中国科学: 数学　2024 年　第 54 卷　第 6 期: 863～870
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
数学问题专栏

拟周期 Schrödinger 算子谱理论的 KAM 方法

尤建功

南开大学陈省身数学研究所, 天津 300071
E-mail: jyou@nankai.edu.cn

收稿日期: 2024-01-16; 接受日期: 2024-04-15; 网络出版日期: 2024-05-22
国家关键性变革项目 (批准号: 2020 YFA 0713300) 和国家自然科学基金 (批准号: 11871286) 资助项目

摘要　本文简要介绍拟周期 Schrödinger 算子谱理论的主要研究内容和最近发展比较快的几乎可约性方法. 特别地, 本文给出一些本领域未解决的问题.

关键词　拟周期　Schrödinger 算子　KAM 方法

MSC (2020) 主题分类　37C55, 37J40, 47A10

1　KAM 理论和 KAM 方法

Poincaré 的伟大发现之一是三体问题不可解, 拓扑意义下轨道的长时间行为不可预测. 20 世纪 50 年代, Kolmogorov [30] 发现在一定的条件下 (主要是解析性条件和非退化条件), 有限维近可积系统在测度意义下大多数轨道是规则的、可以预测的, 它们待在不变环面上作规则的周期或拟周期运动. Kolmogorov [30] 给出了清晰的证明思路, Arnold [1] 后来给出了证明细节及其在天体力学中的应用, Moser [31] 发现 Kolmogorov 假设的解析条件是技术性的, 只要充分光滑就行.

Poincaré 发现的是拓扑意义下的不稳定性, 而 Kolmogorov 对同样的系统发现的是概率意义下的稳定性, 这两种看似矛盾的发现都有重要的意义, 他们所描述的现象都是以前从未发现过的且具有普适性. Poincaré 的发现催生出混沌、初值敏感和蝴蝶效应等, 而 Kolmogorov 的发现有重要的应用价值 (例如, 人们不用太担心月亮会离开我们, 因为是小概率事件), 在数学和物理很多分支中都有重要的应用, 因此后人将其称为 KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) 理论. 同时为证明结论而发明的处理小除数共振的方法也是以前所没有的, 而小除数共振在动力学中是普遍存在的, 为了强调方法的重要性, 人们将其称为 KAM 方法. KAM 理论和方法都很重要, 在自然科学和数学中都有重要的应用, 因此被认为是 20 世纪最重要的数学成就之一.

KAM 理论和 KAM 方法都是发展的. 人们在不断探索 KAM 适应的边界. 首先是光滑性假设, Kolmogorov 要求解析, Moser 要求足够光滑, 事实上 Moser 对最简单的二维扭转映射假设了 333 阶可微. 后来人们开始降低可微性要求, 对二维扭转映射光滑性的要求不断被降低. 最终 Herman 将光滑

英文引用格式: You J G. The KAM method for the spectral theory of quasi-periodic Schrödinger operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 863–870, doi: 10.1360/SSM-2024-0013

　

性降为 $C^{3+\delta}$, 并对 $C^{3-\delta}$ 给出反例, 说明 C^3 是二维扭转映射 KAM 理论能够应用的边界. 对一般的近可积系统, 人们也发现了 KAM 理论所适用的边界 (与所保存环面频率的数论性质有关). 其次是非退化条件, Arnold 首先发现 Kolmogorov 的非退化条件可以适当放宽为等能量面非退化, 经过很多人的努力, 最终得到了最佳的非退化性, 即对解析系统只要频率不在任意一个超平面上即可 (对光滑系统只能给出充分条件而非充分必要条件), 参见文献 [13, 33, 36]. 至此, KAM 理论的应用边界基本上完全确定.

可积系统不但在常微分方程 (质点动力学) 中存在, 在偏微分方程 (流体力学) 中也存在, 因此考虑近可积偏微分方程中是否有 KAM 理论所描述的现象是一个自然和重要的问题. 发展型偏微分方程可看作是一个无穷维常微分方程. 如果不考虑偏微分方程的结构, 一般的无穷维常微分方程由于共振太多, 很容易给出反例说明 KAM 理论不再成立. 20 世纪 80 年代, Kuksin 和 Wayne 分别对一些重要的偏微分方程, 如波动方程、Schrödinger 方程和 KdV 方程, 结合这些方程自身的一些特殊的结构, 证明了 KAM 理论成立. 自此, KAM 偏微分方程成为一个活跃的研究领域, 参见文献 [10–12, 15, 32, 37] 及其参考文献等, 本文不作详细介绍.

2 拟 Schrödinger 周期算子谱理论

量子力学和量子物理的第一性原理是 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\partial_t\phi(t) = H\phi(t), \quad \phi(0) = \psi(x).$$

H 为 Hamilton 算符, 通常为空间 M 上动能算子加势能算子的形式 $H = \Delta + V$. 空间 M 可以是连续的, 如 $\mathbb{R}^n$, 这时方程写为 $\mathrm{i}\partial_t q(t,x) = \Delta q(t,x) + V(x)q(t,x)$; 空间也可以是离散的, 如 $\mathbb{Z}^n$, 这时方程写为 $\mathrm{i}\dot{q}_n(t) = \sum_{|n-m|=1}(q_n(t) - q_m(t)) + V_n q_n(t)$. 连续型和离散型 Schrödinger 方程都有重要的物理背景, 似乎离散型的背景更多一些.

我们自然得到 Schrödinger 算子

$$\begin{aligned} &H : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d), \\ &(Hu)(x) = \Delta u(x) + V(x)u(x), \quad u \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} &H : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d), \\ &(Hu)_n = \sum_{|n-m|=1}(u_n(t) - u_m(t)) + V_n u_n, \quad u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d). \end{aligned}$$

如果 Schrödinger 算子研究清楚了, 则 Schrödinger 方程也就清楚了. 如果量子系统是封闭的, 则对应的 Schrödinger 算子是自伴算子, 即位势为实值函数. 自伴算子是算子谱理论最重要的研究对象. 但自伴算子太庞杂, 泛泛的研究不可能深入, 得不到深刻有趣的结论. 所以现在的趋势是重点研究某些比较特殊的算子, 遴选的标准有两个: (1) 强烈的物理背景; (2) 丰富的数学内涵. 强烈的物理背景是希望数学上得出的结论对物理有启示作用. 丰富的数学内涵是指可以为数学提供新的问题、新的视角, 增进数学各分支的交融, 刺激数学方法的发展.

拟周期 Schrödinger 算子就是一个这样的例子. 拟周期 Schrödinger 算子是一类长程有序、短程无序的算子, 介于周期 (晶体) 与随机 (非晶体) 之间, 是量子霍尔效应、准晶、拓扑绝缘体和冷

原子调控的数学模型. 一维离散型拟周期 Schrödinger 算子如下定义. 设 $\Omega = \mathbb{T}^d$, $T : \theta \to \theta + \alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ 有理无关, 则 $(\mathbb{T}^d, T)$ 唯一遍历. 遍历测度为标准的 Haar 测度. 令 $V \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, $(H_\theta u)_n = u_{n+1} + u_{n-1} + V(n\alpha_1 + \theta_1, \ldots, n\alpha_d + \theta_d)u_n$. 注意到拟周期 Schrödinger 算子是一族算子, 通常 α 和 $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$ 为参数. 最重要的例子是几乎 Mathieu 算子 (AMO), 即 $V(\theta) = 2\lambda \cos 2\pi\theta$, 这时 $d = 1$, α 为无理数. 单频一维 Schrödinger 算子目前仍然是物理学家的重要研究对象. 人们可从几乎 Mathieu 算子中看到扩展态、束缚态、安德森局域化和相变等物理学家关心的现象. 物理学家还希望建立能够精确描述迁移率边界 (mobility edge) 的数学模型, 其中, GAA (general Aubrg-Audre) 模型是精确可解的具有单个迁移率边界的精确可解模型[16], 最近发现了具有任意多个迁移率边界的精确可解模型, 被称为马赛克模型[35]. 这两个模型目前是研究迁移率边界的主要模型. 它们所预测的物理现象既可以被严格数学证明 (参见文献 [34]), 也可以被实验验证 (参见文献 [17]).

从数学上看, 算子谱理论的主要研究对象是谱集和谱测度, 两者都有明确的物理意义: 谱集是粒子允许携带的能量, 谱测度基本可以决定 Schrödinger 方程解的演化. 对于拟周期 Schrödinger 算子, 谱集不依赖相位 $(\theta_1, \ldots, \theta_d)$, 但谱测度的奇异部分对相位非常敏感 (参见文献 [14]).

2.1 Cantor 谱

首先是谱集的拓扑结构. 自伴算子的谱集是实数上的闭子集, 而拟周期 Schrödinger 算子的谱集中没有孤立点, 人们主要关心谱集是否为 Cantor 集, 这与整数量子霍尔效应密切相关. Cantor 谱问题又称为十瓶马蒂尼酒问题 (Ten Martini Problem). Cantor 谱本质上是单频拟周期 Schrödinger 算子特有的谱现象. 通常情形下, 随机或多频拟周期 Schrödinger 算子的谱集不是 Cantor 集, 随机一定不是, 多频拟周期在小位势有可能是 Cantor 谱, 单频拟周期 Schrödinger 算子目前没发现非 Cantor 谱的例子. 目前最好的结果是 Avila 和 Jitomirskaya[7] 对几乎 Mathiu 算子这个特例证明了 Cantor 谱, 这是 Avila 获得菲尔兹奖的主要工作之一. 他们的证明用到了余弦位势的许多特殊性, 不适用于其他算子. 因此寻找方法对更一般的算子证明 Cantor 谱是这个领域目前最重要的问题之一. 我们有如下猜测:

猜测 1 解析位势单频 Schrödinger 算子在正 Lyapunov 指数区域一定是 Cantor 谱.

猜测 2 非常值解析位势单频 Schrödinger 算子一定是 Cantor 谱.

猜测 1 基本是正确的, 猜测 2 稍有些不确定性, 因为 Dubrovin 证明过可以存在非 Cantor 谱的拟周期 Schrödinger 算子, 但他的构造看不出是单频算子. 最新的进展是, Ge 等[19] 证明了猜测 2 对广义加速子为 1 的一类算子成立, 这类算子包括几乎 Mathieu 算子的扰动和解析类余弦位势.

事实上, Kac 提出的是比上述 Cantor 谱更难的问题, 称为 Dry Ten Martini 问题, 表述如下: 已知每一个谱缝隙有一个唯一的陈省身示性数作为标签, 但谱缝隙有时会塌陷, 从而某些标签的谱缝隙实际上不存在. Dry Ten Martini 问题是指对所有的陈省身示性数, 对应的谱缝隙都是开的. 这个问题对 $\lambda \neq 1$ (非临界情形) 已经被完全证明 (参见文献 [9]). 几乎 Mathiu 算子遗留下的是如下问题:

猜测 3 临界情形 $\lambda = 1$ 时所有谱缝隙都是打开的.

所有谱缝隙都打开不是几乎 Mathiu 算子所特有的性质, 大多数单频算子也应该具有这个性质, 但目前还没有一个一般的判据.

问题 1 给出 Cantor 谱或谱隙打开的判据.

注 1 在可约性区域, 谱隙打开的充要条件是约化为抛物阵.

2.2 局域化

对给定的 Schrödinger 算子, 可以如下定义谱测度: 任给 $\phi\in\ell^2(\mathbb{Z})$, $f\to\langle f(H_\theta)\phi,\phi\rangle$ 定义了 $C(\Sigma)$ 上的一个正有界线性泛函. 由 Riesz 定理可知, 存在一个实直线上的测度 $d\mu_\theta^\phi$, 其支集为算子的谱集, 使得 $\langle f(H_\theta)\phi,\phi\rangle=\int_R f(E)d\mu_\theta^\phi(E)$. 由 Lebesgue 分解定理, 可得 $\mu_\theta^\phi=\mu_{ac}+\mu_{sc}+\mu_{pp}$. 谱测度有明确的物理意义, 事实上, $\mathrm{i}\partial_t\phi(t)=H\phi(t)$, $\phi(0)=\phi$ 解的演化由谱测度决定. RAGE 定理表明, μ 为纯点谱当且仅当对于任意 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $\sum_{|n|\geqslant N}|\langle\delta_n,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}\phi\rangle|^2<\epsilon$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$ 成立. 这意味着粒子永远待在 $[-N,N]$ 中的概率是 $1-\epsilon$, 物理上称为束缚态; 而 μ 为纯连续谱当且仅当对于任意 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\sum_{|n|\geqslant N}|\langle\delta_n,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}\phi\rangle|^2\,dt<\epsilon$, 即大多数粒子长时间平均都会逃离 $[-N,N]$, 物理上称为扩展态; 而如果 μ 是纯绝对连续谱, 则对于 $N\in\mathbb{Z}_+$, 有 $\lim_{t\to\infty}\sum_{|n|\leqslant N}|\langle\delta_n,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}\phi\rangle|^2<\epsilon$. 以前物理学家认为奇异连续谱没有物理意义, 现在他们认为这对应于一种临界现象, 称之为临界态. 临界态目前在数学上和物理上并不完全清楚.

安德森 (Anderson) 发现对无序位势, 算子不仅具有纯点谱, 而且所有特征向量都是指数衰减的. 这种现象称为安德森局域化. 对于拟周期算子族, 局域化对相位非常敏感, 通常只对几乎所有的相位成立, 而不成立的相位是稠密的. 确定对具体什么样的相位算子有安德森局域化是一个很复杂的问题. 能给出局域化相位具体描述的局域化称为算术版本的安德森局域化.

因为关心所有初值解的演化, 所以需要下面不同层次的动力学局域化概念.

• 动力学局域化 $\sup_{t\in\mathbb{R}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^q|\langle\delta_n,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_\theta}\delta_\ell\rangle|<C_\theta<\infty$, $\forall\,q>0$, $\forall\,\ell$, 对于几乎所有 θ 成立. 我们指出安德森局域化并不总是蕴涵动力学局域化. 人们还进一步引入了平均意义下的局域化概念.

• 强动力学局域化 $\int_\Omega\sup_{t\in\mathbb{R}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^q|\langle\delta_n,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_\theta}\delta_\ell\rangle|d\theta<\infty$, $\forall\,q>0$, $\forall\,\ell$.

• 指数动力学局域化 $\int_\Omega\sup_{t\in\mathbb{R}}|\langle\delta_n,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_\theta}\delta_\ell\rangle|d\theta\leqslant C\mathrm{e}^{-\gamma|n-\ell|}$.

指数动力学局域化是最强的局域化. 局域化问题是拟周期 Schrödinger 算子的核心问题之一, 它与位势的光滑性和震荡性以及频率和相位的数论性质密切相关. 为此, 首先介绍频率和相位的数论描述. 如果存在 $\tau,\gamma>0$, 使得 $\|k\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}\geqslant\frac{\gamma}{|k|^\tau}$ 对于任意 $k\neq0$ 成立, 则 α 称为丢番图数. 满足上式的全体丢番图数记为 $DC(\gamma,\tau)$. 可以证明 $DC=\bigcup_{\gamma,\tau}DC(\gamma,\tau)$ 是全测度集. 非丢番图数称为刘维尔数, 全体刘维尔数组成的集合是 Lebesgue 零测集. 进一步地, 令 $\beta(\alpha):=\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln q_{n+1}}{q_n}$, 这里 $\frac{p_n}{q_n}$ 是 α 的连分数逼近. 易知 $DC\subset\{\alpha\mid\beta(\alpha)=0\}$. 如果存在 $\tau,\gamma>0$ 使得

$$\|2\theta-k\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}\geqslant\frac{\gamma}{|k|^\tau},\quad\forall\,k\in\mathbb{Z},\tag{2.1}$$

则称相位 θ 是相对于 α 丢番图的.

几乎 Mathieu 算子的局域化被研究得最清楚, 有下面的结论 (被称为 Aubry-André-Jitomirskaya 相变猜测):

(1) $\lambda<1$ (次临界情形), 这时算子为绝对连续谱 [2], 对应的 Schrödinger 方程的解是 ballistic [21] (指数局域初值的解的 H^1 范数随时间线性增长).

(2) $\lambda>1$ (超临界情形), 如果 $\ln\lambda>\beta$, 则对于任意满足 (2.1) 的 θ, 算子有安德森局域化 (参见文献 [8,22,23,26,29]); 如果 $\ln\lambda<\beta$, 则算子有纯奇异连续谱 [8].

(3) $\lambda=1$ (临界情形), 算子总是纯奇异连续谱 [27].

对超临界情形, 一定有一个 Lebesgue 零测集的相位, 算子为纯奇异连续谱. 对几乎 Mathieu 算子, 还可以证明更强的指数动力学局域化, 且指数衰减率为 $\ln\lambda$ [24,28]. 对几乎 Mathieu 算子, 目前还剩下

一个数学家和物理学家都关心的未解决问题:

猜测 4 对于临界情形, AMO 对应的 Schrödinger 方程解是扩散的, 即解的 H^1 范数为 $O(t^{\frac{1}{2}})$.

局域化不是几乎 Mathieu 算子特有的性质. 与 Cantor 谱类似, 人们进一步要问: 解析位势单频 Schrödinger 算子是否也有类似的 Aubry-André-Jitomirskaya 相变猜测? 然而, 在很长一段时间中, 人们甚至不知道如何来表述这个猜测. 因为几乎 Mathieu 算子中有一个参数 λ, 对一般的算子, 该用什么量替代 λ 呢? 这个问题直到最近, 才由 Avila [4] 给出答案. Avila 发现可以使用复化的 Lyapunov 指数这一动力系统不变量来替代 λ. 对一个给定的拟周期 Schrödinger 算子族, 其特征方程定义了一个动力系统, 可以对这族动力系统定义出复化的 Lyapunov 指数, 记为 $L_\varepsilon(E)$. Avila 通过复化的 Lyapunov 指数将解析位势单频 Schrödinger 算子的谱集分为 3 个部分:

(1) 次临界区域: $L_\varepsilon(E) = L(E) = 0$ 对充分小的 ε 成立;

(2) 临界区域: $L_\varepsilon(E) > L(E) = 0$ 对充分小的 ε 成立;

(3) 超临界区域: $L_\varepsilon(E) > L(E) > 0$ 对充分小的 ε 成立.

局域化只可能在超临界区域中发生, 而且频率需要一定的数论限制. 对一般的位势, 由于方法的限制, 目前主要对固定相位证明了安德森局域化对全测度的频率成立. 人们更关心固定频率安德森局域化对全测度的相位成立. 一个自然的猜测如下:

猜测 5 (1) 次临界区域只支撑绝对连续谱.

(2) 临界区域只支撑奇异连续谱.

(3) 在超临界情形, 在区域 $\{E : L(E) > \beta(\alpha)\}$ 上, 算子对几乎处处的相位具有安德森局域化; 在区域 $\{E : 0 < L(E) < \beta(\alpha)\}$ 上, 算子对所有的相位具有纯奇异连续谱.

该猜想的第 1 部分已经由 Avila 完全解决 (参见文献 [2,3,5]). 第 3 部分的后半部分由 Avila 等 [8] 完全解决. Ge 和 Jitomirskaya 1) 对广义加速子为 1 的算子完全证明了上述猜测的第 3 部分.

2.3 相变和迁移率边

对含有参数的算子 (对有物理背景的算子, 参数通常有明确的物理意义, 如几乎 Mathieu 算子中的 λ 和 α), 当参数变动时, 如果算子的特性 (对应于物理特性) 发生了本质性改变, 则称出现相变. 例如上面介绍的几乎 Mathieu 算子在 $\lambda = 1$ 处发生了从绝对连续谱到奇异谱的相变. 几乎 Mathieu 算子还有一个从奇异连续谱到安德森局域化的相变点, 这个相变点由 α 的数论性质决定. 关于几乎 Mathieu 算子的相变, 现在已经完全清楚 (参见文献 [8, 29]). 几乎 Mathieu 算子的特性只与算子中所含的参数有关而与谱 (能量) 无关, 这是十分罕见的, 这是几乎 Mathieu 算子的对称性造成的.

对一般的位势, 更常见的现象是谱的特性与谱本身有关, 即有些谱属于绝对连续谱的支集, 有些谱属于奇异连续谱的支集, 有些谱属于点谱的支集. 不同谱性谱点的分界点在物理上称为迁移率边.

对一般的单频解析位势, Avila [4] 的全局理论告诉我们, 通常情形下具有有限多个迁移率边, 对具体的、有物理背景的算子, 证明迁移率边的存在性, 进一步找出它们的具体位置是很困难的. 但对下面两个有重要物理背景的算子, 迁移率边已经完全清楚.

(1) GAA 模型:

$$u_{n+1} + u_{n-1} + 2\lambda \frac{\cos 2\pi(\theta + n\alpha)}{1 - b\cos 2\pi(\theta + n\alpha)} u_n = E u_n, \quad b \in (-1, 1), \quad \lambda > 0.$$

1) Ge L, Jitomirskaya S. Sharp phase transition for the type I operators. Preprint

(2) 拟周期马赛克 (quasiperiodic mosaic) 模型:

$$H_{\lambda,\alpha,\theta} = u_{n+1} + u_{n-1} + 2\lambda f_k(n)\cos 2\pi(\theta + 2n\alpha)u_n.$$

这里, 如果 $n \notin k\mathbb{Z}$, 则 $f_k(n) = 0$; 如果 $n \in k\mathbb{Z}$, 则 $f_k(n) = 1$.

这两个模型都是几乎 Mathieu 算子的变形, 都打破了几乎 Mathieu 算子的对称性. GAA 出现了一个迁移率边 [16]: $|E| < \frac{1}{\lambda}$ 为绝对连续谱, 而 $|E| > \frac{1}{\lambda}$ 为奇异谱. 而拟周期马赛克模型可以具有 $2k$ 个迁移率边 (例如, 当 $k = 2$ 时, $E = \pm\frac{1}{\lambda}$ 为迁移率边), 这是以前物理中没有被发现过的现象. 拟周期马赛克模型由中国数学家和物理学家合作建立 [35]. 现在这两个模型所预测的物理现象均被实验物理学家通过实验验证 [17], 被数学上严格证明 (参见文献 [34]).

找出迁移率边的关键是 Lyapunov 指数的计算, 对上面的两类算子, Avila 的全局理论提供了可能性. 对一般的 Schrödinger 算子精确计算出 Lyapunov 指数几乎是不可能的, 即使是给出 Lyapunov 指数的大致估计也是非常困难的.

3 可约性理论

我们已经介绍了拟周期 Schrödinger 算子谱理论的主要任务并提出了一些未解决问题, 下面介绍方法. 前人已经发展了许多方法, 这里只介绍最近发展得比较快的几乎可约性方法. $\mathbb{Z}$ 上的拟周期 Schrödinger 算子的特征方程 $u_{n+1}+u_{n-1}+V(n\alpha+\theta)u_n = Eu_n$ 等价于 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}^2$ 上的一族离散动力系统 (R_α, A_E): $(\theta, v) \mapsto (\theta+\alpha, A_E(\theta)v)$, 这里 $A_E(\theta) = \begin{pmatrix} E-V(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 这族动力系统称为 cocycle (连续版本就是我们熟知的非自治线性系统). 这是特殊的 Hamilton 系统. Dinaburg 和 Sinai 首先将 KAM 理论引入到拟周期 Schrödinger 算子谱理论的研究中. 由 KAM 理论可以直接得到, 当位势 V 光滑且充分小时, 对大多数的能量 E (测度意义下), 上述 cocycle 可以光滑共轭于椭圆型常值 cocycle (如果可以共轭于常值矩阵, 则称此 cocycle 可约). 后来, Eliasson 进一步证明了全测能量 E 的可约性和所有能量的几乎可约性 (可以由常值 cocycle 的共轭类无限逼近), 从而算子的所有广义特征向量或者有界或者不会增长得太快. 由此可以推导出拟周期 Schrödinger 算子当位势充分小且充分光滑时为纯绝对连续谱 (理论上证明准晶体可以导电). 他们的结论都假设了频率 α 满足丢番图条件, 这实际上也是 KAM 理论成立的必要条件. 但在拟周期 Schrödinger 算子的研究中很多问题不允许对频率加数论限制, 另外 KAM 理论所允许的扰动太小, 这两点限制了 KAM 理论在拟周期 Schrödinger 算子谱理论中的应用.

注意到拟周期 cocycle 有自己的特殊性, 可以合理推测需要假设的条件不必像 KAM 理论那么苛刻. 另外, 如果我们的目标是解决算子谱理论中的问题, 则也不需要 KAM 理论那么强的结论. 事实上, 我们需要的是对几乎所有能量的旋转可约性 (共轭于旋转 cocycle) 和所有能量的定量几乎可约性 (对逼近速度有控制), 这些原因使得对拟周期 cocycle 发展适用于所有频率 KAM 理论成为可能, 即去掉 KAM 理论中的丢番图条件. 文献 [6, 25, 38] 给出了这样的可约和几乎可约性定理, 这为拟周期 Schrödinger 算子谱理论的研究打开了新的大门.

拟周期系统的可约性也可以看作是周期系统 Floquet 理论的推广 (二者都是通过坐标变换将系统转化为常系数系统), 但拟周期系统的约化有一个障碍: 非一致双曲系统一定不是几乎可约的, 当然更不可能是可约的. Avila [4] 的全局理论将单频拟周期 cocycle 分为 3 类: 次临界、临界和超临界. 次临界对应绝对连续谱; 超临界通常对应安德森局域化 (还与频率的数论性质有关); 临界比较复杂, 对应于物理学家越来越重视的临界态. 最近证明的几乎可约性猜测 [3,5,18] 和各种定量几乎可约性定理基本解决了次临界区域的问题, 超临界区域可以通过 Aubry 对偶和定量几乎可约性理论来研究 (参见文

献 [20]). 几乎可约性理论解决了以前的方法解决不了的许多问题, 如非临界情形的 Dry Ten Martini 问题[9]、Aubry-André-Jitomirskaya 相变猜测等[8] 和高维算子的算术版本安德森局域化[22]. 关于几乎可约性, 我们提出下面两个猜测:

猜测 6 (高维 cocycle 的几乎可约性)　对解析高维矩阵 A, 如果存在 $\epsilon_0>0$, 使得对所有 $\epsilon<\epsilon_0$, $(\alpha, A(\theta+\mathrm{i}\epsilon))$ 的 Lyapunov 指数都等于 0, 则 $(\alpha, A(\theta))$ 是解析几乎可约的.

猜测 7 (多频 cocycle 的几乎可约性)　对解析矩阵 A, 如果存在 $\epsilon_0^1,\dots,\epsilon_0^d>0$, 使得对所有 $\epsilon^1<\epsilon_0^1,\dots,\epsilon^d<\epsilon_0^d$, $(\alpha, A(\theta_1+\mathrm{i}\epsilon^1,\dots,\theta_d+\mathrm{i}\epsilon^d))$ 的 Lyapunov 指数都等于 0, 则 $(\alpha, A(\theta))$ 是解析几乎可约的.

这两个猜测的解决将会对研究安德森局域化、长程算子和多频拟周期算子谱理论起到重要作用.

参考文献

1 Arnold V I. Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on the preservation of quasi periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. Usp Math USSR, 1963, 18: 13–40
2 Avila A. The absolutely continuous spectrum of the almost Mathieu operator. arXiv:0810.2965, 2008
3 Avila A. Almost reducibility and absolute continuity I. arXiv:1006.0704, 2010
4 Avila A. Global theory of one-frequency Schrödinger operators. Acta Math, 2015, 21: 1–54
5 Avila A. KAM, Lyapunov exponents, and the spectral dichotomy for typical one-frequency Schrödinger operators. arXiv:2307.11071, 2023
6 Avila A, Fayad B, Krikorian R. A KAM scheme for $SL(2,\mathbb{R})$ cocycles with Liouvillean frequencies. Geom Funct Anal, 2011, 21: 1001–1019
7 Avila A, Jitomirskaya S. The ten martini problem. Ann of Math (2), 2009, 170: 303–342
8 Avila A, You J, Zhou Q. Sharp phase transitions for the almost Mathieu operator. Duke Math J, 2017, 166: 2697–2718
9 Avila A, You J, Zhou Q. Dry ten martini problem in the non-critical case. arXiv:2306.16254, 2023
10 Baldi P, Berti M, Haus E, et al. Time quasi-periodic gravity water waves in finite depth. Invent Math, 2018, 214: 739–911
11 Berti M. KAM theory for partial differential equations. Anal Theory Appl, 2019, 35: 235–267
12 Berti M, Hassainia Z, Masmoudi N. Time quasi-periodic vortex patches of Euler equation in the plane. Invent Math, 2023, 233: 1279–1391
13 Cheng C Q, Sun Y S. Existence of KAM tori in degenerate Hamiltonian systems. J Differential Equations, 1994, 114: 288–335
14 Damanik D, Li X, You J, et al. Stability of spectral types of quasi-periodic Schrödinger operators with respect to perturbations by decaying potentials. Comm Math Phys, 2023, 403: 1069–1108
15 Eliasson L H, Kuksin S. KAM for the nonlinear Schrödinger equation. Ann of Math (2), 2010, 172: 371–435
16 Ganeshan S, Pixley J H, Das Sarma S. Nearest neighbor tight binding models with an exact mobility edge in one dimension. Phys Rev Lett, 2015, 114: 146601
17 Gao J, Khaymovich I M, Wang X, et al. Experimental probe of multi-mobility edges in quasiperiodic mosaic lattices. arXiv:2306.10829, 2023
18 Ge L. On the almost reducibility conjecture. Geom Funct Anal, 2024, 34: 32–59
19 Ge L, Jitomirskaya S, You J. Kotani theory, Puig's argument, and stability of the ten martini problem. arXiv:2308.09321, 2023
20 Ge L, Jitomirskaya S, You J, et al. Multiplicative Jensen's formula and quantitative global theory of one-frequency Schrödinger operators. arXiv:2306.16387, 2023
21 Ge L, Kachkovskiy I. Ballistic transport for one-dimensional quasiperiodic Schrödinger operators. Comm Pure Appl Math, 2023, 76: 2577–2612
22 Ge L, You J. Arithmetic version of Anderson localization via reducibility. Geom Funct Anal, 2020, 30: 1370–1401
23 Ge L, You J, Zhao X. The arithmetic version of the frequency transition conjecture: New proof and generalization. Peking Math J, 2022, 5: 349–364
24 Ge L, You J, Zhou Q. Exponential dynamical localization: Criterion and applications. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2023, 56: 91–126
25 Hou X, You J. Almost reducibility and non-perturbative reducibility of quasi-periodic linear systems. Invent Math,

2012, 190: 209–260
26 Jitomirskaya S. Metal-insulator transition for the almost Mathieu operator. Ann of Math (2), 1999, 150: 1159–1175
27 Jitomirskaya S. On point spectrum of critical almost Mathieu operators. Adv Math, 2021, 392: 107997
28 Jitomirskaya S, Krüger H, Liu W. Exact dynamical decay rate for the almost Mathieu operator. Math Res Lett, 2020, 27: 789–808
29 Jitomirskaya S, Liu W. Universal hierarchical structure of quasiperiodic eigenfunctions. Ann of Math (2), 2018, 187: 721–776
30 Kolmogorov A N. On the conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1954, 98: 527–530
31 Moser J. On invariant curves of area preserving mappings of an annulus. Nachr Akad Wiss Gött Math Phys, 1962, K1: 1–20
32 Procesi M. Stability and recursive solutions for Hamiltonian PDEs. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Helsinki: EMS Press, 2022, 3552–3574
33 Rüssmann H. Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems. Regul Chaotic Dyn, 2001, 6: 119–204
34 Wang Y C, Xia X, You J, et al. Exact mobility edges for 1D quasiperiodic models. Comm Math Phys, 2023, 401: 2521–2567
35 Wang Y C, Xia X, Zhang L, et al. One-dimensional quasiperiodic mosaic lattice with exact mobility edges. Phys Rev Lett, 2020, 125: 196604
36 Xu J, You J, Qiu Q. Invariant tori for nearly integrable Hamiltonian systems with degeneracy. Math Z, 1997, 226: 375–387
37 You J, Geng J S, Xu J X. KAM theory in finite and infinite dimensional spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 77–96 [尤建功, 耿建生, 徐君祥. 有限维和无穷维空间上的 KAM 理论. 中国科学: 数学, 2017, 47: 77–96]
38 You J, Zhou Q. Embedding of analytic quasi-periodic cocycles into analytic quasi-periodic linear systems and its applications. Comm Math Phys, 2013, 323: 975–1005

The KAM method for the spectral theory of quasi-periodic Schrödinger operators

Jiangong You

Abstract We give a brief introduction to the spectral theory of quasi-periodic Schrödinger operators, emphasizing particularly the recently developed KAM method and some unsolved problems.

Keywords quasi-periodic, Schrödinger operator, KAM method

MSC(2020) 37C55, 37J40, 47A10

doi: 10.1360/SSM-2024-0013