

经典 Mie 散射的数值计算方法改进

沈建琪, 刘 蕾

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘 要: 在光散射颗粒测量技术中 Mie 散射理论的计算非常重要。本文介绍一种改进的 Mie 散射数值计算方法, 通过对 Mie 散射系数进行重新构造, 找到参量来控制 Mie 计算的收敛和计算精度。对有关参量选用合适、稳定的递推关系进行计算。数值计算结果表明该方法具有快速、稳定的优点, 可以在极大的颗粒粒径和折射率范围内得到合理结果。

关键词: Mie 散射; 数值计算; 计算方法

中图分类号: O436.2 文献标识码: A

文章编号: 1008-5548(2005)04-0001-05

An Improved Algorithm of Classical Mie Scattering Calculation

SHEN Jianqi, LIU Lei

(School of Science, University of Shanghai for Science and Technology,
Shanghai 200093, China)

Abstract: The calculation of the classical Mie theory is very important for particle size analysis. In the work, an improved algorithm of Mie scattering calculation is presented. By re-constructing the Mie scattering coefficients, a parameter is found to control the convergence and the precision of the Mie calculation. The related parameters are calculated by means of the proper downward or upward recurrences respectively, which are proved to be very fast and stable. Numerical calculation shows that the algorithm is efficient, reliable and robust in an extremely wide range of particle size and refractive index.

Key words: Mie scattering; numerical calculation; algorithm

Mie 散射理论是光散射颗粒测量技术的基础, 在动力、冶金、化工、医药、环保、大气等多方面有着广泛应用^[1]。因此, 快速、准确和适用范围广的数值计算方法显得非常重要。几十年来, 国内外有许多学者对 Mie 散射的计算方法进行了研究并发表了不少论文。其中最重要的工作有 Dave^[2-4]、Lentz^[5] 和 Wiscombe^[6-7] 等。近十多年来, 国内学者也相继发表了一些研究成

果^[8-13]。然而, 有关 Mie 散射的计算还没有完全得到解决, 仍在继续发展之中^[14-16]。本文中对 Mie 散射数值计算方法进行讨论并提出一种改进算法。

1 Mie 理论简介

Mie 理论是均匀介质球形颗粒在单色平面波照射下远场散射的精确解, 其主要物理量有消光系数 k_{ext} 、散射系数 k_{sca} 、吸收系数 k_{abs} 、散射振幅函数 S_1 和 S_2 等

$$k_{\text{ext}} = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \text{Re}(a_n + b_n) \quad (1)$$

$$k_{\text{sca}} = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (2)$$

$$k_{\text{abs}} = k_{\text{ext}} - k_{\text{sca}} \quad (3)$$

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\theta) + b_n \tau_n(\theta)] \quad (4)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\theta) + b_n \pi_n(\theta)] \quad (5)$$

其中, 无量纲参数 $\alpha (= \pi x / \lambda)$ 由颗粒的粒径 x 和入射光波长 λ 定义, Mie 系数 a_n 和 b_n 与 α 和复折射率 $m = m_{\text{re}}(1 - i\eta)$ 有关

$$a_n = \frac{\psi_n(\alpha) \psi'_n(m\alpha) - m \psi'_n(\alpha) \psi_n(m\alpha)}{\xi_n(\alpha) \psi'_n(m\alpha) - m \xi'_n(\alpha) \psi_n(m\alpha)} \quad (6)$$

$$b_n = \frac{m \psi_n(\alpha) \psi'_n(m\alpha) - \psi'_n(\alpha) \psi_n(m\alpha)}{m \xi_n(\alpha) \psi'_n(m\alpha) - \xi'_n(\alpha) \psi_n(m\alpha)} \quad (7)$$

这里 $\psi_n(Z)$ 和 $\xi_n(Z)$ 是 Ricatti-Bessel 函数, 满足以下递推关系:

$$\psi_n(Z) = \frac{2n-1}{Z} \psi_{n-1}(Z) - \psi_{n+2}(Z) \quad (8)$$

$$\psi'_n(Z) = -\frac{n}{Z} \psi_n(Z) + \psi_{n-1}(Z) \quad (9)$$

$$\xi_n(Z) = \frac{2n-1}{Z} \xi_{n-1}(Z) - \xi_{n+2}(Z) \quad (10)$$

$$\xi'_n(Z) = -\frac{n}{Z} \xi_n(Z) + \xi_{n-1}(Z) \quad (11)$$

和初始值:

收稿日期: 2005-03-15

基金项目: 国家自然科学基金(编号: 5037604)和上海市曙光计划(编号: 04SG49)资助项目。

第一作者简介: 沈建琪(1965-)男, 博士, 教授。

$$\psi_{-1}(Z) = \cos Z \quad (12)$$

$$\psi_0(Z) = \sin Z \quad (13)$$

$$\xi_{-1}(Z) = \cos Z - i \sin Z \quad (14)$$

$$\xi_0(Z) = \sin Z + i \cos Z \quad (15)$$

参数 Z 可以是 α 或者 $m\alpha$ 。光散射强度函数 $i_1(\theta)$ 和 $i_2(\theta)$ 可以从散射振幅函数求得:

$$i_1(\theta) = |S_1(\theta)|^2 \quad (16)$$

$$i_2(\theta) = |S_2(\theta)|^2 \quad (17)$$

θ 为散射角。与散射光强度有关的函数 π_n 和 τ_n 满足如下递推关系和初始值

$$\tau_n = \pi_n \cos \theta - \pi'_n \sin^2 \theta \quad (18)$$

$$\pi_n = \frac{2n-1}{n-1} \pi_{n-1} \cos \theta - \frac{n}{n-1} \pi_{n-2} \quad (19)$$

$$\pi'_n = (2n-1) \pi_{n-1} + \pi'_{n-2} \quad (20)$$

$$\pi_0 = 0 \quad (21)$$

$$\pi_1 = 1 \quad (22)$$

$$\pi'_0 = \pi'_1 = 0 \quad (23)$$

由上可以看出 Mie 散射计算的核心是关于散射系数 a_n 和 b_n 的计算。在国内早先发表的计算方法中, 散射系数 a_n 和 b_n 由以上递推关系和初始值计算^[8-11] 这种方法称作向上递推法。

2 有关 Mie 理论计算的讨论

Mie 散射物理量由无穷多个不同阶项之和表示, 由于来自于高阶项的贡献很小, 而且随着阶数的升高不断减小, 在实际计算时, 可以只取前面 n_{stop} 项。对此 Wiscombe 给出了一个经验公式^[6]

$$n_{\text{stop}} = \alpha + c\alpha^{1.5} + b \quad (24)$$

其中, c 的范围在 4 和 4.05 之间, b 在 1 和 2 之间。实际计算时, b 和 c 的选取与颗粒粒径大小参数 α 有关。

递推公式(8)-(11)只在一定范围内是稳定的。例如 $\psi_n(Z)$ 在阶数 n 比较高时, 由于 $\psi_{n-1}(Z)$ 和 $\psi_{n-2}(Z)$ 都很小, 当 $\frac{2n-1}{Z}$ 的数量级为 1 时, 由公式(9)得到的 $\psi_n(Z)$ 就会由于有效位数大大减少出现很大的误差^[4]。数值计算发现, 递推公式(8)-(11)出现不稳定的阶数 n 与 Wiscombe 给出的 n_{stop} 基本一致^[6]。这就限制了 Mie 散射计算在某些情况下的应用 (如水中的气泡 $m = 0.75$)。

当计算吸收性大颗粒 ($\eta \neq 0, \alpha \gg 1$) 时, 公式

(12)-(15) 中自变量 $Z = m\alpha$ 的虚部非常大, 以至于会产生溢出, 从而限制了 Mie 散射的计算范围。

对此 Lentz 做了改进, 采用 $L_n(m\alpha) = \psi'_n(m\alpha) / \psi_n(m\alpha)$ 来计算 Mie 系数, 并发展了一种连分式算法^[5]。在 Lentz 的方法中, Mie 散射系数被表示成如下形式

$$a_n = \frac{\psi_n(\alpha) L_n(m\alpha) - m \psi'_n(\alpha)}{\xi_n(\alpha) L_n(m\alpha) - m \xi'_n(\alpha)} \quad (25)$$

$$b_n = \frac{m \psi_n(\alpha) L_n(m\alpha) - \psi'_n(\alpha)}{m \xi_n(\alpha) L_n(m\alpha) - \xi'_n(\alpha)} \quad (26)$$

这种方法的优点是克服了由于颗粒粒径与折射率虚部的乘积过大而产生的数据溢出和递推关系中的不稳定性, 从而使计算范围大大扩展。但同时带来的问题是计算速度大为降低。虽然计算机技术的发展使该问题得以部分缓解, 但在某些场合如实时测量中显然是不能容忍的。为此, 有些学者对 Lentz 的方法提出了改进, 建议采用向下递推法来计算 $L_n(Z)$ ^[2-4,14,17,18]

$$L_{n-1}(Z) = n/Z - \frac{1}{n/Z + L_n(Z)} \quad (27)$$

这里初始值 $L_{n^*}(Z)$ 的计算变得非常重要, 对此许多学者给出了各种不同的计算方法^[2,3,14,17-20]。在这些报道中, 初始值 $L_{n^*}(Z)$ 的选取带有某种随意性, 其相应的阶数 n^* 则采用 Wiscombe 的结果适当放大。例如有的学者建议用 $L_{n^*}(Z) = 0 + i0$, 其阶数 n^* 取 $n_{\text{stop}} + 15$ 。然而进一步的研究发现, 简单地从这个初始值开始并不能得到完全正确的结果, 比较合理的方案是先采用 Lentz 的连分式方法计算 $L_{n^*}(Z)$ 然后再用向下递推法依次计算低阶项 $L_n(Z)$ ^[6]。

由上讨论可知, Mie 理论数值计算的关键首先是截止阶数 n_{stop} 的合理选取。通常情况下截止阶数 n_{stop} 并不是取得越大越好, 这与递推关系的选用有关。需要指出的是, 超出 n_{stop} 范围的计算有时会由于迭代不稳定而导致计算失败。尽管 Wiscombe 给出了 n_{stop} 的经验公式, 但参量 b 和 c 是分段选择的并且缺乏直观性。其次是递推关系的选择, 选择不同的递推关系决定了算法的适用范围和运行效率。一个好的算法应该尽可能地做到有效、精确并且不受颗粒粒径和折射率范围的限制。

3 改进 Mie 散射数值计算算法

散射系数表达式(25)-(26)可进一步表示为

$$a_n = A_n(\alpha) \cdot T_{a_n}(m, \alpha) \quad (28)$$

$$b_n = A_n(\alpha) \cdot T_{b_n}(m, \alpha) \quad (29)$$

其中

$$T_{a_n}(m, \alpha) = \frac{L_n(m\alpha)/m - L_n(\alpha)}{L_n(m\alpha)/m - B_n(\alpha)} \quad (30)$$

$$T_{b_n}(m, \alpha) = \frac{mL_n(m\alpha) - L_n(\alpha)}{mL_n(m\alpha) - B_n(\alpha)} \quad (31)$$

$A_n(\alpha)$ 和 $B_n(\alpha)$ 为

$$A_n(\alpha) = \psi_n(\alpha) \xi_n(\alpha) \quad (32)$$

$$B_n(\alpha) = \xi'_n(\alpha) \xi_n(\alpha) \quad (33)$$

由此, 散射系数的计算归结于 $L_n(\alpha)$ 、 $L_n(m\alpha)$ 、 $A_n(\alpha)$ 和 $B_n(\alpha)$ 的计算。 $L_n(\alpha)$ 和 $L_n(m\alpha)$ 的计算可采用向下递推公式(27)实现, 其初始值 $L_{n^*}(Z)$ 和 $L_{n^*}(mZ)$ 可由 Lentz 连分式方法得到。由于 $L_n(Z)$ 的收敛速度与 Z 和 n 有关, 当 $n \gg |Z|$ 时, $L_n(Z)$ 收敛非常快^[6]。因此, 初始值 $L_{n^*}(\alpha)$ 和 $L_{n^*}(m\alpha)$ 的计算不会对整个程序的计算速度产生很大影响。

由递推公式(9)~(11)及 $A_n(\alpha)$ 、 $B_n(\alpha)$ 和 $L_n(\alpha)$ 的定义可得到 $A_n(\alpha)$ 和 $B_n(\alpha)$ 的向上递推关系式及其初始值

$$A_n(\alpha) = A_{n-1}(\alpha) \cdot \frac{B_n(\alpha) + n/\alpha}{L_n(\alpha) + n/\alpha} \quad (34)$$

$$B_n(\alpha) = -n/\alpha + \frac{1}{n/\alpha - B_{n-1}(\alpha)} \quad (35)$$

$$A_1(\alpha) = \frac{1}{1 + j \frac{\cos \alpha + \alpha \sin \alpha}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}} \quad (36)$$

$$B_0(\alpha) = -i \quad (37)$$

对中间计算结果 $|A_n(\alpha)|$ 、 $|T_{a_n}(m, \alpha)|$ 和 $|T_{b_n}(m, \alpha)|$ 的分析表明: 它们的低阶项呈现剧烈振荡; 当阶数 n 达到一定值以后, $|T_{a_n}(m, \alpha)|$ 和 $|T_{b_n}(m, \alpha)|$ 二项的数值变化趋于平缓, 而 $|A_n(\alpha)|$ 的数值随着阶数 n 的增大迅速减小 (如图 1 所示)。因此, 截止阶数 n_{stop} 可由 $|A_n(\alpha)|$ 的这种特性决定。对 $\alpha \in (0, 100\,000)$ 范围内的数值计算分析得到

$$n_{\text{stop}} = \begin{cases} \alpha + 7.5\alpha^{0.34} + 2 & |A_n(\alpha)| < 1e-18 \\ \alpha + 6\alpha^{1/3} + 2 & |A_n(\alpha)| < 1e-12 \\ \alpha + 4\alpha^{1/3} + 1 & |A_n(\alpha)| < 1e-6 \\ \alpha + 4.88\alpha^{0.31} & |A_n(\alpha)| < 1e-5 \end{cases} \quad (38)$$

这与 W iscombe 给出的结论基本符合。截止阶数 n_{stop} 的选取可根据实际对计算精度的要求来确定。

向下递推计算 $L_n(\alpha)$ 和 $L_n(m\alpha)$ 的出发点 n^* 取与 n_{stop} 相同的数值。

计算结果还表明: 向下递推公式(27)和向上递推公式(34, 35)在整个计算范围内始终是稳定的。因此, 本文中提出的 Mie 散射计算方法在颗粒粒径和折射率方面没有受到任何限制。

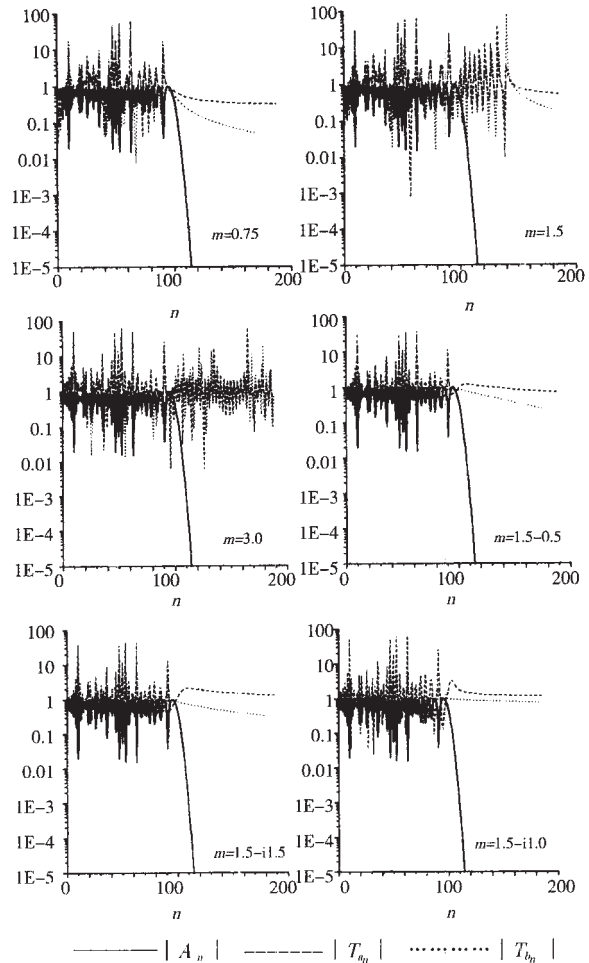


图 1 不同折射率数值下, $|A_n(\alpha)|$ 、 $|T_{a_n}(m, \alpha)|$ 和 $|T_{b_n}(m, \alpha)|$ 的数值计算结果 ($\alpha = 100$)

4 计算实例

用 C++ 语言编程在 2.66 GHz P4 计算机上计算, 截止阶数取 $n_{\text{stop}} = \alpha + 7.5\alpha^{0.34} + 2$ 。表 1 和表 2 给出了部分数值计算结果。表 1 中所示结果与 W iscombe (M IEV0) 和 Du (M IECPP) 所得到的结果完全一致^[7, 12]。表 2 中的结果与 Dave (Q BM ie) [19] 的结果相符合^[9]。

表 1 消光系数 k_{ext} 和散射系数 k_{sca} 的计算结果比较

例	m	A	k_{ext}		k_{sca}	
			M IEVO M IECPP	本文中方法	M IEVO M IECPP	本文中方法
(1)	0.75	0.099	7.417 86e-5	7.417 86e-5	7.417 86e-5	7.417 86e-5
(2)	0.75	0.101	8.033 54e-6	8.033 54e-6	8.033 54e-6	8.033 54e-6
(3)	0.75	10	2.232 26	2.232 26	2.232 26	2.232 26
(4)	0.75	1 000	1.997 91	1.997 91	1.997 91	1.997 91
(5)	1.33- 1e-5	100	2.101 32	2.101 32	2.096 59	2.096 59
(6)	1.33- 1e-5	10 000	2.004 09	2.004 09	1.723 86	1.723 86
(7)	1.5- i	0.055	0.101 491	0.101 491	1.131 69e-5	1.131 69e-5
(8)	1.5- i	0.056	0.103 347	0.103 347	1.216 31e-5	1.216 31e-5
(9)	1.5- i	100	2.097 50	2.097 50	1.283 70	1.283 70
(10)	1.5- i	1 000	2.004 37	2.004 37	1.236 57	1.236 57
(11)	10- 10	1	2.532 99	2.532 99	2.049 41	2.049 41
(12)	10- 10	100	2.071 12	2.071 12	1.836 79	1.836 79
(13)	10- 10	10 000	2.005 91	2.005 91	1.795 39	1.795 39

表 2 消光系数 k_{ext} 和吸收系数 k_{abs} 的计算结果比较

例	m	α	k_{ext}		k_{abs}	
			DBM IE	本文中方法	DBM IE	本文中方法
(14)	1.342	1 570.796 3	2.012 94	2.012 945	0	0
(15)	1.50	25 000	2.002 35	2.002 352	0	0
(16)	1.342- i 0.1	1 570.796 3	2.014 45	2.014 449	0.933 54	0.933 544
(17)	1.50- i 0.1	25 000	2.002 32	2.002 323	0.906 41	0.906 409

表 3 给出了相应计算所需的 CPU 时间。其中向上递推法中迭代方式采用递推公式(8)~(11)和初始条件(12)~(15) Lenz 连分式法指 $L_n(m\alpha)$ 的计算采用 Lenz 提出的连分式计算,其余参数的计算与向上递推法相同,散射系数的计算采用公式(25~26);本文中方法的计算由公式(27~38)完成。

除了例(4)、(10)、(12)、(13)、(16)和(17)外,用不同方法计算得到的结果相互一致。例(4)是折射率小于 1 的情况,由前面讨论可知,计算 $\psi_n(z)$ 的向上递推关系在 $n = Z + \alpha z^{1/\beta} + b$ 处开始失败。因此当折射率小于 1 时, $\psi_n(m\alpha)$ 在 $n < n_{\text{stop}}$ 时已经得不到可靠的值。例(10)、(12)、(13)、(16)和(17)的情况颗粒粒径较大,而且均为吸收性颗粒,因此 $\psi'_n(m\alpha)$ 和 $\psi_n(m\alpha)$ 在迭代过程中产生溢出导致计算失败。比较 3 种计算方法所需 CPU 时间发现,向上递推法运算最快,本文中介绍的方法所需计算时间与向上递推法基本一致。Lenz 连分式法最费时,对于较大的

非吸收性颗粒,Lenz 连分式法所需的计算时间是其他两种方法的几百倍甚至几千倍(见表 3 中例(15))。从计算的精度和适用范围来说,本文中介绍的方法与 Lenz 连分式法基本一致。在很大范围内改变颗粒粒径和折射率参数进行大量计算,没有发现失败的情况。

本文中介绍的 Mie 散射数值算法兼顾了运算速度、计算精度及可计算的颗粒粒径与折射率范围这 3 个方面。

5 结 论

本文中提出了一种改进的 Mie 散射数值计算方法,采用 $A_n(\alpha)$ 、 $B_n(\alpha)$ 、 $L_n(\alpha)$ 和 $L_n(m\alpha)$ 来重构散射系数 a_n 和 b_n (由公式(28)~(37)表示)。由此, Mie 散射的级数收敛问题归结到对 $A_n(\alpha)$ 数值大小的判断。文中给出了几个不同精度要求所对应的截

表 3 不同计算方法所需 CPU 时间比较

例	向上递推法	Lentz 连分式法	本文中方法
(1)	9.28e-6	1.95e-5	1.55e-5
(2)	9.45e-6	1.91e-5	1.58e-5
(3)	3.70e-5	2.29e-4	5.73e-5
(4)*	1.93e-3	2.51e-1	1.80e-3
(5)	2.40e-4	1.04e-2	2.60e-4
(6)	1.88e-2	6.51e+1	1.87e-2
(7)	1.32e-5	2.36e-5	1.39e-5
(8)	1.33e-5	2.28e-5	1.41e-5
(9)	2.47e-4	6.37e-3	2.55e-4
(10)*	-	1.05e-1	1.80e-3
(11)	2.04e-5	1.78e-4	3.41e-5
(12)*	-	2.14e-2	3.35e-4
(13)*	-	6.80e+0	1.71e-2
(14)	2.99e-3	1.65e+0	3.03e-3
(15)	4.72e-2	4.66e+2	4.87e-2
(16)*	-	5.88e-1	2.80e-3
(17)*	-	2.07e+1	4.14e-2

* 例(4)向上递推法计算得到的结果与其他两种方法计算得到的结果稍有差异,例(10)、(12)、(13)、(16)和(17)向上递推法计算失败。

止阶阶数 n_{stop} 的选取方法。对 $A_n(\alpha)$ 、 $B_n(\alpha)$ 、 $L_n(\alpha)$ 和 $L_n(m\alpha)$ 的计算根据各自的规律分别选用相应的递推关系。 $L_n(\alpha)$ 和 $L_n(m\alpha)$ 的计算采用向下递推法,其初始值由 Lentz 的连分式方法得到; $A_n(\alpha)$ 和 $B_n(\alpha)$ 由向上递推法计算。数值计算表明,这些递推关系在整个计算范围内是稳定的,所得结果与前人的工作相符。该方法兼顾了可计算范围、运算速度和精度这几个方面。数值计算表明:可运算范围没有受到颗粒粒径和折射率参数的限制;运算速度快,即使在颗粒粒径参数 α 达到数万的情况下仍然能在几十毫秒内完成计算并得到准确结果。

参考文献:

[1] 王乃宁,蔡小舒,郑刚,等.颗粒粒径的光学测量及应用[M].北京:原子能出版社,2000.
WANG Naining, CAI Xiaoshu, ZHENG Gang, et al. Optical Particle Sizing and Its Applications[M]. Beijing: Atomic Energy Press, 2000. (in Chinese)

[2] Dave JV. Subroutines for computing the parameters of the electromagnetic radiation scattered by a sphere[R]. Report 320-3237. IBM Scientific Center, Palo Alto, Calif., 1968.

[3] Dave JV. Scattering of electromagnetic radiation by a large, absorbing sphere[J]. IBM J Res Dev, 1969, 13: 302-313.

[4] Dave JV. Coefficients of the Legendre and Fourier series for the scattering functions of spherical particles[J]. Appl Opt, 1970, 9: 1888-1896.

[5] Lentz W J. Generating Bessel functions in Mie scattering calculations using continued fractions[J]. Appl Opt, 1976, 15: 668-671.

[6] Wiscombe W J. Improved Mie scattering algorithms[J]. Appl Opt, 1980, 19: 1505-1509.

[7] Wiscombe W J. NoPMOM version of MIEV0[Z], 1992.

[8] 顾冠亮,王乃宁.有关光散射物理量的数值计算[J].上海机械学院学报,1984,5(4):21-32.
GU Guanliang, WANG Naining. The method of numerical calculation of different physical quantities about scattering by small particles[J]. J Shanghai Institute of Mechanical Engineering, 1984, 4: 21-32. (in Chinese)

[9] 郑刚,蔡小舒,王乃宁. Mie 散射的数值计算[J].应用激光,1992,12(5):221-223.
ZHENG Gang, CAI Xiaoshu, ZHENG Gang. Numerical algorithms of Mie scattering[J]. Applied Lasers, 1992, 12(5): 25-27. (in Chinese)

[10] 王少清,任中京,张希明,等. Mie 散射系数的新算法[J].激光杂志,1997,18(3):9-22.
WANG Shaoqing, REN Zhongjing, ZHANG Ximing, et al. New algorithm of Mie scattering parameters[J]. Laser Journal, 1997, 18(3): 9-22. (in Chinese)

[11] 杨晔,张镇西,蒋大宗. Mie 散射物理量的数值计算[J].应用光学,1997,18(4):17-19.
YANG Ye, ZHANG Zhenxi, JIANG Dazong. Numerical calculation of Mie scattering[J]. J Appl Optics, 1997, 18(4): 17-19. (in Chinese)

[12] 王式民,朱震,叶茂,等.光散射粒度测量中 Mie 理论两种改进的数值计算方法[J].计量学报,1999,20(4):279-285.
WANG Shimin, ZHU Zhen, YE Mao, et al. Two improved numerical algorithms of Mie theory in the particle sizing by light scattering method[J]. Acta Metrologica Sinica, 1999, 20(4): 279-285. (in Chinese)

[13] 朱震,叶茂,陆勇,等.光散射粒度测量中 Mie 理论的高精度算法[J].光电子·激光,1999,10(2):135-138.
ZHU Zhen, YE Mao, LU Yong, et al. High precise algorithm of Mie scattering in the particle sizing by light scattering[J]. J Optoelectronics Laser, 1999, 10(2): 135-138. (in Chinese)

[14] Du H. Mie-scattering calculation[J]. Appl Opt, 2004, 43: 1951-1956.

[15] Grainger R G, Lucas J, Thomas G E, et al. Calculation of Mie derivatives[J]. Appl Opt, 2004, 43: 5386-5393.

[16] SHEN Jianqi, LIU Tingyi, PAN Yongle. A simple algorithm of Mie scattering calculation (unpublished work)

[17] Kattawar G W, Plass G N. Electromagnetic scattering from absorbing spheres[J]. Appl Opt, 1967: 1377-1382.

[18] Jones A R. Electromagnetic scattering and its applications[M]. London and New Jersey, 1981.

[19] Wang R T, van de Hulst H C. Rainbows: Mie computations and the airy approximation[J]. Appl Opt, 1991, 30: 106-117.

[20] Kai L, Massoli P. Scattering of electromagnetic plane wave by radially inhomogeneous spheres: a finely stratified sphere model[J]. Appl Opt, 1994, 33: 501-511.