

涉及非线性差分多项式的整函数的周期性*

李效敏, 王靖涵

(中国海洋大学数学科学学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 本文在超级小于1的条件下利用差分 Nevanlinna 理论研究了涉及一类非线性差分多项式的整函数的周期性问题, 本文的主要结果是2020年吕巍然等人的有关结果的差分版本。

关键词: 差分 Nevanlinna 理论; 非线性差分多项式; 整函数; 周期性

中图法分类号: O174.52

文献标志码: A

文章编号: 1672-5174(2022)07 II-096-06

DOI: 10.16441/j.cnki.hdxh.20220030

引用格式: 李效敏, 王靖涵. 涉及非线性差分多项式的整函数的周期性[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版), 2022, 52(增 I): 96-101.

Li Xiaomin, Wang Jinghan. On the periodicity of entire functions of nonlinear difference polynomials[J]. Periodical of Ocean University of China, 2022, 52(Sup. I): 96-101.

1 引言和主要结果

本文假定读者熟悉 Nevanlinna 理论的基本概念^[1-2], 例如 $T(r, f)$, $m(r, f)$, $N(r, f)$ 和 $\bar{N}(r, f)$ 等, 这里 f 是复平面上非常数的亚纯函数。本文用 $E \subset (0, \infty)$ 表示对数测度有穷的集合, 每次出现时可以不同。用 $S(r, f)$ 表示当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时满足 $S(r, f) = o(T(r, f))$ 的量, 有关差分多项式的定义参考文献^[3], 另外我们还需要下述定义:

定义 1^[4] 设 f 是一个非常数的亚纯函数, 其级和超级分别用 $\rho(f)$ 和 $\rho_2(f)$ 表示, 它们的定义如下:

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r},$$
$$\rho_2(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

定义 2^[2] 设 f 与 g 为非常数的亚纯函数, a 为 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上的任意给定的复数, $\bar{N}_E(r, a, f, g)$ 表示 $f - a$ 与 $g - a$ 在 $|z| < r$ 内的具有相同重数的公共零点的计数函数, 且每个零点仅计一次, 若

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) - \bar{N}_E(r, a, f, g) = S(r, f),$$
$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{g-a}\right) - \bar{N}_E(r, a, f, g) = S(r, g),$$

则称 f 与 g CM* 分担 a 。

2018年, 王琮与扈培础^[5]介绍了近期杨重骏的下

述猜想:

猜想 1^[5] 设 $f(z)$ 是一个超越整函数, k 为正整数, 若 $f^{(k)}$ 是一个周期函数, 那么 f 也是周期函数。

最近, 刘凯、卫玉明和于培勇^[6]考虑了下述更一般的猜想:

猜想 2^[6] 设 f 是一个超越整函数, n 和 k 是两个正整数, 若 $f^n f^{(k)}$ 是一个周期函数, 那么 f 也是周期函数。

近几年来国内外学者针对上述猜想及其差分类似问题进行了深入研究, 并取得了一系列有趣的研究成果^[5-8]。2020年吕蔚然和张晓雪^[9]研究了涉及非线性微分多项式的整函数的周期性问题, 并证明了下述定理:

定理 1^[9] 设 f 是一个超越整函数, 其超级 $\rho_2(f) < 1$, $n \geq 2$ 和 $k \geq 1$ 均为正整数。若 $f^n + a_1 f' + \cdots + a_k f^{(k)}$ 为周期函数, 其中 $a_1, \cdots, a_k$ 为常数, 那么 f 也是周期函数。

针对定理1, 人们自然提出下述问题:

问题 1 假设 f 是一个超越整函数, 其超级 $\rho_2(f) < 1$, $n \geq 2$ 为正整数, $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_m$ 为 $m+1$ 个判别的有穷复数, 若 $f^n(z) + \sum_{j=0}^m a_j f(z + \eta_j)$ 是周期为 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的整函数, 其中 $\{a_j\}$ 是不全为0的有穷复数, 那么 f 是否也是周期函数?

本文解决了问题1并证明了下述定理:

* 基金项目: 中央高校基本科研业务费专项(3016000841964007); 山东省自然科学基金项目(ZR2019MA029)资助

Supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities(3016000841964007); the Natural Science Foundation of Shandong Province(ZR2019MA029)

收稿日期: 2022-01-11; 修订日期: 2022-04-03

作者简介: 李效敏(1967—), 男, 教授。E-mail: lixiaomin@ouc.edu.cn

定理 2 设 f 是一个超越整函数, 其超级 $\rho_2(f) < 1$, $n \geq 2$ 为正整数, $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m$ 为 $m+1$ 个判别的有穷复数, 若 $f^n(z) + \sum_{j=0}^m a_j f(z + \eta_j)$ 是周期为 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的函数, 其中 a_j 是不全为 0 的有穷复数, 那么 f 也是周期函数, 并且下述情形之一发生:

(i) $n=2$ 时, 若 $f(z+c) - f(z) \equiv 0$, 那么 f 是周期为 c 的整函数; 若 $f(z+c) - f(z) \not\equiv 0$, 那么 f 是周期为 $2c$ 的整函数。

(ii) $n=3$ 时, 若 $f(z+c) - f(z) \equiv 0$, 那么 f 是周期为 c 的整函数; 若 $f(z) - f(z+2c) \equiv 0$, 那么 f 是周期为 $2c$ 的函数; 否则 f 是周期为 $3c$ 的整函数。

(iii) $n \geq 4$ 时, 若 $f(z+c) - f(z) \equiv 0$, 那么 f 是周期为 c 的整函数; 若 $f(z+c) - f(z) \not\equiv 0$, 那么 f 是周期为 $-nc$ 的整函数。

2 几个引理

为了证明定理 2, 首先介绍下述引理, 该引理刻画了超级小于 1 条件下的对数导数引理的差分模拟。

引理 1^[10] 设 f 是一个非常数的亚纯函数, 若 f 的超级

$$\rho_2(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} < 1,$$

则对任意的 $\varepsilon > 0$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) = o\left(\frac{T(r, f)}{r^{1-\rho_2(f)-\varepsilon}}\right),$$

其中 $E \subset (0, \infty)$ 是一个对数测度有穷的集合。

引理 2^[10] 设 $T: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 是一个非减的连续函数, $s \in (0, +\infty)$, 若 T 的超级小于 1, 即

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r)}{\log r} = \zeta < 1,$$

则对任意的 $\delta \in (0, 1-\zeta)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$T(r+s) = T(r) + o\left(\frac{T(r)}{r^\delta}\right),$$

其中 $E \subset (0, \infty)$ 是一个对数测度有穷的集合。

下述引理来自仪洪勋和杨重骏^[2]:

引理 3^[2] 设 f_j 为复平面上的亚纯函数, $1 \leq j \leq n$ 。对于任意的 $1 \leq k \leq n-1$, f_k 不恒为常数。且满足 $\sum_{j=1}^n f_j \equiv 1$, 其中 $n \geq 3$ 。如果 $f_n \not\equiv 0$, 且存在一个线性测度无穷的集合 $I \subset (0, +\infty)$, 当 $r \in I$ 且 $r \rightarrow +\infty$ 时有

$$\sum_{j=1}^n N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + (n-1) \sum_{j=1}^n \overline{N}(r, f_j) <$$

$(\lambda + o(1)) T(r, f_k)$, $1 \leq k \leq n-1$, $\lambda < 1$, 那么 $f_n \equiv 1$ 。

3 定理 2 的证明

首先假设 $f^n(z) + \sum_{j=0}^m a_j f(z + \eta_j)$ 是周期为 $c \in$

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的整函数, 那么

$$f^n(z+c) - f^n(z) =$$

$$\sum_{j=0}^m a_j (f(z + \eta_j) - f(z + \eta_j + c)). \quad (1)$$

下面我们分 3 种情形来讨论:

情形 1 $n=2$ 时, (1) 式变为

$$f^2(z+c) - f^2(z) =$$

$$(f(z+c) + f(z))(f(z+c) - f(z)) =$$

$$\sum_{j=0}^m a_j (f(z + \eta_j) - f(z + \eta_j + c)). \quad (2)$$

若 $f(z+c) - f(z) \equiv 0$, 那么 f 是周期为 c 的整函数, 于是定理 2 的结论 (i) 成立。以下假设 $f(z+c) - f(z) \not\equiv 0$, (2) 式两边同除以 $f(z+c) - f(z)$ 可得

$$f(z+c) + f(z) =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\sum_{j=0}^m a_j (f(z + \eta_j) - f(z + \eta_j + c))}{f(z) - f(z+c)} = \\ & - \sum_{j=0}^m a_j \frac{g(z + \eta_j)}{g(z)} = - \sum_{j=0}^m a_j h_j(z) =: \\ & H_0(z). \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$g(z) = f(z) - f(z+c), \quad (4)$$

$$h_j(z) = \frac{g(z + \eta_j)}{g(z)}, 0 \leq j \leq m. \quad (5)$$

另一方面, 由 (4) 式和引理 1 可知, 存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} m(r, g(z)) &= m\left(r, f(z) \left(1 - \frac{f(z+c)}{f(z)}\right)\right) \leq \\ & m(r, f(z)) + o\left(\frac{T(r, f)}{r^{1-\rho_2(f)-\varepsilon}}\right) \leq \\ & 2m(r, f(z)). \end{aligned} \quad (6)$$

由 (6) 式和文献 [4] 中的引理 1.1.2 可知, 对于取定的正数 $\alpha > 1$ 且满足 $\alpha \rho_2(f) < 1$, 存在充分大的正数 r_0 , 当 $r \geq r_0$ 时有

$$m(r, g(z)) \leq 2m(r^\alpha, f(z)).$$

从而

$$\rho_2(g) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, g)}{\log r} =$$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log m(r, g)}{\log r} \leq$$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log 2m(r^\alpha, f)}{\log r} = \alpha \rho_2(f) < 1.$$

结合引理 1 和引理 2 可知, 存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$m\left(r, \frac{g(z + \eta_j)}{g(z)}\right) = o\left(\frac{T(r, g)}{r^{1-\rho_2(g)-\varepsilon}}\right) = o(T(r, f)). \quad (7)$$

结合 (3) 式和 (7) 式可得, 存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$T(r, H_0) = m(r, H_0) = m\left(r, -\sum_{j=0}^m a_j \frac{g(z+\eta_j)}{g(z)}\right) = o(T(r, f)). \quad (8)$$

另一方面,由(3)式和(4)式可得

$$f(z) = \frac{H_0(z) + g(z)}{2}, \quad (9)$$

$$f(z+c) = \frac{H_0(z) - g(z)}{2}. \quad (10)$$

由(9)式和(10)式可得

$$g(z) + g(z+c) = H_0(z) - H_0(z+c). \quad (11)$$

分别用 $z+\eta_0, z+\eta_1, \dots, z+\eta_m$ 代替(11)式中的 z 得到

$$\begin{cases} g(z+\eta_0) + g(z+\eta_0+c) = \\ H_0(z+\eta_0) - H_0(z+\eta_0+c), \\ g(z+\eta_1) + g(z+\eta_1+c) = \\ H_0(z+\eta_1) - H_0(z+\eta_1+c), \\ \vdots \\ g(z+\eta_m) + g(z+\eta_m+c) = \\ H_0(z+\eta_m) - H_0(z+\eta_m+c). \end{cases} \quad (12)$$

将(5)式代入(12)式,并且每行等式两边同乘以 $a_j, 0 \leq j \leq m$, 得到

$$\begin{cases} a_0 h_0(z) g(z) + a_0 h_0(z+c) g(z+c) = \\ a_0 H_0(z+\eta_0) - a_0 H_0(z+\eta_0+c), \\ a_1 h_1(z) g(z) + a_1 h_1(z+c) g(z+c) = \\ a_1 H_0(z+\eta_1) - a_1 H_0(z+\eta_1+c), \\ \vdots \\ a_m h_m(z) g(z) + a_m h_m(z+c) g(z+c) = \\ a_m H_0(z+\eta_m) - a_m H_0(z+\eta_m+c). \end{cases} \quad (13)$$

(13)式两边相加,结合(3)式得到

$$H_0(z) g(z) + H_0(z+c) g(z+c) = -\sum_{j=0}^m a_j (H_0(z+\eta_j) - H_0(z+\eta_j+c)). \quad (14)$$

由(11)式可得

$$g(z+c) = H_0(z) - H_0(z+c) - g(z), \quad (15)$$

将(15)式代入(14)式得到

$$\begin{aligned} g(z) (H_0(z) - H_0(z+c)) = \\ -\sum_{j=0}^m a_j (H_0(z+\eta_j) - H_0(z+\eta_j+c)) - \\ H_0(z+c) H_0(z) + H_0^2(z+c). \end{aligned} \quad (16)$$

若 $H_0(z) - H_0(z+c) \neq 0$, (16)式两边同除以 $H_0(z) - H_0(z+c)$ 可得

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{-\sum_{j=0}^m a_j (H_0(z+\eta_j) - H_0(z+\eta_j+c))}{H_0(z) - H_0(z+c)} + \\ \frac{-H_0(z+c) H_0(z) + H_0^2(z+c)}{H_0(z) - H_0(z+c)}. \end{aligned} \quad (17)$$

类似(8)式的推导可知,存在某个对数测度有穷的

集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} T(r, f(z) - f(z+c)) = m(r, f(z) - f(z+c)) = \\ m(r, g(z)) = o(T(r, f)). \end{aligned} \quad (18)$$

另一方面,由(3)式和(8)式可知,存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} T(r, f(z+c) + f(z)) = T(r, H_0(z)) = o(T(r, f)), \\ \text{该式结合(18)式可知,存在某个对数测度有穷的集合} \\ E \subset (0, \infty), \text{当 } r \notin E \text{ 且 } r \rightarrow \infty \text{ 时有} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(r, f(z)) = \\ T\left(r, \frac{(f(z+c) + f(z))(f(z+c) - f(z))}{2}\right) = \\ o(T(r, f)), \end{aligned}$$

这与 f 为超越整函数矛盾,于是 $H_0(z) \equiv H_0(z+c)$, 即 $f(z+2c) \equiv f(z)$, 于是 f 是周期为 $2c$ 的函数,那么定理2的结论(i)成立。

情形2 $n=3$ 时, (1)式变为

$$\begin{aligned} f^3(z+c) - f^3(z) = \\ (f^2(z+c) + f(z+c)f(z) + f^2(z)) \cdot \\ (f(z+c) - f(z)) = \\ (f(z+c) - \omega f(z))(f(z+c) - \overline{\omega} f(z)) \cdot \\ (f(z+c) - f(z)) = \\ \sum_{j=0}^m a_j (f(z+\eta_j) - f(z+\eta_j+c)), \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 。若 $f(z+c) - f(z) \equiv 0$, 那么 f 是周期为 c 的函数, 于是定理2的结论(ii)成立。以下假设 $f(z+c) - f(z) \not\equiv 0$, (19)式两边同除以 $f(z+c) - f(z)$ 可得

$$\begin{aligned} f^2(z+c) + f(z+c)f(z) + f^2(z) = \\ (f(z+c) - \omega f(z))(f(z+c) - \overline{\omega} f(z)) = \\ -\frac{\sum_{j=0}^m a_j (f(z+\eta_j) - f(z+\eta_j+c))}{f(z) - f(z+c)} =: \\ H_0(z), \end{aligned} \quad (20)$$

结合(8)式可知,存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$T(r, H_0) = m(r, H_0) = o(T(r, f)), \quad (21)$$

于是由(21)式可知,当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} 2m\left(r, \frac{1}{f(z)}\right) = m\left(r, \frac{1}{f^2(z)}\right) = \\ m\left(r, \frac{H_0(z)}{f^2(z)} \cdot \frac{1}{H_0(z)}\right) \leq \\ m\left(r, 1 + \frac{f(z+c)}{f(z)} + \frac{f^2(z+c)}{f^2(z)}\right) + \\ m\left(r, \frac{1}{H_0(z)}\right) = o(T(r, f)). \end{aligned} \quad (22)$$

由(22)式和第一基本定理可知,当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时

$$N\left(r, \frac{1}{f(z)}\right) = T(r, f(z)) + o(T(r, f)). \quad (23)$$

由 Weierstrass 定理^[11] 知, 存在整函数 $\alpha(z)$, $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$, 有

$$f(z+c) - \omega f(z) = H_1(z) e^{\alpha(z)}, \quad (24)$$

$$\overline{\omega} f(z+c) - \overline{\omega} f(z) = H_2(z) e^{-\alpha(z)}, \quad (25)$$

并且 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 满足

$$H_1(z) H_2(z) = H_0(z). \quad (26)$$

若 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 中有 1 个恒为 0, 那么 f 是周期为 $3c$ 的函数, 定理 2 的结论 (ii) 成立。以下假设 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 均不恒为 0。由 (24) 和 (25) 式可得

$$f(z) = \frac{H_1(z) e^{\alpha(z)} - H_2(z) e^{-\alpha(z)}}{\omega - \overline{\omega}}, \quad (27)$$

$$f(z+c) = \frac{\overline{\omega} H_1(z) e^{\alpha(z)} - \omega H_2(z) e^{-\alpha(z)}}{\omega - \overline{\omega}}. \quad (28)$$

由 (27) 和 (28) 式可得

$$\begin{aligned} H_1(z+c) e^{\alpha(z+c)} - H_2(z+c) e^{-\alpha(z+c)} = \\ \overline{\omega} H_1(z) e^{\alpha(z)} - \omega H_2(z) e^{-\alpha(z)}. \end{aligned} \quad (29)$$

(29) 式两边同除以 $\omega H_2(z) e^{-\alpha(z)}$ 并移项得

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\omega} H_1(z) e^{2\alpha(z)}}{\omega H_2(z)} - \frac{H_1(z+c) e^{\alpha(z)+\alpha(z+c)}}{\omega H_2(z)} + \\ \frac{H_2(z+c) e^{\alpha(z)-\alpha(z+c)}}{\omega H_2(z)} = 1. \end{aligned} \quad (30)$$

假设存在一个对数测度无穷的集合 $I \subset (0, \infty)$, 使得当 $r \in I$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$T\left(r, \frac{H_1(z) e^{2\alpha(z)}}{H_2(z)}\right) = o(T(r, f)), \quad (31)$$

即

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{H_1(z) e^{\alpha(z)}}{H_2(z) e^{-\alpha(z)}}\right) &= T\left(r, \frac{f(z+c) - \omega f(z)}{f(z+c) - \overline{\omega} f(z)}\right) = \\ T\left(r, \frac{\frac{f(z+c)}{f(z)} - \omega}{\frac{f(z+c)}{f(z)} - \overline{\omega}}\right) &= T\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) + \\ S\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) &= o(T(r, f)). \end{aligned} \quad (32)$$

由 (32) 式和引理 1 知, 存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$N\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) = o(T(r, f)), \quad (33)$$

由 (33) 式可得, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f(z)}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f(z+c)}\right) - \\ 2 \overline{N}_E(r, 0, f(z), f(z+c)) = o(T(r, f)). \end{aligned} \quad (34)$$

由 (34) 式可知, $f(z)$ 与 $f(z+c)$ CM* 分担 0。结合 (23)、(24) 和 (34) 式可知, 存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{H_1(z)}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f(z+c) - \omega f(z)}\right) \geq \\ N_E(r, 0, f(z), f(z+c)) &= \\ N\left(r, \frac{1}{f(z)}\right) + o(T(r, f)) &= \\ T(r, f(z)) + o(T(r, f)). \end{aligned} \quad (35)$$

同理可得, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$N\left(r, \frac{1}{H_2(z)}\right) \geq T(r, f(z)) + o(T(r, f)). \quad (36)$$

由 (26) 式可知, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} T(r, H_0(z)) &\geq N\left(r, \frac{1}{H_0(z)}\right) = \\ N\left(r, \frac{1}{H_1(z)}\right) + N\left(r, \frac{1}{H_2(z)}\right) &\geq \\ 2T(r, f(z)) + o(T(r, f)). \end{aligned} \quad (37)$$

这与 (21) 式矛盾, 于是存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$T\left(r, \frac{H_1(z) e^{2\alpha(z)}}{H_2(z)}\right) \neq o(T(r, f)). \quad (38)$$

下面我们考虑两种子情形:

子情形 2.1 假设存在某个对数测度无穷的集合 $I \subset (0, \infty)$, 使得当 $r \in I$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$T\left(r, -\frac{H_1(z+c) e^{\alpha(z)+\alpha(z+c)}}{\omega H_2(z)}\right) = o(T(r, f)), \quad (39)$$

那么由 (30) 式可知, 当 $r \in I$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$T\left(r, \frac{H_2(z+c) e^{\alpha(z)-\alpha(z+c)}}{\omega H_2(z)}\right) \neq o(T(r, f)), \quad (40)$$

结合 (38)、(39)、(40) 式和引理 3 可得

$$-\frac{H_1(z+c) e^{\alpha(z)+\alpha(z+c)}}{\omega H_2(z)} \equiv 1, \quad (41)$$

$$\frac{H_2(z+c) e^{\alpha(z)-\alpha(z+c)}}{\omega H_2(z)} + \frac{\overline{\omega} H_1(z) e^{2\alpha(z)}}{\omega H_2(z)} \equiv 0. \quad (42)$$

由 (41) 和 (42) 式可得

$$H_1(z+c) H_2(z+c) = H_1(z) H_2(z). \quad (43)$$

子情形 2.2 设存在某个对数测度无穷的集合 $I \subset (0, \infty)$, 使得当 $r \in I$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$T\left(r, \frac{H_2(z+c) e^{\alpha(z)-\alpha(z+c)}}{\omega H_2(z)}\right) = o(T(r, f)), \quad (44)$$

那么由 (30) 式可知, 当 $r \in I$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$T\left(r, -\frac{H_1(z+c) e^{\alpha(z)+\alpha(z+c)}}{\omega H_2(z)}\right) \neq o(T(r, f)). \quad (45)$$

结合 (38)、(44)、(45) 式和引理 3 可得

$$\frac{H_2(z+c) e^{\alpha(z)-\alpha(z+c)}}{\omega H_2(z)} \equiv 1, \quad (46)$$

$$-\frac{H_1(z+c) e^{\alpha(z)+\alpha(z+c)}}{\omega H_2(z)} + \frac{\overline{\omega} H_1(z) e^{2\alpha(z)}}{\omega H_2(z)} \equiv 0, \quad (47)$$

由 (46) 和 (47) 式即得 (43) 式, 即有

$$H_0(z+c) \equiv H_0(z). \quad (48)$$

将 $H_0(z) = f^2(z+c) + f(z+c)f(z) + f^2(z)$ 代入(48)式,得到

$$(f(z+2c) + f(z))(f(z+2c) - f(z)) = f(z+c)(f(z) - f(z+2c)). \quad (49)$$

若 $f(z) - f(z+2c) \equiv 0$, 那么 f 是周期为 $2c$ 的函数, 于是定理 2 的结论(ii)成立; 若 $f(z+c) - f(z+2c) \not\equiv 0$, 由(49)式得到

$$f(z+2c) + f(z+c) + f(z) \equiv 0. \quad (50)$$

用 $z-c$ 替换(50)式中的 z , 得到

$$f(z+c) + f(z) + f(z-c) \equiv 0. \quad (51)$$

由(50)和(51)式可得 $f(z+2c) \equiv f(z-c)$, 那么 f 是周期为 $3c$ 的函数, 定理 2 的结论(ii)成立。

情形 3 $n \geq 4$ 时, (1)式可写为

$$\begin{aligned} f^n(z+c) - f^n(z) &= (f(z+c) - f(z)) \cdot \\ & (f^{n-1}(z+c) + f^{n-2}(z+c)f(z) + \cdots + f^{n-1}(z)) = \\ & \sum_{j=0}^m a_j (f(z+\eta_j) - f(z+\eta_j+c)), \end{aligned} \quad (52)$$

若 $f(z+c) - f(z) \equiv 0$, 则 f 是周期为 c 的函数, 于是定理 2 的结论(iii)成立。以下假设 $f(z+c) - f(z) \not\equiv 0$, (52)式写为

$$\begin{aligned} f^{n-1}(z+c) + f^{n-2}(z+c)f(z) + \cdots + f^{n-1}(z) = \\ - \frac{\sum_{j=0}^m a_j (f(z+\eta_j) - f(z+\eta_j+c))}{f(z) - f(z+c)} =: \\ H_0(z). \end{aligned} \quad (53)$$

由(8)和(53)式可知, 存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$T(r, H_0) = m(r, H_0) = o(T(r, f)). \quad (54)$$

$$\text{令 } g(z) = \frac{f(z+c)}{f(z)}, \quad (55)$$

将(55)式代入(53)式, 得到

$$\sum_{j=1}^{n-1} g^j(z) + 1 = \frac{H_0(z)}{f^{n-1}(z)}. \quad (56)$$

由(54)和(56)式可知, 存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$N\left(r, \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} g^j + 1}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{H_0}\right) = o(T(r, f)). \quad (57)$$

另一方面, 由引理 2 可知, 存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} T(r, g(z)) &= T\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}\right) \leq \\ T(r, f(z+c)) &+ T(r, f(z)) + O(1) = \\ 2T(r, f(z)) &+ o(T(r, f)). \end{aligned}$$

由此得

$$S(r, g) = o(T(r, f)). \quad (58)$$

假设 g 不恒为常数, 由(57)、(58)式和第二基本定

理可知, 存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} (n-2)T(r, g) &\leq \\ N\left(r, \frac{1}{g-1}\right) &+ N\left(r, \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} g^j + 1}\right) + S(r, g) = \\ N\left(r, \frac{1}{g-1}\right) &+ o(T(r, f)) \leq \\ T(r, g) &+ o(T(r, f)). \end{aligned} \quad (59)$$

由 $n \geq 4$ 和(59)式可得, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有

$$T(r, g) = o(T(r, f)). \quad (60)$$

由假设知 g 不恒为常数, 有 $\sum_{j=1}^{n-1} g^j(z) + 1 \not\equiv 0$.

于是由(56)式可得

$$f^{n-1}(z) = \frac{H_0(z)}{\sum_{j=1}^{n-1} g^j(z) + 1}. \quad (61)$$

由(60)和(61)式可得

$$(n-1)T(r, f) = (n-1)m(r, f) \leq$$

$$m(r, H_0) + m\left(r, \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} g^j + 1}\right) = o(T(r, f)),$$

这与 f 为超越整函数矛盾, 从而 g 一定为常数, 下面分两种情形讨论:

子情形 3.1 假设 g 为常数且有 $1 + \sum_{j=1}^{n-1} g^j \neq 0$, 则(56)

式改写为 $(\sum_{j=1}^{n-1} g^j + 1)f^{n-1}(z) = H_0(z)$, 结合(54)式可知, 存在某个对数测度有穷的集合 $E \subset (0, \infty)$, 当 $r \notin E$ 且 $r \rightarrow \infty$ 时有 $(n-1)T(r, f) = T(r, H_0) = o(T(r, f))$, 这与 f 为超越整函数矛盾。

子情形 3.2 假设 g 为常数且有 $1 + \sum_{j=1}^{n-1} g^j = 0$, 于是 $g^n - 1 = (g-1)(\sum_{j=1}^{n-1} g^j + 1) = 0$. 即

$$\frac{f(z+c)}{f(z)} = \omega^j,$$

其中 $1 \leq j \leq n-1$, $\omega = \cos \frac{2\pi j}{n} + j \sin \frac{2\pi j}{n}$. 那么 $f(z+c) = \omega^j f(z) = \cdots = \omega^{nj} f(z - (n-1)c) = f(z - (n-1)c)$, 说明 f 是周期为 $-nc$ 的整函数, 于是定理 2 的结论(iii)成立。

参考文献:

- [1] Hayman W K. Meromorphic Functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [2] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数的唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
Yi HX, Yang C C. Uniqueness Theory of Meromorphic Functions [M]. Beijing: Science Press, 1995.
- [3] Laine I, Yang C C. Value distribution of difference polynomials[J]. Japan Academy Proceedings Series A Mathematical Sciences,

- 2007, 83(8): 148-151.
- [4] Laine I. Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.
- [5] 王琮, 扈培础. 关于整函数零点和周期性的研究[J]. 数学物理学报, 2018, 38(2): 209-214.
- Wang Q, Hu P C. On zeros and periodicity of entire functions[J]. Acta Mathematica Scientia, 2018, 38(2): 209-214.
- [6] Liu K, Wei Y M, Yu P Y. Generalized Yang's conjecture on the periodicity of entire functions[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2020, 57(5): 1259-1267.
- [7] Liu K, Yu P Y. A note on the periodicity of entire functions[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2019, 100(2): 290-296.
- [8] Liu X L, Korhonen R. On the periodicity of transcendental entire functions[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2020, 101(3): 453-465.
- [9] Lü W R, Zhang X X. On the periodicity of entire functions[J]. Results in Mathematics, 2020, 75(4): 176.
- [10] Halburd R, Korhonen R, Tohge K. Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2014, 366: 4267-4298.
- [11] Ahlfors L. Complex Analysis[M]. New York: McGraw Hill, 1979.

On the Periodicity of Entire Functions of Nonlinear Difference Polynomials

Li Xiaomin, Wang Jinghan

(School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: In this paper, under the condition of hyper-order less than one, the periodicity of entire functions concerning a class of nonlinear difference polynomials is studied by using the difference Nevanlinna's theory. The main result of this paper is the difference counterpart of the related result given by Lü Weiran et al in 2020.

Key words: difference Nevanlinna's theory; nonlinear difference polynomial; entire function; periodicity

AMS Subject Classifications: 30D35; 39A10

责任编辑 朱宝象