航天器轨道追逃微分对策研究综述

罗亚中*, 李振瑜, 祝海

国防科技大学空天科学学院, 长沙 410073

* E-mail: luoyz@nudt.edu.cn

收稿日期: 2019-05-06; 接受日期: 2019-08-05; 网络版发表日期: 2020-05-11

国家自然科学基金(批准号: 11572345)资助项目

摘要 随着空间交会对接和操控技术的不断发展, 航天器轨道追逃博弈研究日益受到重视, 微分对策是其中重要的研究手段, 本文对基于微分对策的航天器轨道追逃研究现状进行了评述. 首先介绍了航天器追逃微分对策的基本问题形式, 梳理了微分对策理论的发展脉络和当前研究热点. 进一步分别对航天器轨道追逃定性微分对策、线性二次型微分对策、终端时间自由微分对策、不完全和不完美信息微分对策、脉冲推力微分对策的问题模型、求解方法和一般性结论进行了总结. 最后展望了航天器轨道追逃博弈的后续研究方向.

关键词 航天器追逃, 微分对策, 博弈, 综述

1 引言

近年来, 空间交会对接技术逐渐走向成熟, 并朝着自主、自动、兼容非合作目标、兼容机动目标等方向发展. 美国的试验卫星系列(experimental satellite system, XSS)^[1]、自主交会技术验证(demonstration rendezvous of autonomous technology, DART)^[2]、轨道快车(orbit express)^[3]、微卫星技术实验(MixTEx)^[4]等均实施了自主交会试验. 2010年6月瑞典发射成功Prisma卫星以验证其在自主编队飞行和交会方面的技术突破^[5]. 2011年美国启动了一项名为“凤凰计划”的研究项目, 旨在通过接近退役报废卫星, 拆除其天线并进行回收利用. 2014年“凤凰计划”已经完成第一阶段任

务, 在空间机器人和卫星构型研究上取得重要进展^[6]. 2017年我国天舟一号货运飞船顺利完成了与天宫二号空间实验室的自主快速交会对接试验^[7]. 2018年英国首次在太空试验了利用飞网清除空间碎片的技术^[1]. 2019年, 俄罗斯“进步”MS-11货运飞船创下了与国际空间站的超快速交会对接的新纪录^[2]. 特别地, 当交会中两航天器均具有自主机动、自主决策的能力时, 空间交会对接就会发展成为空间航天器间的追逃博弈问题^[8]. 该问题实质上是一个双边控制的连续动态对抗的问题, 博弈双方具有相互冲突的目标, 追踪航天器旨在接近逃逸航天器, 而逃逸航天器则努力摆脱接近. 与传统的空间交会问题相比, 航天器追逃博弈控制需要考虑博弈双方的控制, 其问题维数增加了1倍, 还需

1) 史雨轩. 英国卫星实验, 用网捕获太空垃圾. <http://www.ccnovel.com/guojij/2018-09-21/124638.html>, 2018-09-21

2) 张晓. 俄飞船创下太空“快递”新纪录. <http://tech.huanqiu.com/aerospace/2019-04/14696040.html?agt=15438>, 2019-04-05

引用格式: 罗亚中, 李振瑜, 祝海. 航天器轨道追逃微分对策研究综述. 中国科学: 技术科学, 2020, 50: 1533–1545

Luo Y Z, Li Z Y, Zhu H. Survey on spacecraft orbital pursuit-evasion differential games (in Chinese). Sci Sin Tech, 2020, 50: 1533–1545, doi: 10.1360/SST-2019-0174

要考虑双方信息条件, 其博弈模型也比较复杂. 因此, 亟待已在有的交会对接控制理论方法基础上发展新的研究手段.

在当前对追逃博弈问题的研究方法中, 以微分对策理论居多. 经典的制导控制理论^[9]、现代的非线性制导理论^[10]和最优制导理论^[11]也可应用于航天器追逃博弈问题中, 但这些理论受限于逃逸航天器机动能力较强和机动规律多变的情况^[12]. 微分对策理论基于双边最优控制理论建立追逃博弈的模型, 对追逃两航天器都做出了机动假设, 考虑了追逃过程中信息的完全程度和对称程度, 适合处理连续时间动态博弈, 其追逃模型还可拓展到多人博弈中. 因此, 本文将重点围绕微分对策理论, 对航天器追逃博弈问题的研究现状作一概述, 对其未来发展方向提供一些建议.

2 追逃博弈问题形式

追逃微分对策总体上可分为定量微分对策和定性微分对策两种^[13], 下面分别给出其基本问题形式.

2.1 定量微分对策基本形式

考虑一般的二人定量追逃博弈, 双方各自寻求最优的控制量 $\mathbf{u}_P(t)$ 和 $\mathbf{u}_E(t)$ 来最小化各自的支付函数 J_P 和 J_E (通常与时间、距离、能量等参数相关, 此处使用Bolza性能指标^[14]):

$$J_i = \int_{t_0}^{t_f} L_i(\mathbf{x}_E(t), \mathbf{x}_P(t), \mathbf{u}_E(t), \mathbf{u}_P(t), t) dt + \Phi_i(\mathbf{x}_E(t_f), \mathbf{x}_P(t_f), t_f), i = P, E, \quad (1)$$

式中, 下标P和E分别表示追踪器(pursuer)和逃逸器(evader), Φ_i 为末值型性能指标函数, L_i 为积分型性能指标函数. 从初始时刻 t_0 到结束时刻 t_f , 状态变量 $\mathbf{x}_P$ 和 $\mathbf{x}_E$ 满足动力学模型约束:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_P, \mathbf{u}_P, t), \quad \mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{x}_{i0} \quad i = P, E. \quad (2)$$

博弈的结束时间 t_f 可以给定, 也可以自由. 对于 t_f 自由的情况, 给定下述终端目标集:

$$A = \{ (\mathbf{x}_P(t_f), \mathbf{x}_E(t_f)) \mid \psi(t_f, \mathbf{x}_P(t_f), \mathbf{x}_E(t_f)) \leq 0 \}. \quad (3)$$

在状态量第一次达到终端目标集时博弈结束:

$$t_f = \min \{ t \in R^+ \mid (t, \mathbf{x}_P(t), \mathbf{x}_E(t)) \in A \}. \quad (4)$$

如果存在一组机动策略 $\mathbf{u}_P^*$ 和 $\mathbf{u}_E^*$, 对于追逃双方任

意的机动策略 $\mathbf{u}_P$ 和 $\mathbf{u}_E$, 都有下述不等式成立:

$$\begin{aligned} J_E(\mathbf{u}_P^*, \mathbf{u}_E) &\geq J_E(\mathbf{u}_P^*, \mathbf{u}_E^*), \\ J_P(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E^*) &\leq J_P(\mathbf{u}_P^*, \mathbf{u}_E^*), \end{aligned} \quad (5)$$

那么就说, $\mathbf{u}_P^*$ 和 $\mathbf{u}_E^*$ 就构成了博弈的纳什均衡^[15]. 式中, $\mathbf{u}_P^*$ 和 $\mathbf{u}_E^*$ 分别代表追踪器和目标器在均衡点的机动策略. 在这个均衡点上, 双方的策略都达到了各自的单边最优, 即如果一方P(E)采用了均衡策略 $\mathbf{u}_P(\mathbf{u}_E)$, 另一方E(P)只有采用均衡策略 $\mathbf{u}_E(\mathbf{u}_P)$ 才是最优的, 任意偏离其 $\mathbf{u}_E(\mathbf{u}_P)$ 的策略都会使支付函数增大. 若 $J_P + J_E \equiv 0$, 该种对策称作零和微分对策^[13], 此时博弈的纳什均衡点也是支付泛函的鞍点.

求解上述微分对策通常有两种方法. 一是根据动态规划原理, 构造对策的哈密顿-雅可比-贝尔曼(Hamilton-Jacobi-Bellman, HJB)偏微分方程^[16]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_i}{\partial t} &= \min_{\mathbf{u}_i} \left\{ L_i(\mathbf{x}_E(t), \mathbf{x}_P(t), \mathbf{u}_E(t), \mathbf{u}_P(t), t) \right. \\ &\quad \left. + (\nabla V_i)^T \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_E(t), \mathbf{x}_P(t), t) \right\}, \quad i = P, E, \end{aligned} \quad (6)$$

式中, V_i 为最优值函数, 定义为

$$\begin{aligned} V_i &= \min_{\mathbf{u}_i} \left\{ \int_t^{t_f} L_i(\mathbf{x}_E(\tau), \mathbf{x}_P(\tau), \mathbf{u}_E(\tau), \mathbf{u}_P(\tau), \tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \Phi_i(\mathbf{x}_E(t_f), \mathbf{x}_P(t_f), t_f) \right\}, \quad i = P, E. \end{aligned} \quad (7)$$

然后通过求解该偏微分方程可获得博弈双方的最优控制策略. 二是基于庞特里亚金极大值原理构造对策的哈密顿函数^[15]:

$$\begin{aligned} H_i &= L_i(\mathbf{x}_E(t), \mathbf{x}_P(t), \mathbf{u}_E(t), \mathbf{u}_P(t), t) \\ &\quad + \lambda_i^T \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_P, \mathbf{u}_P, t), \quad i = P, E, \end{aligned} \quad (8)$$

式中, λ 为协态变量. 进一步推导对策纳什均衡存在所必要的协态方程:

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\partial H_i / \partial \mathbf{x}_P \quad i = P, E. \quad (9)$$

最优控制方程:

$$\partial H_i / \partial \mathbf{u}_i = 0, \quad \partial^2 H_i / \partial \mathbf{u}_i^2 \geq 0, \quad i = P, E, \quad (10)$$

和横截条件^[17]:

$$\lambda(t_f) = \partial [\Phi_i(t_f) + \boldsymbol{\tau}^T \psi] / \partial \mathbf{x}, \quad (11)$$

$$H_i = -\partial [\Phi_i(t_f) + \boldsymbol{\tau}^T \psi] / \partial t, \quad (12)$$

式中, $\boldsymbol{\tau}$ 为拉格朗日乘子矢量. 通过求解式(2), (9), (11)

和(12)构成的一个高维的两点边值问题, 可以获得博弈双方的最优控制策略.

2.2 定性微分对策基本形式

如果博弈没有式(1)中的支付函数, 追逃双方只关注博弈的结果(式(3)是否会实现), 这类对策称为定性微分对策. 该种对策定性地将对策状态空间划分为捕获区和逃逸区. 在捕获区内, 不论逃逸器采用何种控制策略, 追踪器总能选取适当的控制策略对其进行捕获; 而在逃逸区内, 不论追踪器采用何种控制策略, 逃逸器总能选取适当的控制策略避免被捕获. 捕获区与逃逸区的分界面称为界栅, 界栅的形状及界栅上博弈双方的最优控制律是定性微分对策研究的关键. 界栅的一般构造方法如下^[13].

首先构造微分对策的哈密顿函数 H :

$$H = \lambda_P^T f_P(\mathbf{x}_P, \mathbf{u}_P, t) + \lambda_E^T f_E(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E, t), \quad (13)$$

式中, ∂A 为式(3)描述的目标集 A 的边界, $H|_{\partial A}$ 表示哈密顿函数在目标集边界 ∂A 上值. 目标集边界上博弈双方的最优控制策略满足

$$H^*|_{\partial A} = \max_{\mathbf{u}_E} \min_{\mathbf{u}_P} H(\mathbf{x}_P, \mathbf{x}_E, \lambda_P, \lambda_E, \mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E). \quad (14)$$

目标集边界上满足 $H^*|_{\partial A} > 0$ 的所有点构成了目标集的不可用部分(non-usable part, NUP); 满足 $H^*|_{\partial A} < 0$ 的所有点构成了目标集的可用部分(usable part, UP); 满足 $H^*|_{\partial A} = 0$ 的所有点构成了目标集的可用部分边界(boundary of the usable part, BUP), 也是界栅的起点. 从BUP倒向积分状态方程式(2)所得状态的轨迹 $\mathbf{x}_P^*(t)$

和 $\mathbf{x}_E^*(t)$ 即为界栅. 界栅与UP围成了捕获区, 捕获区之外则为逃逸区.

3 微分对策理论概述

3.1 微分对策理论发展

20世纪50年代初, 由于军事战略上的需要, 美国兰德公司Isaacs博士^[18]带领的研究小组开展了对抗双方都能自由决策行动的追逃问题研究, 并在1965年出版了专著《微分对策》(Differential Games), 该书的出版标志着微分对策理论的正式诞生. 微分对策理论的形成有两个根源: 对策论和控制论. 长期以来, 微分对策大都看作是一个多方的最优控制问题来研究, 其对策论部分尤其是其解的概念受到关注较少. 直到1971年, 美国数学家Friedman^[19]采用离散近似序列的方法建立了微分对策值与鞍点存在性理论, 才奠定了微分对策坚实的数学基础. 此后, 微分对策作为一个具有广泛应用前景的数学分支, 开始得到了大量的关注和研究, 其理论也日趋完善与成熟.

Isaacs博士最早提出的微分对策实际是一种二人零和微分对策. 基于动态规划原理, Isaacs给出了该对策值的最优性必要条件, 称为Isaacs方程^[13]. 此后40余年, 微分对策理论不断拓展, 衍生出众多分支, 其分类如图1所示.

20世纪60年代, Starr和Ho^[20]研究了多人非零和微分对策的3种不同类型的解的概念: 极大值极小值、Nash均衡和非劣势组策略. 随后Leitmann^[21], Melh-Man^[22]和Friedman^[19]等在这方面也做出了大量研究. 1970年Roxin和Tsokos^[23]给出了随机微分对策的数学定义, Nichols^[24]指出了随机微分对策与控制论的关系,

图1 (网络版彩图)微分对策分类

Figure 1 (Color online) Classification of differential games.

此后整个70年代, Elliot^[25], Bensoussan^[26]等众多学者采用变分法和鞅理论给出了随机微分对策解存在性和唯一性的严格数学证明. 同一时期, Ciletti^[27-30]对含有信息时延的微分对策进行了研究, 给出了信息时延微分对策开环和闭环控制策略的求解方法. 80年代以来, Stackelberg^[31]主从微分对策成为新的研究热点, 在该种对策中, 一个局中人首先进行策略选择, 成为领导者, 另外一个局中人根据领导者的策略再选自己的最优策略, 成为跟随者. 90年代以来, 众多学者开始对多目标微分对策和模糊微分对策进行了研究, 但研究较为分散, 未形成系统的理论. 2000年以来, 微分对策的研究主要集中在具有状态约束的零和微分对策、多人微分对策、不完全信息微分对策和随机微分对策. Lasry和Lions^[32]研究了具有大量局中人的非零和微分对策, 称之为平均场博弈. Aumann和Maschler^[33], Harsanyi^[34]研究了静态的不完全信息微分对策, 其中Harsanyi将不完全信息下的博弈转化为完全但不完美的博弈, 然后用处理完全信息的方法对其进行了求解. Kreps和Wilson^[35]研究了动态的不完全信息微分对策, 将完美贝叶斯均衡、序贯均衡等求解思想引入了离散的动态博弈. 但对于不完全信息连续动态博弈的研究, 目前关注较少.

国内微分对策起步较晚, 张嗣瀛^[36]采用现代控制理论对微分对策问题进行研究, 提出并证明了定量微分对策中的双极值原理, 出版了《微分对策》一书. 沙基昌^[37]针对各种军事对抗, 基于微分对策理论, 深入研究了多兵种作战的火力分配问题, 并撰写《数理战术学》. 李登峰^[13]系统研究了微分对策, 出版了《微分对策及其应用》, 是国内第一部从数学角度系统阐述微分对策的专著. 近年来, 越来越多的学者参与到微分对策的研究中来.

3.2 追逃微分对策发展

追逃微分对策是以追逃为背景的一类双方或多方参与的连续时域动态博弈, 其研究对象涉及汽车、轮船、飞机、导弹等多种物体. 对于一些动力学模型和机动特性相近的研究对象, 其理论具有共通之处. Bera等人^[38]研究了两个汽车之间进行追逃博弈的问题, 将转弯半径和转弯方向作为决策量, 划分出了对策状态空间的捕获区和逃逸区, 同时给出了捕获区内的时间最优追逃路径. Bakolas^[39]研究了一个低速物体在

有限时间内追上一个高速物体的捕获区和反馈控制律, 并对完美信息博弈和不完美信息博弈两种情况下的结果都进行了具体分析. Macias等人^[40]研究了两机器人之间的追逃问题, 发现追踪器可以直接基于图像视觉对逃逸器定位并产生最优反馈控制律. 程瑞锋等人^[41]探究了发生在水下的非线性追踪博弈问题, 引入了零效控制参数和连续时间广义预测方法, 提高了对抗系统对环境的抗干扰性. 以航空航天为背景的微分对策应用研究方面, 国外起步较早, 特别是在空战、导弹拦截等方面已经进行了大量的研究, 取得了一系列成果. 航空航天中的追逃问题通常被看作是一个二人或三人零和微分对策问题, 其研究的关键是追逃界栅的构造和鞍点处最优控制律的求解. Lachner等人^[42]以空战为背景, 推导了飞机追逃微分对策开环最优策略的必要性条件, 并给出了基于多点打靶法的鞍点求解算法. Raivio所在的系统分析实验室基于微分对策理论对空战决策进行了研究, 提出了分解法^[43]和离散非线性规划^[44]等追逃微分对策鞍点求解方法. Shima和Shinar领导的团队^[45-48]近30年在导弹拦截中的微分对策制导律方面取得了一系列成果.

总体来讲, 近年来对追逃微分对策的研究中, 不完全信息下的追逃微分对策, 线性和平面动力学模型下的多人追逃微分对策, 以及考虑不确定性因素的追逃问题形成了几个新的研究热点. Hayoun和Shima^[49]对一阶动力学模型下具有控制边界的二追一问题进行了分析性研究. Chen等人^[50]模拟“捕猎”问题研究了多追踪器追踪一个高速逃逸器的最优策略. Scott和Leonard^[51]分析了单个追踪器和多个逃逸器进行博弈时的最优逃逸策略, 在运动参数上给出了很多限制. Cavalieri等人^[52]引入行为学习的方法, 通过在线识别不完全信息来求解追逃双方的最优控制策略. Gensbittel^[53]分析了二人零和博弈中信息不完全且不对称的情况. 同时, 随着计算智能的发展, 神经网络方法、协同进化算法以及强化学习等数值求解方法也被引入微分对策中, García和Murano^[54]针对数学模型不确定的一类微分对策, 应用神经网络设计状态观测器, 在线评估系统模型; 周锐^[55]采用伴随BP技术, 把微分对策双边优化问题转化成两个神经网络的学习问题进行求解; 魏航^[56], 丁林静和杨啟明^[57]将强化学习应用到空战微分对策, 对无人格斗算法进行了研究. 这些新方法有望成为微分对策新的有力求解工具.

4 航天器轨道追逃研究进展

航天器轨道追逃问题相较于一般的追逃微分对策, 动力学模型更为复杂, 机动条件限制较大, 因而也是一类特殊的追逃问题. 本节针对当前航天器追逃问题中几个较集中的研究点进行评述.

4.1 追逃界栅和捕获逃逸区域

早期美国空军技术研究院Anderson和Grazier^[58]对低轨航天器的追逃博弈问题进行了研究, 给出了线性动力学模型下平面追逃界栅的解析解. 在平面追逃问题中, 航天器状态被表达为4维的向量 $\mathbf{x}=[x_1, x_2, v_1, v_2]^T$, 其中 x_1, x_2 和 v_1, v_2 分别表示位置和速度的两个分量. 航天器的终端目标集 $\mathbf{B}$ (式(3))被定义为

$$x_1(t_f)^2 + x_2(t_f)^2 - R_0^2 \leq 0, \quad (15)$$

式中, R_0 为捕获半径. 终端目标集边界上的任意一点的状态向量和协态向量可以表示为下述的参数形式:

$$\begin{cases} x_1(t_f) = R_0 \sin \varphi, & x_2(t_f) = R_0 \cos \varphi, \\ v_1(t_f) = \cos \varphi, & v_2(t_f) = -\sin \varphi, \\ \lambda_1(t_f) = \sin \varphi, & \lambda_2(t_f) = \cos \varphi, \\ \lambda_3(t_f) = 0, & \lambda_4(t_f) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

式中, φ 为状态量面内方位角. 由式(14)知, 目标集边界

$$\begin{cases} x = A_1 + 2B_1 + 4C_1 - \omega A_2 \tau + 1/2 A_3 \tau^2 - 1/3 C_3 \tau^3 - (A_1 + 2B_1 + 3C_1) \cos \omega \tau + (A_2 - B_2) \sin \omega \tau, \\ y = 2A_2 - 2B_2 + C_2 + (2A_1 + 3B_1 + 6C_1) \omega \tau - 1/2 A_4 \tau^2 + 1/6 \omega A_5 \tau^3 - 1/8 \omega C_3 \tau^4 - (2A_2 - 2B_2) \cos \omega \tau \\ \quad - (2A_1 + 4B_1 + 6C_1) \sin \omega \tau, \\ z = A_6 + 1/2 C_4 \tau^2 + (R_0 \sin \theta - A_6) \cos \omega \tau + B_3 \sin \omega \tau, \\ \dot{x} = \omega A_2 - A_3 \tau + C_2 \tau^2 - (A_2 - B_2) \omega \cos \omega \tau - (A_1 + 2B_1 + 3C_1) \omega \sin \omega \tau, \\ \dot{y} = -\omega (2A_1 + 3B_1 + 6C_1) + A_4 \tau - 1/2 \omega A_5 \tau^2 + 1/2 \omega C_3 \tau^3 + (2A_1 + 4B_1 + 6C_1) \omega \cos \omega \tau - (2A_2 - 2B_2) \omega \sin \omega \tau, \\ \dot{z} = -C_4 \tau - B_3 \omega \cos \omega \tau + (R \sin \theta - A_6) \omega \sin \omega \tau, \\ A_1 = Q(M_1 - M_3 - 2N_2) / \omega^2, A_2 = Q(M_2 + 2N_1 - 2N_3) / \omega^2, A_3 = Q(M_3 + 2N_2), A_4 = Q(2M_2 + 3N_1 - 4N_3), \\ A_5 = Q(2M_3 + 3N_2), A_6 = Q(K_1 - K_2) / \omega^2, B_1 = S_5 / \omega, B_2 = S_4 / \omega, B_3 = \frac{\cos \theta}{\omega \sin \theta} (S_4 \cos \varphi + S_5 \sin \varphi), C_1 = R_0 \cos \theta \cos \varphi, \\ C_2 = R_0 \cos \theta \sin \varphi, C_3 = \omega Q N_3, C_4 = Q K_2, Q = T_E - T_P, M_1 = \cos \theta \cos \varphi, M_2 = -\cos \theta \sin \varphi, M_3 = -\cos^3 \theta \cos^3 \varphi, \\ N_1 = \cos \theta \sin \varphi, N_2 = \cos \theta \cos \varphi, N_3 = -\cos \theta \sin \varphi (1 + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi), K_1 = \sin \theta, K_2 = -\sin \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi, \end{cases} \quad (18)$$

式中, θ 是BUP起点的俯仰角, ω 是参考圆轨道的角速度, τ 为剩余捕获时间. 根据界栅的解析表达式(18), 给定两航天器追逃的初始条件, 可以对其捕获逃逸区域进行判断, 流程如图3所示. 图3中 τ_s 为给定的最大剩余

上的最优机动方向角满足

$$\sin \alpha_i^* \big|_{\partial A} = -\sin \varphi, \quad \cos \alpha_i^* \big|_{\partial A} = -\cos \varphi. \quad (17)$$

通常数值求解追逃界栅的方法需要由目标集边界上的BUP部分(同时满足式(16)和(17))倒向积分状态方程式(2)和协态方程式(9), 得到界栅轨迹(图2).

Anderson和Grazier^[58]将航天器运动方程在圆参考轨道处线性化, 使得协态方程(9)可以被解析表达. 再将最优机动表达式(10)在剩余捕获时间 $\tau=0$ 处泰勒展开, 忽略三阶以上高阶项, 代入到状态方程式(2)中, 得到了航天器平面追逃界栅的解析表达式^[58]. 在国内, 张秋华等人^[59]较早地对近地轨道上共面追逃的问题进行了定性研究, 求解了飞行器在视线坐标系中的追逃界栅. 该研究中发现, 在终端时刻, 追逃双方最优的推力方向都沿着视线方向. 尔后, 该团队又将定量指标与定性对策相结合, 研究了近圆轨道上推力大小可变情况下的追逃界栅^[60]. 仿真发现, 推力大小对轨道偏心率的影响较大, 而较大推力可能使航天器脱离近圆轨道, 故该方法仅适用于小推力的情况. 最近, 祝海^[61]给出了Hill^[62]坐标系下航天器三维追逃界栅的近似的解析解式(18), 该解析解忽略了最优机动量泰勒展开式三阶以上的高阶项.

捕获时间.

Hafer等人^[63]在研究定量的轨道追逃问题中, 根据其敏感度方法的缺陷, 对定量问题加以转化, 提出了一种数值方法来确定三维界栅轨迹和捕获区. 此外, 刘剑

图 2 (网络版彩图)平面界栅示意图
Figure 2 (Color online) Illustration of planar barrier.

锋等人^[64]还将界栅理论应用到卫星的编队飞行中, 通过将对策区分为碰撞区和非碰撞区实现编队卫星的防碰撞设计.

4.2 线性二次型微分对策

线性二次型(linear quadratic)微分对策是一种被广泛应用的微分对策, 其形式简单, 便于求解, 具有很多解析性质. 该种对策的状态微分方程是线性的, 支付函数是状态量和控制量的二次型函数. 对于只有两个局中人的博弈, 系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_p\mathbf{u}_p(t) - \mathbf{B}_e\mathbf{u}_e(t), \quad (19)$$

式中, 状态量 $\mathbf{x}$ 取两航天器状态量之差 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_p-\mathbf{x}_e$, 通常是一个6维矢量(3维表征位置, 3维表征速度).

如果博弈时间是给定的(可称作固定逗留期微分对策^[13]), 局中人(以追方为例)的支付函数可表示为

$$J_p = 0.5\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{Q}_p\mathbf{x}(t_f) + 0.5\int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_p\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_p^T(t)\mathbf{R}_p\mathbf{u}_p(t) - \mathbf{u}_e^T(t)\mathbf{R}_e\mathbf{u}_e(t)]dt, \quad (20)$$

式中, $\mathbf{Q}_p$ 和 $\mathbf{Q}_e$ 是对称半正定矩阵, 表征相对状态的权重, $\mathbf{R}_p$ 和 $\mathbf{R}_e$ 是对称正定矩阵, 表征能量权重. 逃方的支付函数形式与上式类似.

如果博弈时间是无限的情况(可称作无限时域微分对策^[13]), 局中人(以追方为例)的支付函数形式为

图 3 (网络版彩图)捕获逃逸区域判断流程图
Figure 3 (Color online) Flow diagram for finding regions of capture and escape in pursuit-evasion game.

$$J_p = 0.5 \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_p\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_p^T(t)\mathbf{R}_p\mathbf{u}_p(t) - \mathbf{u}_e^T(t)\mathbf{R}_e\mathbf{u}_e(t)]dt. \quad (21)$$

Jagat和Sinclair^[65]将线性二次型微分对策引入到航天器轨道追逃问题中, 在Hill坐标系下描述两航天器的线性相对运动, 构造固定逗留期微分对策, 通过将HJB方程转化为黎卡提(Riccati)微分方程(22)来求解闭环最优反馈控制律.

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t)(\mathbf{B}_p\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{B}_p^T - \mathbf{B}_e\mathbf{R}_e^{-1}\mathbf{B}_e^T)\mathbf{P}(t) - \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{Q}, \quad (22)$$

式中, $\mathbf{P}(t)$ 为黎卡提矩阵, 表征协状态量和状态量的线性关系 $\lambda(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$, 且 $\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{Q}_f$. 若 $t_f \rightarrow \infty$ 且 $\mathbf{Q}_f=0$, 这种对策变成了无限时域(H_∞)微分对策, HJB方程就转化为代数Riccati方程:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}(\mathbf{B}_p\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{B}_p^T - \mathbf{B}_e\mathbf{R}_e^{-1}\mathbf{B}_e^T)\mathbf{P} = 0. \quad (23)$$

求解该方程可得到最优的闭环反馈控制律:

$$\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t), \quad i = \text{P, E}. \quad (24)$$

需要说明的是, 当追踪器的可控性矩阵与逃逸器的可控性矩阵的差矩阵正定时, 可以保证固定逗留期线性二次型对策的鞍点存在^[66]. 可控性矩阵的定义如下所示:

$$\mathbf{M}_i = \int_{t_0}^{t_f} \Phi_i(t_f, \tau) \mathbf{B}_i(\tau) \mathbf{R}_i^{-1}(\tau) \mathbf{B}_i^T(\tau) \Phi_i^T(t_f, \tau) d\tau, \quad (25)$$

式中, $\Phi_i(\cdot, \cdot)$ 为状态转移矩阵.

程晓桐^[67]考虑了该种对策中航天器所受推力的最大幅值约束, 引入了饱和函数的方法:

$$\text{sat}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 1, \\ \zeta, & -1 \leq \zeta \leq 1, \\ -1, & \zeta < -1. \end{cases} \quad (26)$$

将两航天器的推力 $\mathbf{T}_i (i = \text{P, E})$ 描述为

$$\mathbf{T}_i = \left[T_i \text{sat}\left(\frac{T_{cxi}}{T_i}\right), T_i \text{sat}\left(\frac{T_{c yi}}{T_i}\right), T_i \text{sat}\left(\frac{T_{c zi}}{T_i}\right) \right]^T, \quad (27)$$

式中, T_{cxi} , $T_{c yi}$, $T_{c zi}$ 是三个坐标轴方向上的所需推力, T_i 为最大推力. 将式(27)代入最优控制方程中, 可得到有幅值约束下的最优控制量解析式.

式(24)得到的最优控制律仅是一种线性的反馈控制律. 最近, Jagat和Sinclair^[68]又利用状态相关的黎卡提方程(state-dependent Riccati equation, SDRE)的方法将线性二次型问题拓展到非线性二次型问题中, 得到了一种非线性最优控制律. 在SDRE方法中采用了非线性的相对轨道动力学方程描述航天器运动, 将与状态量相关的系数转化成参数, 最后HJB方程被转化为含非线性系数矩阵的代数Riccati方程:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{B}_P \mathbf{R}_P^{-1} \mathbf{B}_P^T - \mathbf{B}_E \mathbf{R}_E^{-1} \mathbf{B}_E^T \right) \mathbf{P}(\mathbf{x}) \\ & - \mathbf{A}(\mathbf{x})^T \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (28)$$

该研究通过比较发现: 该非线性控制律在和线性控制律计算量相当的情况下, 追逃效果更好^[68].

4.3 终端时间自由(free-time)微分对策

线性二次型微分对策能够提供一种线性反馈控制律, 但由于没有终端拦截约束, 两航天器终端时刻只是实现了接近而不是准确的拦截. 对于有终端拦截约束

的问题, 其实质是一个高维两点边值问题, 求解难度较高. 该种对策的博弈终端时间变成一个自由量, 由式(4)确定. 当前研究中, 广泛采用的一种支付函数和终端目标集的形式分别如下:

$$J_P = -J_E = t_f, \quad (29)$$

$$\psi = \mathbf{r}_P(t_f) - \mathbf{r}_E(t_f) = \mathbf{0}, \quad (30)$$

式中, $\mathbf{r}_P$ 和 $\mathbf{r}_E$ 表示位置矢量. 式(29)表示在博弈过程中, 不考虑燃料消耗, 追踪器旨在最小化拦截时间, 逃逸器努力最大化拦截时间. 如果追逃双方都采用解析的最优条件式(10), 并将最优机动量转化为协态量的函数, 由式(2), (9), (11)和(12)构成的高维两点边值问题可表示为如下形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_E(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_P(t) \\ \dot{\lambda}_E(t) \\ \dot{\lambda}_P(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_E(\mathbf{x}_E(t), \lambda_E(t), t) \\ \mathbf{f}_P(\mathbf{x}_P(t), \lambda_P(t), t) \\ \mathbf{g}_E(\mathbf{x}_E(t), \lambda_E(t), t) \\ \mathbf{g}_P(\mathbf{x}_P(t), \lambda_P(t), t) \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_E(t_0) \\ \mathbf{x}_P(t_0) \\ \lambda_E(t_f) \\ \lambda_P(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{E0} \\ \mathbf{x}_{P0} \\ \partial[t_f + \tau^T \psi] / \partial \mathbf{x}_E(t_f) \\ \partial[t_f + \tau^T \psi] / \partial \mathbf{x}_P(t_f) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Pontani和Conway^[69]较早研究了此类三维轨道追逃问题, 在球坐标系下描述了航天器的绝对运动, 提出了一种半直接配点法非线性规划算法(semidirect collocation with nonlinear programming, SDCNLP)求解鞍点. 这种半直接方法只对逃逸器采用了解析的最优机动条件:

$$\partial H_E / \partial \mathbf{u}_E = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{X} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}^T (\partial^2 H_E / \partial \mathbf{u}_E^2) \mathbf{X} \leq 0. \quad (33)$$

对追踪器的机动离散化采用非线性规划求解.

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}_{\text{NLP}} = [u_{xP}(t), u_{yP}(t), u_{zP}(t)]^T, \\ & \min_{\mathbf{V}} J_P = t_f \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_E. \end{aligned} \quad (34)$$

Carr等人^[70]改进了Conway的初值猜测方法, 对于比例导引接近最优追踪律的博弈情景, 采用单边最优控制的解作为初值, 再通过半直接配点非线性规划方法得到了最优控制律. 但由于半直接配点法仅对逃逸器使用了解析的最优必要条件, 因此不能得到准确的鞍点. Hafer^[63]随后提出了一种敏感度方法来求解该问

题, 先忽略引力项得到一个解析解, 再通过引力同伦法迭代得到鞍点解, 提高了该问题的求解效率。

在国内, Sun等人^[71]提出了一种半直接控制参数法和多重打靶法的混合方法来提高追逃两点边值问题求解的收敛性和精度。罗建^[72]结合序列二次规划法对追逃问题进行类似式(34)单边优化得到了近最优飞行策略。Li等人^[73]提出了一种降维解法, 采用近圆偏差方程^[74]描述两航天器的相对运动, 将原两点边值问题转化为仅对两个终端条件式(35)的打靶, 其余的最优条件以解析形式隐含在打靶的积分过程中。

$$\begin{cases} \mathbf{r}_p(t_f, \tau) - \mathbf{r}_e(t_f, \tau) = 0, \\ H(t_f, \tau) + 1 = 0. \end{cases} \quad (35)$$

该方法可以快速求得近似的鞍点解。Shen和Casalino^[75]在三维轨道追逃问题中考虑了航天器的质量变化, 将原24维的两点边值问题拓展为28维, 使追逃模型更加接近实际。此时哈密顿函数的构造如下:

$$\begin{aligned} H_i &= \lambda_{r_i}^T \mathbf{v}_i + \lambda_{v_i}^T (\mathbf{g}_i + \mathbf{T}_i / m_i) - \lambda_{m_i} T_i / c_i \\ &= \lambda_{r_i}^T \mathbf{v}_i + \lambda_{v_i}^T \mathbf{g}_i + T_i S_{Fi}, \end{aligned} \quad (36)$$

式中, c_i 为发动机有效喷气速度, λ_{m_i} 是质量的协态量, S_{Fi} 为开关函数。根据极大值原理可得博弈中最优的开关函数 S_{Fi} 描述如下:

$$\begin{cases} T_i = 0, & S_{Fi} < 0, i = E (S_{Fi} > 0, i = P), \\ T_i = T_{i \max}, & S_{Fi} > 0, i = E (S_{Fi} < 0, i = P), \\ 0 < T_i < T_{i \max}, & S_{Fi} = 0. \end{cases} \quad (37)$$

由于奇异弧段($S_{Fi}=0$)只发生在大气层内, 因此在轨道追逃问题中可以将其忽略。式(37)表明追踪器和逃逸器的最优控制都是Bang-Bang控制且相反。

此外, 通过比较上述线性和非线性动力学模型下的研究结果, 可得如下结论^[61]: 在线性动力学模型下, 对策中追逃双方最优控制律(以发动机推力方向角表征)是相同的, 而在非线性模型下, 追逃双方最优控制律是不同的。

张秋华等人^[76]求解了终端时间自由微分对策的逆问题——两航天器在固定时间内追逃, 最小化指标为两航天器的终端相对距离:

$$J_p = \frac{1}{2} (D [\mathbf{x}_p(t_f) - \mathbf{x}_e(t_f)])^T D [\mathbf{x}_p(t_f) - \mathbf{x}_e(t_f)]. \quad (38)$$

该逆问题同样需要求解一个高维两点边值问题。随后, Ye等人^[77]将终端脱靶量限定为常值, 推导了最

优控制律与剩余捕获时间的关系式, 再从零效脱靶量方程估算了剩余捕获时间, 最终求得了最优矢量制导律, 能够最优化捕获时间。

总体而言, 尽管当前求解追逃两点边值的解法能够求解出准确的鞍点, 但对于长时间的追逃问题或者多圈追逃问题, 求解依然很困难, 需要更加高效和鲁棒的算法。

4.4 不完全和不完美信息微分对策

在前面的对策中, 均假设博弈双方都确切地知道对方的支付函数形式和支付函数中的系数矩阵, 这样的对策称为完全信息微分对策。而在实际的追逃博弈中, 博弈双方往往无法确切知道对方博弈的目的, 此时追逃博弈变成了不完全信息微分对策。

以无限时域线性二次型对策为例, 在不完全信息下, 博弈中追逃双方采用的零和策略中支付函数的系数矩阵可能不同, 使得追逃实际上构成了一个非零和博弈:

$$\begin{aligned} J_p^p &= 0.5 \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_p^p \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_p^T(t) \mathbf{R}_p^p \mathbf{u}_p(t) \\ &\quad - \mathbf{u}_e^T(t) \mathbf{R}_e^p \mathbf{u}_e(t)] dt, \quad J_e^p = -J_p^p, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} J_p^e &= 0.5 \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_p^e \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_p^T(t) \mathbf{R}_p^e \mathbf{u}_p(t) \\ &\quad - \mathbf{u}_e^T(t) \mathbf{R}_e^e \mathbf{u}_e(t)] dt, \quad J_e^e = -J_p^e, \end{aligned} \quad (40)$$

式中, 上标 $i=P, E$ 表示 i 方采用的博弈双方支付系数, 下标 $j=P, E$ 表示支付函数中和 j 方相关的系数, 且

$$\mathbf{Q}_p^p \neq \mathbf{Q}_p^e, \mathbf{R}_p^p \neq \mathbf{R}_p^e, \mathbf{R}_e^p \neq \mathbf{R}_e^e. \quad (41)$$

Zhu等人^[61,78]从追踪器的角度对这种不完全信息追逃博弈问题进行了研究, 发现当双方都采用完全信息下的零和策略时, 追踪器的支付将增加, 逃逸器的支付将减少(图4)。这表明信息的不完全使得追踪器在博弈中处于更不利地位。同时他们将无迹卡尔曼滤波^[79]的方法引入到航天器追逃中, 建立估计系统式(42)和观测系统式(43):

$$\dot{\mathbf{x}}^p = \mathbf{A} \mathbf{x}^p + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_e - \mathbf{B} \mathbf{u}_p^*, \quad \mathbf{u}_p^* = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{u}}_e), \quad (42)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}_e^* - \mathbf{B} \mathbf{u}_p^*, \quad \mathbf{u}_e^* = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{u}}_p), \quad (43)$$

式中, 上标“ $\hat{}$ ”表示估计量, $\mathbf{F}$ 表示基于估计量计算最优控制量的算子。通过对比观测量 $\mathbf{x}$ 和估计量 $\mathbf{x}^p$, 可以校正对逃逸器的支付函数系数矩阵 $\mathbf{Q}_p^e, \mathbf{R}_p^e, \mathbf{R}_e^e$ 的估计,

图 4 (网络版彩图)三种情况下追踪器的支付函数
Figure 4 (Color online) Payoffs of the pursuer in three cases.

实时计算出最优的追踪控制律, 减少了追踪器的收益损失(图4)。

博弈中, 如果双方能获得对方的所有历史状态信息, 博弈也称为完美信息博弈。在完全但不完美信息微分对策中, 对局中人掌握的信息, 定义函数 $\eta(t)$, 有以下信息结构。

开环型信息结构:

$$\eta(t) = \{\mathbf{x}_E(t_0), \mathbf{x}_P(t_0)\}. \quad (44)$$

反馈型信息结构:

$$\eta(t) = \{\mathbf{x}_E(t), \mathbf{x}_P(t)\}, t \in [t_0, t_f]. \quad (45)$$

时延型信息结构:

$$\eta(t) = \begin{cases} \{\mathbf{x}_E(t_0), \mathbf{x}_P(t_0)\}, & t_0 \leq t \leq \varepsilon, \\ \{\mathbf{x}_E(s), \mathbf{x}_P(s) \mid 0 \leq s \leq t - \varepsilon\}, & t > \varepsilon, \end{cases} \quad (46)$$

式中, ε 为信息时延。

Ciletti^[28]针对对策中逃方存在常值时延的情况, 推导了式(6)修正后的时延型HJB方程:

$$\partial V / \partial \varepsilon + \partial V / \partial t + H(\mathbf{x}, \varepsilon, t, \nabla V_x) = 0. \quad (47)$$

求解上式可得时延型鞍点对应的闭环反馈控制律。

Shen等人^[80]考虑了观测状态信息存在不确定性的情况, 通过估计航天器状态 $\hat{\mathbf{x}}$ 以及协方差矩阵 $\mathbf{P}$, 建立了状态信息的概率密度函数:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^6 \det(\mathbf{P})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}. \quad (48)$$

并通过Shannon的信息熵理论^[81]建立起不确定性的量

化指标作为博弈目标函数:

$$J = h(\mathbf{x}) = 0.5 \ln[(2\pi e)^6 \det(\mathbf{P})]. \quad (49)$$

博弈中, 追踪航天器通过轨道机动以减小状态信息的熵, 而逃逸航天器通过机动以增大状态信息的熵, 二者的博弈同样可以形成一个纳什均衡。

4.5 脉冲推力微分对策

前述的几种微分对策模型都采用的是连续机动的形式。在连续机动的双边最优控制问题上, 微分对策理论有较丰富的理论模型, 但在脉冲推力假设下的最优控制问题上, 微分对策缺乏成熟的模型^[82]。因此, 当前对于航天器在脉冲推力下进行追逃博弈的研究也较为匮乏。Kelley等人^[83]考虑追逃两航天器均采用脉冲变轨控制方式, 较早对近圆轨道附近的追逃问题进行了研究。Venigalla和Scheeres^[84]利用可达集的概念对脉冲推力下航天器追逃特性进行了分析, 发现其最优机动与连续推力下的线性二次型追逃问题的结果有一定差别: 脉冲推力下可能会产生和连续机动下相反的机动策略。

于大腾^[85]从逃逸器的角度研究了规避空间安全威胁的机动方法。该方法分别从能量博弈和测量博弈的方式展开。在能量博弈方法中, 引入了潜在威胁区的概念——追踪器在给定时间和燃料限制内通过多脉冲交会能够达到的逃逸器轨迹弧段。通过优化逃逸器的单次脉冲机动的方向, 来最小化潜在威胁区, 从而规避空间威胁。在测量博弈方法中, 考虑了航天器相对状态的可观测性, 通过设计可观测性较低的逃逸机动, 增大追踪器的状态观测误差(图5), 降低逃逸器的安全威胁。

Liu等人^[86]研究了轨道上的目标器-攻击器-防御器三人博弈问题(目标器在做无机动的自由飞行, 攻击器旨在拦截目标器, 防御器旨在拦截攻击器以保护目标器)。博弈中假设攻击器和防御器只能采用单次脉冲机动, 通过混合算法优化, 可得到攻击器的最小特征速度轨迹和防御器的最短时间拦截轨迹。

5 结论与展望

本文对国内外航天器轨道追逃微分对策的研究进展进行了综述, 着重围绕几种典型追逃微分对策的研

图5 (网络版彩图)规避机动引起的迹向状态估计误差
Figure 5 (Color online) In-track estimation error caused by evasive maneuvers.

究成果,分析了它们在博弈模型和求解方法上的区别与联系,总结了一些普适性的结论。但由于航天器追逃博弈问题研究起步较晚,微分对策的应用还不够系统和完善,需要进一步深入地研究。最后,本文从以下三个方面对未来研究方向进行展望。

(1) 在完全信息假设下的博弈问题中,终端时间自由的轨道追逃对策需要更加高效和鲁棒的算法来求解

长时间或多圈追逃问题。对策中所作的多个假设,如燃料充足、追踪器机动能力更强等假设需要逐步放开,再来探究追逃的特性和结论。此外,当前近地航天器变轨机动的主要形式是脉冲推力,但当前对脉冲推力下的追逃微分对策还没有系统的分析和研究。

(2) 在不完全信息假设下的博弈问题中,信息的有无、对称程度、测量误差以及信息传输的时延都会对博弈的结果产生一定的影响,需要进一步探究。此类问题也更接近实际的追逃过程。解决此类问题,往往需要在修正博弈模型的基础上重新推导当前鞍点解,或者综合运用多种控制和估计方法,弥补信息缺失,减少收益损失。

(3) 当前缺乏对追逃博弈问题的物理或半实物仿真实验。当测量和控制环节加入到航天器博弈问题中后,博弈算法是否依旧能够实时、有效地达到预期结果还需要通过实验进一步检验。在后续研究中可以考虑通过地面仿真实验系统^[87]、无人机平台,甚至星上平台对航天器追逃问题进行模拟研究,比较各类博弈算法的效果。

参考文献

- Mitchell I T, Gorton T B, Taskov K, et al. GNC development of the XSS-11 micro-satellite for autonomous rendezvous and proximity operations. In: Proceedings of the 29th Annual AAS Guidance and Control Conference. 2006, AAS Paper 06-014
- Rumford T. Demonstration of autonomous rendezvous technology (DART) project summary. In: Proceedings Volume 5088, Space Systems Technology and Operations. Orlando, 2003. 10-19
- Weismuller T, Leinz M. GNC demonstrated by the orbital express autonomous rendezvous and capture sensor system. In: Proceedings of the 29th Annual AAS Guidance and Control Conference. 2006, AAS Paper 06-016
- Meng B, Huang J B, Li Z, et al. Introduction to American approaching operation satellite MixTeX in geostationary orbit and its inspiration (in Chinese). Spacecr Eng, 2014, 23: 112-118 [蒙波, 黄剑斌, 李志, 等. 美国高轨抵近操作卫星MiTeX飞行任务及启示. 航天器工程, 2014, 23: 112-118]
- Gill E, D'Amico S, Montenbruck O. Autonomous formation flying for the PRISMA mission. J Spacecr Rocket, 2007, 44: 671-681
- Li S C, Zhu B K. Insights into American Space Warfare Strategy from "Phoenix Program" (in Chinese). Space Explor, 2014, 10: 54-7 [李书成, 朱保魁. 从“凤凰计划”看美国太空战战略. 太空探索, 2014, 10: 54-57]
- Space-Station-20. Full records of "Tianzhou 1": A journey to space (in Chinese). Satell Netw, 2017, 4: 26-31 [贰零空间站. “天舟一号”全记录: 向太空进发之旅. 卫星与网络, 2017, 4: 26-31]
- Yu D T, Wang H, Zhou W M. Anti-rendezvous evasive maneuver method considering space geometrical relationship (in Chinese). J Natl Univ Def Technol, 2016, 38: 89-94 [于大腾, 王华, 周晚萌. 考虑空间几何关系的反交会规避机动方法. 国防科技大学学报, 2016, 38: 89-94]
- Qian X F, Lin R X, Zhao Y N. Flight Mechanics of Guided Missile (in Chinese). Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2006 [钱杏芳, 林瑞雄, 赵亚男. 导弹飞行力学. 北京: 北京理工大学出版社, 2006]
- Li C Y. Study on guidance and control problems for tactical ballistic missile interceptor (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2008 [李超勇. TBM拦截器制导与控制若干问题研究. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2008]
- Zarchan P. Tactical and strategic missile guidance. In: Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 176. Reston, VA: American Institute of Astronautics and Astronautics, 1997

- 12 Liu Y F. Research on end-game guidance law for interceptor missile based on differential game theory (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2014 [刘延芳. 基于微分对策理论的拦截导弹末端制导律研究. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2014]
- 13 Li D F. Differential Games and Applications (in Chinese). Beijing: National Defense Industry Press, 2000 [李登峰. 微分对策及其应用. 北京: 国防工业出版社, 2000]
- 14 Yong E M, Chen L, Tang G J. A survey of numerical methods for trajectory optimization of spacecraft (in Chinese). *J Astronaut*, 2008, 29: 397–406 [雍恩米, 陈磊, 唐国金. 飞行器轨迹优化数值方法综述. 宇航学报, 2008, 29: 397–406]
- 15 Basar T, Olsder G J. Dynamic Noncooperative Game Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999
- 16 Levine W. Optimal control theory: An introduction. *IEEE T Automat Contr*, 2003, 17: 423–423
- 17 Xing J X, Zhang C R, Xu H. Fundamentals of Application of Optimal Control (in Chinese). Beijing: Science Press, 2003 [邢继祥, 张春蕊, 徐洪. 最优控制应用基础. 北京: 科学出版社, 2003]
- 18 Isaacs R. Differential Games. New York: John Wiley & Sons, 1965
- 19 Friedman A. Differential Games. Rhode Island: American Mathematical Society, 1974
- 20 Starr A W, Ho Y C. Nonzero-sum differential games. *J Optim Theor Appl*, 1969, 3: 184–206
- 21 Leitmann G. Cooperative and Non-Cooperative and Many-Player Differential Games. New York: Springer Verlag, 1974
- 22 Melhmann A. Applied Differential Games. New York: Plenum Press, 1988
- 23 Roxin E, Tsokos C P. On the definition of a stochastic differential game. *Math Syst Theor*, 1970, 4: 60–64
- 24 Nichols W G. Stochastic Differential Games and Control Theory. Dissertation for Doctoral Degree. Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University, 1971
- 25 Elliott R. The existence of value in stochastic differential games. *SIAM J Control Optim*, 1976, 14: 85–94
- 26 Bensoussan A, Friedman A. Nonzero-sum stochastic differential games with stopping times and free boundary problems. *Trans Amer Math Soc*, 1977, 231: 275
- 27 Ciletti M D. Results in the theory of linear differential games with an information time lag. *J Optim Theor Appl*, 1970, 5: 347–362
- 28 Ciletti M D. New results in the theory of differential games with information time lag. *J Optim Theor Appl*, 1971, 8: 287–315
- 29 Ciletti M D. Differential games with information time lag: Norm-invariant systems. *J Optim Theor Appl*, 1972, 9: 293–301
- 30 Mori K, Shimemura E. Linear differential games with delayed and noisy information. *J Optim Theor Appl*, 1974, 13: 275–289
- 31 Wang J. A Stackelberg differential game for defence and economy. *Optim Lett*, 2018, 12: 375–386
- 32 Lasry J M, Lions P L. Mean field games. *Jpn J Math*, 2007, 2: 229–260
- 33 Aumann R J, Maschler M B. Repeated Games with Incomplete Information. Cambridge: MIT Press, 1995
- 34 Harsanyi J. Games with incomplete information played by Bayesian players. *Manage Sci*, 2011, 14: 486–502
- 35 Kreps D, Wilson R. Reputation and imperfect information. *J Econ Theory*, 1982, 27: 253–279
- 36 Zhang S Y. Differential Games (in Chinese). Beijing: Science Press, 1987 [张嗣瀛. 微分对策. 北京: 科学出版社, 1987]
- 37 Sha J C. Mathematics and Physics in Tactics (in Chinese). Beijing: Science Press, 2003 [沙基昌. 数理战术学. 北京: 科学出版社, 2003]
- 38 Bera R, Makkapati V R, Kothari M. A comprehensive differential game theoretic solution to a game of two cars. *J Optim Theor Appl*, 2017, 174: 818–836
- 39 Bakolas E. On the finite-time capture of a fast moving target. *Optim Control Appl Meth*, 2017, 38: 778–794
- 40 Macias V, Becerra I, Murrieta-Cid R, et al. Image feedback based optimal control and the value of information in a differential game. *Automatica*, 2018, 90: 271–285
- 41 Cheng R F, Liu W D, Gao L E, et al. Differential game guidance of underwater nonlinear tracking control based on continuous time generalized predictive correction (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2018, 67: 1–9 [程瑞峰, 刘卫东, 高立娥, 等. 基于连续时间广义预测校正的水下非线性追踪博弈控制. 物理学报, 2018, 67: 1–9]
- 42 Lachner R, Breitner M, Pesch H. Three Dimensional Air Combat: Numerical Solution of Complex Differential Games. In: Olsder G J, eds. New Trends in Dynamic Games and Applications. Annals of the International Society of Dynamic Games, vol 3. Boston: Birkhäuser, 1995
- 43 Raivio T, Ehtamo H. Visual aircraft identification as a pursuit-evasion game. *J Guid Control Dyn*, 2000, 23: 701–708
- 44 Ehtamo H, Raivio T. On applied nonlinear and bilevel programming or pursuit-evasion games. *J Optim Theor Appl*, 2001, 108: 65–96
- 45 Shima T, Shinar J. Time-varying linear pursuit-evasion game models with bounded controls. *J Guid Control Dyn*, 2002, 25: 425–432

- 46 Turetsky V, Shinar J. Missile guidance laws based on pursuit-evasion game formulations. *Automatica*, 2003, 39: 607–618
- 47 Shima T. Capture conditions in a pursuit-evasion game between players with biproper dynamics. *J Optim Theor Appl*, 2005, 126: 503–528
- 48 Shima T. Optimal cooperative pursuit and evasion strategies against a homing missile. *J Guidance Control Dyn*, 2011, 34: 414–425
- 49 Hayoun S Y, Shima T. A two-on-one linear pursuit-evasion game with bounded controls. *J Optim Theor Appl*, 2017, 174: 837–857
- 50 Chen J, Zha W, Peng Z, et al. Multi-player pursuit-evasion games with one superior evader. *Automatica*, 2016, 71: 24–32
- 51 Scott W L, Leonard N E. Optimal evasive strategies for multiple interacting agents with motion constraints. *Automatica*, 2018, 94: 26–34
- 52 Cavalieri K A, Sataky N, Hurtado J E. Incomplete information pursuit-evasion games with uncertain relative dynamics. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. National Harbor, Maryland, 2014
- 53 Gensbittel F. Continuous-time limit of dynamic games with incomplete information and a more informed player. *Int J Game Theor*, 2016, 45: 321–352
- 54 García E, Murano D A. State estimation for a class of nonlinear differential games using differential neural networks. In: *American Control Conference (ACC)*. IEEE, 2011. 2486–2491
- 55 Zhou R. Differential game controllers design using neural networks (in Chinese). *Control Decision*, 2003, 18: 123–125 [周锐. 基于神经网络的微分对策控制器设计. *控制与决策*, 2003, 18: 123–125]
- 56 Wei H. Research of UCAV air combat based on reinforcement learning (in Chinese). Dissertation for Master's Degree. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015 [魏航. 基于强化学习的无人机空中格斗算法研究. 硕士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015]
- 57 Ding L J, Yang Q M. Research on air combat maneuver decision of UAVs based on reinforcement learning (in Chinese). *Avion Tech*, 2018, 49: 29–35 [丁林静, 杨启明. 基于强化学习的无人机空战机动决策. *航空电子技术*, 2018, 49: 29–35]
- 58 Anderson G M, Grazier V W. Barrier in pursuit-evasion problems between two low-thrust orbital spacecraft. *AIAA J*, 1976, 14: 158–163
- 59 Zhang Q H, Zhao X J, Sun Y. Pursuit-evasion barrier of two spacecrafts based on the sight-line coordinate system (in Chinese). *Aerosp Control*, 2007, 25: 26–30 [张秋华, 赵小津, 孙毅. 空间飞行器在视线坐标系中的追逃界栅. *航天控制*, 2007, 25: 26–30]
- 60 Zhang Q H, Sun Y, Huang M M, et al. Pursuit-evasion barrier of two spacecrafts under minute continuous radial thrust in coplanar orbit (in Chinese). *Control Decision*, 2007, 22: 530–534 [张秋华, 孙毅, 黄明明, 等. 近地共面轨道上两飞行器在径向连续小推力下的追逃界栅. *控制与决策*, 2007, 22: 530–534]
- 61 Zhu H. Optimal control of spacecraft orbital pursuit-evasion based on differential game (in Chinese). Dissertation for Master's Degree. Changsha: National University of Defense Technology, 2017 [祝海. 基于微分对策的航天器轨道追逃最优控制策略. 硕士学位论文. 长沙: 国防科技大学, 2017]
- 62 Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *J Aerospace Sci*, 1960, 27: 653–658
- 63 Hafer W T, Reed H L, Turner J D, et al. Sensitivity methods applied to orbital pursuit evasion. *J Guid Control Dyn*, 2015, 38: 1118–1126
- 64 Liu J F, Guo J F, Cui N G. Collision-avoiding research based on barrier theory for satellites formation flying (in Chinese). In: *Proceedings of the 25th Chinese Control Conference*, 2006 [刘剑锋, 郭继峰, 崔乃刚. 基于界栅理论的编队卫星防碰撞控制研究. 见: 第25届中国控制会议, 2006]
- 65 Jagat A, Sinclair A J. Optimization of spacecraft pursuit-evasion game trajectories in the Euler-Hill reference frame. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. San Diego, 2014
- 66 Huang M M. Researches and applications of differential game method in spacecraft proximity and control (in Chinese). Dissertation for Master's Degree. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2005 [黄明明. 微分对策方法在空间飞行器在轨接近控制中的研究与应用. 硕士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2005]
- 67 Cheng X T. Pursuit-evasion strategies and its numerical solution for two low-earth-circular-orbit spacecraft with saturation function thrust (in Chinese). Dissertation for Master's Degree. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2014 [程晓桐. 近圆轨道含饱和函数推力的两航天器追逃策略及数值求解. 硕士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2014]
- 68 Jagat A, Sinclair A J. Nonlinear control for spacecraft pursuit-evasion game using the state-dependent Riccati equation method. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2017, 53: 3032–3042
- 69 Pontani M, Conway B A. Numerical solution of the three-dimensional orbital pursuit-evasion game. *J Guid Control Dyn*, 2009, 32: 474–487
- 70 Carr R W, Cobb R G, Pachter M, et al. Solution of a pursuit-evasion game using a near-optimal strategy. *J Guid Control Dyn*, 2018, 41: 841–850
- 71 Sun S, Zhang Q, Loxton R, et al. Numerical solution of a pursuit-evasion differential game involving two spacecraft in low earth orbit. *JIMO*, 2017, 11: 1127–1147

- 72 Luo J. The sequential quadratic programming (SQP) algorithm and applying to pursuit-evasion of the spacecraft (in Chinese). Dissertation for Master's Degree. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2012 [罗建. 序列二次规划(SQP)算法及其在航天器追逃中的应用. 硕士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012]
- 73 Li Z, Zhu H, Yang Z, et al. A dimension-reduction solution of free-time differential games for spacecraft pursuit-evasion. *Acta Astronaut*, 2019, 163: 201–210
- 74 Zhang J. Mission planning of space rendezvous phasing maneuvers (in Chinese). Dissertation for Master's Degree. Changsha: National University of Defense Technology, 2010 [张进. 空间交会远程导引变轨任务规划. 硕士学位论文. 长沙: 国防科技大学, 2010]
- 75 Shen H X, Casalino L. Revisit of the three-dimensional orbital pursuit-evasion game. *J Guid Control Dyn*, 2018, 41: 1823–1831
- 76 Zhang Q H, Sun S T, Chen Y, et al. Strategy and numerical solution of pursuit-evasion with fixed duration for two spacecraft. *J Astronaut*, 2014, 5: 537–544 [张秋华, 孙松涛, 湛颖, 等. 时间固定的两航天器追逃策略及数值求解. 宇航学报, 2014, 5: 537–544]
- 77 Ye D, Shi M, Sun Z. Satellite proximate interception vector guidance based on differential games. *Chin J Aeronaut*, 2018, 31: 1352–1361
- 78 Zhu H, Luo Y Z, Li Z Y, et al. Orbital pursuit-evasion games with incomplete information in the Hill reference frame. In: Proceeding of the 27th International Symposium on Space Flight Dynamics. Melbourne, 2019
- 79 Julier S J, Uhlmann J K. New extension of the Kalman filter to nonlinear systems. In: Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI. Orlando: SPIE, 1997
- 80 Shen D, Jia B, Chen G, et al. Pursuit-evasion games with information uncertainties for elusive orbital maneuver and space object tracking. In: Proceedings Volume 9469, Sensors and Systems for Space Applications VIII. Baltimore, 2015
- 81 Shannon C E. A mathematical theory of communication. *Bell Syst Tech J*, 1948, 27: 379–423
- 82 Eva C, Quincampoix M, Saint-Pierre P. Pursuit evasion games with impulsive dynamics. In: Jørgensen S, Quincampoix M, Vincent T L, eds. Advances in Dynamic Game Theory. Annals of the International Society of Dynamic Games, vol 9. Boston: Birkhäuser, 2007. 223–247
- 83 Kelley H J, Cliff E M, Lutze F H. Pursuit evasion in orbit. *J Astronaut Sci*, 1981, 29: 277–288
- 84 Venigalla C, Scheeres D J. Space rendezvous and pursuit/evasion analysis using reachable sets. In: 2018 Space Flight Mechanics Meeting. Kissimmee, 2018
- 85 Yu D T. Approaches for spacecraft security defense and evasion maneuver method (in Chinese). Changsha: National University of Defense Technology, 2017 [于大腾. 空间飞行器安全防护规避机动方法研究. 长沙: 国防科技大学, 2017]
- 86 Liu Y, Li R, Hu L, et al. Optimal solution to orbital three-player defense problems using impulsive transfer. *Soft Comput*, 2018, 22: 2921–2934
- 87 Yu B S, Geng L L, Wen H, et al. Ground-based experiments of tether deployment subject to an analytical control law. *Acta Astronaut*, 2018, 151: 253–259

Survey on spacecraft orbital pursuit-evasion differential games

LUO YaZhong, LI ZhenYu & ZHU Hai

College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China

Orbital pursuit-evasion (PE) of spacecraft has drawn increasingly significant attention from the research community in recent years. This paper surveys the state-of-the-art advances in solutions to the PE problem, particularly focusing on differential game theory methods. First, general mathematical descriptions of the PE game are presented and recent theoretical developments are discussed. Further, major results on spacecraft orbital PE differential games under a wide range of formulations are reviewed, including qualitative, linear quadratic, and free-time games, as well as a game with incomplete or imperfect information and one with impulsive thrust. Finally, we conclude with a discussion of open challenges and directions for future research on spacecraft orbital PE.

orbital pursuit-evasion, differential game, game, survey

doi: [10.1360/SST-2019-0174](https://doi.org/10.1360/SST-2019-0174)