - \frac{3}{16}\log\frac{1+z}{1-z} + \frac{3}{8}\frac{z}{1-z} - \frac{1}{8}\frac{2z-z^2}{(1-z)^2}.\end{aligned}$$

根据推论 3.1, 当 $t = 1/2$ 时, 我们知道 $f_3 = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$ 是单叶且沿着虚轴方向凸的. 函数 f_j ($j = 1, 2, 3$) 的像域分别由图 1-3 给出.

图 1 f_1 的像域

图 2 f_2 的像域

图 3 $f_3 = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$ 的像域

例 4.2 设 $f_4 = h_4 + \overline{g_4}$, 其中 $h_4 - g_4 = \frac{1}{4} \log \frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{z}{(1-z)^2}$ 且解析伸张为 $\omega_4 = 1/2$. 则

$$h_4 = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{(1-z)^2}, \quad g_4 = \frac{1}{4} \log \frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{2-z}{(1-z)^2}.$$

再设 $f_5 = h_5 + \overline{g_5}$, 其中

$$h_5 - g_5 = \frac{1}{4} \log \frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{z}{(1-z)^2}$$

且解析伸张为 $\omega_5 = -z$, 我们知道

$$\begin{aligned} h_5 &= \frac{1}{8} \log \frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{4} \frac{z}{1+z} + \frac{1}{4} \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{4}, \\ g_5 &= -\frac{1}{8} \log \frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{4} \frac{z}{1+z} + \frac{1}{4} \frac{1-2z}{(1-z)^2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

根据推论 3.2, 当 $t = 1/3$ 时, 我们得到 $f_6 = \frac{1}{3}f_4 + \frac{2}{3}f_5$ 是沿着实轴方向凸的. 函数 f_j ($j = 4, 5, 6$) 的像域分别由图 4-6 给出.

例 4.3 在定理 3.6 中分别取 $\theta_1 = \pi/6$ 和 $\theta_2 = -\pi/6$, 我们知道

$$\phi = 2 \arctan(2z + \sqrt{3}) - \frac{2\pi}{3}.$$

设 $f_7 = h_7 + \overline{g_7}$, 其中 $h_7 + g_7 = \frac{z}{1-z}$ 且解析伸张为 $\omega_7 = -z$. 则

$$h_7 = \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}, \quad g_7 = \frac{-\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}.$$

再设 $f_8 = h_8 + \overline{g_8}$, 其中 $h_8 + g_8 = 2 \arctan(2z + \sqrt{3}) - \frac{2\pi}{3}$ 且解析伸张为 $\omega_8 = z^2$. 则

$$\begin{aligned} h_8 &= \frac{\sqrt{3}}{6} \log \frac{1 + \sqrt{3}z + z^2}{1 + z^2} + \arctan(2z + \sqrt{3}) - \frac{\pi}{3}, \\ g_8 &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \log \frac{1 + \sqrt{3}z + z^2}{1 + z^2} + \arctan(2z + \sqrt{3}) - \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

设 $f_9 = f_7 * f_8 = H + \overline{G}$, 我们有

$$\begin{aligned} H &= h_7 * h_8 = \frac{1}{2}(h_8 + zh_8') \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{(1+z^2)(1+\sqrt{3}z+z^2)} + \frac{\sqrt{3}}{6} \log \frac{1+\sqrt{3}z+z^2}{1+z^2} + \arctan(2z+\sqrt{3}) - \frac{\pi}{3} \right), \\ G &= g_7 * g_8 = \frac{1}{2}(g_8 - zg_8') \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{z^3}{(1+z^2)(1+\sqrt{3}z+z^2)} - \frac{\sqrt{3}}{6} \log \frac{1+\sqrt{3}z+z^2}{1+z^2} + \arctan(2z+\sqrt{3}) - \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

经过计算, 我们得到 $f_9 = f_7 * f_8$ 的解析伸张为 $\omega_9 = -z^2$. 所以, f_9 是局部单叶的. 根据定理 3.6, 我们知道

$$\begin{aligned} f_9 &= \Re(H + G) + i\Im(H - G) \\ &= \Re \left(\frac{1}{2} \frac{z(1-z^2)}{(1+z^2)(1+\sqrt{3}z+z^2)} + \arctan(2z+\sqrt{3}) - \frac{\pi}{3} \right) \\ &\quad + i\Im \left(\frac{1}{2} \frac{z}{1+\sqrt{3}z+z^2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \log \frac{1+\sqrt{3}z+z^2}{1+z^2} \right) \end{aligned}$$

是单叶且沿着实轴方向凸的. 函数 f_j ($j = 7, 8, 9$) 的像域分别由图 7-9 给出.

图 4 f_4 的像域 图 5 f_5 的像域 图 6 $f_6 = \frac{1}{3}f_4 + \frac{2}{3}f_5$ 的像域 图 7 f_7 的像域 图 8 f_8 的像域 图 9 $f_9 = f_7 * f_8$ 的像域

致谢 作者对审稿专家所提出的宝贵修改意见表示衷心感谢.

参考文献

- 1 Clunie J, Sheil-Small T. Harmonic univalent functions. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 1984, 9: 3–25
- 2 Duren P. *Harmonic Mappings in the Plane*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- 3 Chen H H. Some new results on planar harmonic mappings. *Sci China Math*, 2010, 53: 597–604
- 4 Dorff M. Convolutions of planar harmonic convex mappings. *Complex Var Elliptic Equ*, 2001, 45: 263–271
- 5 Dorff M. Anamorphosis, mapping problems, and harmonic univalent functions. In: *Explorations in Complex Analysis*. Washington, DC: Math Assoc of America Inc, 2012, 197–269
- 6 Dorff M, Nowak M, Wołoszkiewicz M. Convolutions of harmonic convex mappings. *Complex Var Elliptic Equ*, 2012, 57: 489–503
- 7 Li L L, Ponnusamy S. Solution to an open problem on convolutions of harmonic mappings. *Complex Var Elliptic Equ*, 2013, 58: 1647–1653
- 8 Liu Z H, Li Y C. The properties of a new subclass of harmonic univalent mappings. *Abstr Appl Anal*, 2013, Article ID: 794108
- 9 Chen H H. The Schwarz-Pick lemma for planar harmonic mappings. *Sci China Math*, 2011, 54: 1101–1118
- 10 Chen H H, Gauthier P M. The Landau theorem and Bloch theorem for planar harmonic and pluriharmonic mappings. *Proc Amer Math Soc*, 2011, 139: 583–595
- 11 Chen S L, Ponnusamy S, Wang X T. Integral means and coefficient estimates on planar harmonic mappings. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2012, 37: 1–11
- 12 Chen S L, Ponnusamy S, Wang X T. Covering and distortion theorems for planar harmonic univalent mappings. *Arch Math (Basel)*, 2013, 101: 285–291
- 13 Macgregor T H. The univalence of a linear combination of convex mappings. *J Lond Math Soc (2)*, 1969, 174: 210–212

- 14 Trimble S Y. The convex sum of convex functions. *Math Z*, 1969, 109: 112–114
- 15 Campbell D M. A survey of properties of the convex combination of univalent functions. *Rocky Mountain J Math*, 1975, 5: 475–492
- 16 Wang Z G, Liu Z H, Li Y C. On the linear combinations of harmonic univalent mappings. *J Math Anal Appl*, 2013, 400: 452–459
- 17 Nagpal S, Ravichandran V. Univalence and convexity in one direction of the convolution of harmonic mappings. *Complex Var Elliptic Equ*, in press, 2013
- 18 Royster W C, Ziegler M. Univalent functions convex in one direction. *Publ Math Debrecen*, 1976, 23: 339–345
- 19 Pommerenke C. On starlike and close-to-convex functions. *Proc Lond Math Soc* (3), 1963, 13: 290–304
- 20 Ruscheweyh S, Shiel-Small T. Hadamard products of schlicht functions and Polya-Schoenberg conjecture. *Comment Math Helv*, 1973, 48: 119–135

Construction of harmonic univalent mappings convex in one direction

WANG ZhiGang, SHI Lei & JIANG YuePing

Abstract We derive several sufficient conditions of the convex combinations and convolutions of harmonic univalent mappings to be univalent and convex in one direction, and partially solve an open problem posed by Dorff. The main theorems generalize and improve some earlier results. Finally, three examples are constructed to demonstrate the main results.

Keywords harmonic univalent mappings, shearing technique, convex combination, convolution

MSC(2010) 58E20, 30C99, 30C45

doi: 10.1360/012013-180