不可扩展直积基的新进展

献给冯克勤教授 80 华诞

张一炜¹, 石飞², 张先得³, 杨亦挺⁴, 葛根年^{5*}

1. 山东大学教育部密码技术与信息安全重点实验室, 山东大学网络空间安全学院, 青岛 266237;

2. 中国科学技术大学网络空间安全学院, 合肥 230026;

3. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026;

4. 同济大学数学科学学院, 上海 200092;

5. 首都师范大学数学科学学院, 北京 100048

E-mail: ywzhang@sdu.edu.cn, shifei@mail.ustc.edu.cn, drzhangx@ustc.edu.cn, ytyang@tongji.edu.cn, gng@zju.edu.cn

收稿日期: 2020-10-19; 接受日期: 2021-08-17; 网络出版日期: 2021-09-17; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12001323, 11771419 和 11971325)、量子信息技术安徽省引导性项目 (批准号: AHY150200)、国家重点研发计划“变革性技术关键科学问题”重点专项 (批准号: 2020YFA0712100 和 2018YFA0704703) 和北京学者计划资助项目

摘要 不可扩展直积基 (unextendible product bases, UPB) 是量子信息中的重要概念, 在量子信息的诸多领域有着广泛的应用. UPB 的构造与组合数学有着密切的联系, 著名组合学家 Alon 和 Lovász 利用一系列图论工具率先刻画了一组 UPB 态的数目达到平凡下界时的充分必要条件, 进而冯克勤先生将图的 1- 因子分解等工具引入到此问题的研究之中. 本文继续利用图论工具, 在部分参数下得到了 UPB 最小态数目问题的一系列新结果. 此外, 本文对 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k$ 中的所有 UPB 态的数目的可能取值做了近乎完全的刻画.

关键词 不可扩展直积基 量子信息 正交表示 连通性 循环图 1- 因子分解

MSC (2020) 主题分类 81P45, 05C90, 05B99

1 引言

令 $\mathbb{C}$ 代表复数域. 在 Hilbert 空间 $\bigotimes_{i=1}^m \mathbb{C}^{k_i}$ 中的一个纯态 v , 如果可以写成 $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m$ 这样的形式, 其中每个向量 $v_i \in \mathbb{C}^{k_i}$, 则称这个纯态 v 为一个直积态. 如果这样的分解不存在, 则称其为纠缠态. 对于 $\bigotimes_{i=1}^m \mathbb{C}^{k_i}$ 中的两个直积态 $u = u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_m$ 和 $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m$, 定义它们的内积为

$$(u, v) = \prod_{i=1}^m (u_i, v_i),$$

于是 $(u, v) = 0$ 当且仅当存在至少一个指标 i 使得 $(u_i, v_i) = 0$.

英文引用格式: Zhang Y W, Shi F, Zhang X D, et al. New results on unextendible product bases (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1699–1714, doi: 10.1360/SSM-2020-0303

文献 [1] 首次提出了不可扩展直积基这一概念. 在 $\bigotimes_{i=1}^m \mathbb{C}^{k_i}$ ($k_i \geq 2$) 中的一个不可扩展直积基 (unextendible product bases, UPB), 是此 Hilbert 空间中由若干非零的直积态所组成的集合 $\mathcal{F}$, 满足以下两个条件:

- (正交限定) $\mathcal{F}$ 中的任何两个直积态是正交的;
- (不可扩展限定) 不存在 $\bigotimes_{i=1}^m \mathbb{C}^{k_i}$ 中的一个非零直积态, 与 $\mathcal{F}$ 中所有直积态正交.

换言之, $\mathcal{F}$ 是一组极大的正交直积态, 在其补空间中不允许再有额外的直积态与 $\mathcal{F}$ 中的每一个直积态都保持正交. UPB 在量子信息领域扮演着重要的角色, 它能用来构造束缚纠缠态^[1-3] 和不可分解的正定映射^[4]. UPB 也展示了无纠缠的非局域性^[5] 和无量子违反的 Bell 不等式^[6]. 进一步地, 不可扩展最大纠缠基^[7] 和固定 Schmidt 数的不可扩展纠缠基^[8,9] 等概念都是 UPB 这一概念的自然推广. 因此, UPB 的研究在量子信息的多个领域中都具有重要的理论意义.

每个 $\mathbb{C}^{k_i}$ 被称为一个局部空间. 取每个局部空间中的一组正交基, 则可得到整个 Hilbert 空间 $\bigotimes_{i=1}^m \mathbb{C}^{k_i}$ 中的一组平凡的 UPB, 显然它包含了 $\prod_{i=1}^m k_i$ 个态. 然而, 在 UPB 的相关量子信息应用中, 更需要研究的是其他非平凡的 UPB, 尤其是所包含的态的数目最小的 UPB 的构造与相关性质. 记 $f(k_1, \dots, k_m)$ 为 $\bigotimes_{i=1}^m \mathbb{C}^{k_i}$ 中的规模最小的 UPB 所包含的态的数目. 文献 [1] 在提出 UPB 的定义的同时也提出了关于此数目的一个平凡下界. 由于本文将多次借鉴此引理的分析思路, 我们在此简述一下此引理的证明过程.

引理 1.1

$$f(k_1, k_2, \dots, k_m) \geq \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 1.$$

证明 假设 $\mathcal{F}$ 仅包含 $\mathbf{v}^{(j)} = \mathbf{v}_1^{(j)} \otimes \mathbf{v}_2^{(j)} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_m^{(j)}$, $\mathbf{v}_i^{(j)} \in \mathbb{C}^{k_i}$, $1 \leq j \leq \sum_{i=1}^m (k_i - 1)$, 这 $\sum_{i=1}^m (k_i - 1)$ 个态. 我们将指标集 $J = \{1, 2, \dots, \sum_{i=1}^m (k_i - 1)\}$ 划分为 m 个两两不交的子集 $J_1, J_2, \dots, J_m$, 使得 $|J_i| = k_i - 1$ ($1 \leq i \leq m$), 则可找到一个非零向量 $\mathbf{u}_i \in \mathbb{C}^{k_i}$ 与 $\{\mathbf{v}_i^{(j)}\}_{j \in J_i}$ 正交, 因为 $\{\mathbf{v}_i^{(j)}\}_{j \in J_i}$ 这族向量仅能张成局部空间 $\mathbb{C}^{k_i}$ 的一个非平凡子空间. 进而, 我们得到一个非零直积态 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_m$ 与所有 $\mathbf{v}^{(j)}$ 都正交, 这违背了 UPB 的定义中所要求的不可扩展限定. 于是, $f(k_1, k_2, \dots, k_m) \geq \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 1$ 成立. $\square$

UPB 这一量子信息背景的问题, 本质上与组合数学和图论有着密切的关联. 借助图的正交表示和循环图的连通性等工具, 两位著名组合学家 Alon 和 Lovász^[10] 指出了此平凡下界无法取到等号的充分必要条件:

定理 1.1^[10] 令 $m \geq 2$ 且 $2 \leq k_1 \leq \dots \leq k_m$, 则 $f(k_1, \dots, k_m) > \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 1$ 当且仅当参数 $(k_1, \dots, k_m)$ 满足下述情形之一:

- (1) $m = 2$ 且 $k_1 = 2$;
- (2) $\sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 1$ 为奇数且至少有一个 k_i 为偶数.

Alon 和 Lovász 的奠基性结果, 说明了在大部分参数下平凡下界 $f(k_1, \dots, k_m) = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 1$ 可达到. 对于上述的第一类平凡下界无法达到情形, 冯克勤先生在文献 [11] 中证明了 $f(2, k) = 2k$, 即在 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k$ 中仅存在大小为 $2k$ 的 UPB. 对于第二类平凡下界无法达到情形, 已知

$$f(k_1, k_2, \dots, k_m) \geq \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2,$$

则此目标值是否可取等号即成为了下一步的研究焦点. 冯克勤先生率先对此问题展开攻关, 同样是在文献 [11] 中, 利用图的 1- 因子分解等工具给出了若干结果, 包括 $f(2, 2, 2, 2) = 6$, $f(2^{[4m+2]}) = 4m + 4$,

$f(2, 2, 3) = 6$, $f(2, 2, 5) = 8$, $f(2, 2, 2, 4) = 8$ 和 $f(2, 2, 2, 2, 5) = 10$ 等.

特别地, Johnston^[12, 13] 在冯克勤先生工作的基础上完整解决了在量子比特情形下 UPB 的最小态数目问题, 即每个局部空间都是 $\mathbb{C}^2$ 的情形. 关于 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes t}$ 中的 UPB 最小态数目的结论如下 (需要注意的是, 这其中后两种情形取不到 $t+2$, 这是目前除去 $f(2, k) = 2k$ 之外唯一已知的 $f(k_1, k_2, \dots, k_m) > \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2$ 的例子):

定理 1.2^[10–13] 令 $f(2^{[t]})$ 代表 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes t}$ 中规模最小的 UPB 所包含的态的数目.

- (1) 若 t 为奇数, 则 $f(2^{[t]}) = t + 1$;
- (2) 若 $t = 4$ 或 $t \equiv 2 \pmod{4}$, 则 $f(2^{[t]}) = t + 2$;
- (3) 若 $t = 8$, 则 $f(2^{[t]}) = t + 3$;
- (4) 在其他情形下, $f(2^{[t]}) = t + 4$.

在所有局部空间均为 $\mathbb{C}^2$ 的这一量子比特情形完整解决之后, 自然而然要考虑的下一个情形是仅有一个非二维局部空间的情形. 假设有 $t \geq 2$ 个局部空间 $\mathbb{C}^2$, 另有一个维数为 $s \geq 3$ 的局部空间, 令 $f(2^{[t]}, s)$ 代表此情形下最小的 UPB 的态的数目. 当 $t+s$ 为偶数时, 此问题归结于平凡下界 $f(2^{[t]}, s) = t+s$ 可取等号的情形. 当 $t+s$ 为奇数时, Chen 和 Johnston^[14] 将冯克勤先生的 $f(2, 2, 5) = 8$ 这个结果演化成了如下更一般的结论:

定理 1.3^[14] 对于正整数 k 有

$$f(2, 2, 4k+1) = 4k+4.$$

同时, 文献 [14] 利用代数几何的思想方法给出了额外的一大类结果. 虽然我们相信文献 [14] 中这些结果的正确性, 但是其证明推理过程中需要涉及一个复杂的素理想的判定问题. 本文试图绕过文献 [14] 中的框架, 只单单运用组合学的方法来攻关此问题. 本文将给出一系列新的使得 $f(k_1, k_2, \dots, k_m) = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2$ 成立的参数.

另一个关于 UPB 的重要问题是要列举在一个 Hilbert 空间中的所有 UPB 可能包含的态的数目. 令 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(k_1, k_2, \dots, k_m)$ 为 $\mathbb{C}^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{k_m}$ 中所有 UPB 的态的可能数目的取值集合. 前文所述的平凡的 UPB, 给出了最大值 $k_1 k_2 \dots k_m \in \mathcal{S}$. 文献 [13, 15] 指出, 接下来的 3 个值已被排除, 亦即, $k_1 k_2 \dots k_m - 1, k_1 k_2 \dots k_m - 2, k_1 k_2 \dots k_m - 3 \notin \mathcal{S}$. 截至目前, 只有很少的系统中, UPB 的态的所有可能数目能被完全决定, 这些结果包括冯克勤先生给出的 $\mathcal{S}(2, k) = \{2k\}$ ^[11], 以及 $\mathcal{S}(3, 3) = \{5, 9\}$ ^[16], $\mathcal{S}(2, 2, 2) = \{4, 8\}$ ^[1], $\mathcal{S}(2, 2, 2, 2) = \{6, 7, 8, 9, 10, 12, 16\}$ ^[13], $\mathcal{S}(3, 4) = \{6, 7, 8, 12\}$ ^[17] 等. 文献 [13] 率先给出了量子比特情形下关于 $\mathcal{S}(2^{[t]})$ 的部分刻画, 之后的一系列工作 [18–20] 逐步解决了在 t 较小时 $\mathcal{S}(2^{[t]})$ 的完全刻画. 本文将对 $\mathcal{S}(2, 2, k)$ 给出近乎完全的刻画.

本文包含了我们得到的关于 UPB 的一系列最新进展. 具体包括:

- 如何将冯克勤先生的 $f(2, 2, 3) = 6$ 这一结果推广至任意的 $f(2, 2, 4k-1)$? 这一问题也在文献 [14] 中被 Chen 和 Johnston 列为了 UPB 的研究中下一个需要解决的公开问题. 本文解决了这一公开问题, 严格证明了 $f(2, 2, 4k-1) = 4k+2$.
- 利用纯粹的组方法, 包括图的正交表示、循环图的连通性和图的 1- 因子分解等图论工具, 我们找到了一系列参数, 使得 $f(k_1, k_2, \dots, k_m) = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2$ 成立. 其中, 我们证明了当 $t+s+1$ 是 4 的倍数时, $f(2^{[t]}, s) = t+s+1$. 另外一个更一般化的结果参数较为复杂, 正文将详细展开.
- 最后, 我们对 $\mathcal{S}(2, 2, k)$ 给出近乎完全的刻画, 这一刻画主要依赖于在 k 为偶数时, 我们证明了态的数目为 $k+3$ 的 UPB 的不存在性.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节简要介绍围绕 UPB 的相关术语和几个有用的引理以及分析最小规模 UPB 的构造的基本思路. 第 3 节给出在 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{4k-1}$ 中的态的数目为 $4k+2$ 的 UPB 的构造. 第 4 节介绍一些图论工具, 主要围绕循环图的连通性; 利用这些工具, 得到一系列参数, 使得

$$f(k_1, k_2, \dots, k_m) = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2$$

成立. 第 5 节证明当 k 是偶数时, 在 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k$ 中不存在态的数目为 $k+3$ 的 UPB. 第 6 节基于上面这些结果和递归构造的思想, 给出 $\mathcal{S}(2, 2, k)$ 的近乎完全的刻画. 第 7 节总结全文并列举了一些公开问题.

2 预备工作

给定一个 $\bigotimes_{i=1}^m \mathbb{C}^{k_i}$ 中的态的数目为 n 的 UPB, $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}\}$. 我们可以构造一族图 G_i ($i = 1, \dots, m$) 用来辅助视觉化这族态之间的正交关系. 每个图 G_i 有相同的顶点集 $V = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}\}$, 对应于这组 UPB 中的 n 个态. 与点 $v^{(j)}$ 相对应的态即为

$$\mathbf{v}^{(j)} = \mathbf{v}_1^{(j)} \otimes \mathbf{v}_2^{(j)} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_m^{(j)}, \quad \mathbf{v}_i^{(j)} \in \mathbb{C}^{k_i}.$$

两个顶点 $v^{(j)}$ 和 $v^{(\ell)}$ 在图 G_i 中有一条边相连当且仅当 $(\mathbf{v}_i^{(j)}, \mathbf{v}_i^{(\ell)}) = 0$. 于是图 G_i 实际上代表了第 i 个局部空间上的正交关系, 故而称为这个局部空间上的正交图. 由定义知, 全体正交图的并必须构成整个完全图 K_n . 我们对最小规模 UPB 的分析基本思路包含以下 3 个步骤.

(1) 对于每个局部空间 $\mathbb{C}^{k_i}$, 首先选取一张初始图 H_i . 每张初始图的顶点集 V 包含了 n 个点, 对应于这组 UPB 中的 n 个态, 且所有初始图构成了整个完全图 K_n 的一组不交并.

(2) 在每个局部空间 $\mathbb{C}^{k_i}$ 中, 对初始图 H_i 的每个点赋予一个向量, 使得 H_i 中任意相邻两点所赋予的向量正交. 对每个顶点 $v^{(j)}$, 记其在局部空间 $\mathbb{C}^{k_i}$ 中所赋予的向量为 $\mathbf{v}_i^{(j)}$. 构造一个大小为 n 的 UPB, 其中每个顶点 $v^{(j)}$ 对应的直积态为 $\mathbf{v}^{(j)} = \mathbf{v}_1^{(j)} \otimes \mathbf{v}_2^{(j)} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_m^{(j)}$. 则这个 UPB 的每个正交图 G_i 皆包含初始图 H_i 作为一张子图. 于是全体正交图的并也如预期一样是整个完全图 K_n .

(3) 证明上述构造满足不可扩展限定. 在每个局部空间 $\mathbb{C}^{k_i}$ 中, 对于点集的任一个子集 $W_i \subset V$, 如果它所对应的向量集 $\{\mathbf{v}_i^{(j)} : j \in W_i\}$ 不能张成整个局部空间 $\mathbb{C}^{k_i}$, 则称其为一个不饱和集. 于是可以找到一个非零向量 $\mathbf{u}_i \in \mathbb{C}^{k_i}$ 与 $\{\mathbf{v}_i^{(j)} : j \in W_i\}$ 中的所有向量在 $\mathbb{C}^{k_i}$ 中正交. 证明一个构造的 UPB 确实能满足不可扩展限定, 本质上需要说明, 对于任意一组 $W_1, W_2, \dots, W_m$ 的选取, 其中每个 W_i 是如上所定义的局部空间 $\mathbb{C}^{k_i}$ 上的一个不饱和集, 它们的并集不可以是整个顶点集 V .

以上分析中, 似乎初始图和正交图这两个概念带来了一些冗余, 但我们认为这种严谨的描述是必要的. 初始图构成整个完全图的一组划分, 而在我们为初始图的每个点挑选合适的向量使得每一对相邻顶点上赋予的向量正交时, 还可能同时带来了额外的正交关系. 因此, 为了保持推理的严谨性, 真正描述了这一局部空间的正交关系的图是所谓的正交图, 它一定要包含预设的初始图作为子图. 进而所有正交图的并也是整个完全图, 但可能会在部分边上有重复. 不过, 为了同时满足不可扩展限定, 实际上大部分的正交图都会与所选取的初始图保持严格一致.

需要注意的是, 如果找到了顶点集 V 的一个由不饱和集组成的拆分, 则说明这组态是可以扩展的, 这是我们去证明一组正交直积态不是 UPB 的常用手法 (例如, 引理 1.1 中平凡下界的证明本质即

是说明 $\sum_{i=1}^m (k_i - 1)$ 个点总能拆为一组 $W_1, W_2, \dots, W_m$ 的并, 其中每个大小为 $k_i - 1$ 的点集 W_i 都是局部空间 $\mathbb{C}^{k_i}$ 上的一个不饱和集). 我们将这一思路单独列为一个引理:

引理 2.1 $\bigotimes_{i=1}^m \mathbb{C}^{k_i}$ 中的一族正交直积态 $\{v^{(j)}\}_{j=1}^n$ 是不可扩展的, 当且仅当对任意选取的 $W_1, W_2, \dots, W_m$, 其中每个 W_i 为局部空间 $\mathbb{C}^{k_i}$ 上的一个不饱和集, $\bigcup_{i=1}^m W_i \neq V$.

综上所述, 对于 UPB 的构造既要选取完全图 K_n 合适的分解作为初始图, 又要依照每个初始图在对应的局部空间中赋予合适的向量, 且要满足不可扩展限定. 每个空间中向量的选取过程比较棘手. 在 Lovász 研究图的香农容量的文献 [21] 中所提出的图的正交表示这一概念, 对于 UPB 问题的帮助很大. 给定一张图 $G(V, E)$, 其中 V 代表顶点集, E 代表边集, G 的一个在 $\mathbb{R}^d$ 上的正交表示是一个映射 $f: V \rightarrow \mathbb{R}^d$, 使得不相邻的点上所赋予的向量之间正交. 于是, 基于初始图 H_i 来选择合适的向量, 使正交图 G_i 包含 H_i , 即等价于寻找 H_i 的补图 $\bar{H}_i$ 在 $\mathbb{C}^{k_i}$ 上的一个正交表示. 图的正交表示这一概念与图的连通性密切相关. Lovász 等 [22] 证明了下述结论:

引理 2.2 [22] 令图 G 的顶点数为 n , 则 G 是 k -连通的当且仅当存在图 G 的一个在 $\mathbb{R}^{n-k}$ 上的正交表示, 并且任意 $n-k$ 个向量线性无关.

引理 2.2 的强大之处不仅在于它联系了图的连通性与正交表示这两个方面, 还尤其在于它对于这组正交表示提供了更多的线性无关性的相关信息, 这对于之后不可扩展限定的分析有很大帮助. 例如, 在平凡下界可取到的充要条件的分析中, Alon 和 Lovász [10] 选取了合适的初始图 H_i , 其中每个 $\bar{H}_i$ 都是 $(n-k_i)$ -连通的, $n = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 1$. 则对应的向量选取可由引理 2.2 保证. 最后, 为证明不可扩展限定的成立, 由引理 2.1 只需要说明每个不饱和集 W_i 的大小不超过 $k_i - 1$ 即可, 这同样是由引理 2.2 所保证的.

本文主要着眼于态的数目恰好为 $\sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2$ 的 UPB 的存在性. 首先分析, 如果这种 UPB 确实存在, 则它的正交图应当满足怎样的性质.

引理 2.3 若存在 $\bigotimes_{i=1}^m \mathbb{C}^{k_i}$ 中的一族态的数目恰好为 $n = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2$ 的 UPB, $\{v^{(\ell)} = v_1^{(\ell)} \otimes v_2^{(\ell)} \otimes \dots \otimes v_m^{(\ell)}\}$, $1 \leq \ell \leq n$, 则在对应的每一个正交图 G_i 中, 每个顶点的度数均为 $k_i - 1$ 或者 k_i . 此外, 对于局部空间 $\mathbb{C}^{k_i}$ 中的任意不饱和集 W_i , $\{v_i^{(\ell)} : v^{(\ell)} \in W_i\}$ 所张成的子空间维数必须是 $|W_i|$ 或者 $|W_i| - 1$.

证明 每个正交图 G_i 的最小度数至少为 $k_i - 1$, 这是因为, 若有 $\deg(v^{(\ell)}) \leq k_i - 2$, 则可以找到一个非零向量 $u_i \in \mathbb{C}^{k_i}$ 使得它与 $\{v_i^{(j)} : v^{(j)} \text{ 与 } v^{(\ell)} \text{ 在 } G_i \text{ 中相邻}\} \cup \{v_i^{(\ell)}\}$ 皆正交. 进而, 一个非零直积态 $v_1^{(\ell)} \otimes \dots \otimes v_{i-1}^{(\ell)} \otimes u_i \otimes v_{i+1}^{(\ell)} \otimes \dots \otimes v_m^{(\ell)}$ 将与这个假定的 UPB 中的所有态正交, 这与不可扩展限定相矛盾.

同时, 每个正交图 G_i 的最大度数至多为 k_i , 这是因为, 若有 $\deg(v^{(\ell)}) \geq k_i + 1$, 则可以通过类似于对平凡下界的分析方法对顶点集进行拆分, 取局部空间 $\mathbb{C}^{k_i}$ 上的大小为 $k_i + 1$ 的不饱和集 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \text{ 与 } v^{(\ell)} \text{ 在 } G_i \text{ 中相邻}\}$, 将剩余的点划分为其他局部空间 $\mathbb{C}^{k_j}$ 上的大小为 $k_j - 1$ 的不饱和集, 从而与引理 2.1 矛盾.

最后, 若在局部空间 $\mathbb{C}^{k_i}$ 中存在一个不饱和集 W_i , $\{v_i^{(\ell)} : v^{(\ell)} \in W_i\}$ 所张成的子空间维数至多是 $|W_i| - 2$, 则可以在 W_i 中加入一些顶点得到一个大小为 $k_i + 1$ 的不饱和集. 类似于上一段的分析, 这将与引理 2.1 矛盾. $\square$

于是, 在初始图的选择中, 必须要求对于每个顶点, 恰好在一个初始图中的度数为 k_i , 而在其他初始图中的度数为 $k_i - 1$. 对于一个存在顶点度数为 k_i 的初始图 H_i 而言, 其对应的向量的赋予相对困难, 因为此时将无法借助引理 2.2 中的正交表示这一工具的辅助. 于是一个自然的想法是, 设置某一个

特殊的初始图为 k_i -正则的, 对其进行单独的具体分析. 而其他初始图设定为可借助引理 2.2 进行辅助的 $(k_i - 1)$ -正则图. 绝大多数已知的结果, 包括冯克勤先生的工作、Chen 和 Johnston 的后续跟进, 以及接下来本文第 4 节的证明分析, 都贯彻了这样的想法. 然而, 在有些例外的情形下, 只有选择非正则初始图才能分析得到所期望的 UPB 的存在性. 下一节对于 $f(2, 2, 4k - 1) = 4k + 2$ 的证明即是这样的情形. 鉴于此结果的分析推理相对特殊, 我们将它单列为一节.

在后文中, 我们用 $N(v^{(\ell)})$ 代表顶点 $v^{(\ell)}$ 的邻居点集, 所讨论的图对应于具体哪个局部空间都是可以通过上下文明确的.

3 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{4k-1}$ 中的 UPB 最小态数目

本节讨论 $f(2, 2, 4k - 1)$ 的取值这一公开问题. 当 $k = 1$ 时, $f(2, 2, 3) = 6$ 已由 Feng^[11] 给出构造. 现在将这一结果推广至一般的 $k \geq 2$ 的情形, 证明 $f(2, 2, 4k - 1) = 4k + 2$.

对两个二维的局部空间, 选取初始图 H_1 和 H_2 , 记 H_3 为 $4k - 1$ 维数的局部空间的初始图. 点集表示为 $V = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(4k+2)}\}$. 前两张初始图的并在图 1 中画出, 实线代表 H_1 中的边, 虚线代表 H_2 中的边, 其中从 $v^{(10)}$ 到 $v^{(4k+1)}$ 的交错路径未画出. 令 H_1 包含以下 4 条边: $v^{(1)} \sim v^{(5)}$, $v^{(2)} \sim v^{(5)}$, $v^{(3)} \sim v^{(6)}$, $v^{(4)} \sim v^{(6)}$. 令 H_2 包含以下 5 条边: $v^{(1)} \sim v^{(7)}$, $v^{(3)} \sim v^{(7)}$, $v^{(2)} \sim v^{(8)}$, $v^{(4)} \sim v^{(8)}$, $v^{(5)} \sim v^{(6)}$. 余下的 H_1 中的 $2k - 2$ 条边和 H_2 中的 $2k - 3$ 条边一同构成了从 $v^{(8)}$ 到 $v^{(7)}$ 的一条交错的路径. 不失一般性, 设定此路径为 $v^{(8)} \sim v^{(9)} \sim \dots \sim v^{(4k+1)} \sim v^{(4k+2)} \sim v^{(7)}$, 则 H_3 也被唯一决定, 即所绘图的补图, $H_3 = \overline{H_1 \cup H_2}$.

定理 3.1 对于正整数 k 有 $f(2, 2, 4k - 1) = 4k + 2$.

证明 在两个局部空间 $\mathbb{C}^2$ 上对于 H_1 和 H_2 所应赋予的向量是显而易见的. 仅需分析如何选取 $\mathbb{C}^{4k-1}$ 中的合适的向量以满足 H_3 所指定的正交关系. 接下来用 $v^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{4k-1}$ 表示对点 $v^{(\ell)}$ 所赋予的向量, $1 \leq \ell \leq 4k + 2$.

将每个 $v^{(\ell)}$ 拆写为两部分, $v^{(\ell)} = (x^{(\ell)}, y^{(\ell)})$, 其中 $x^{(\ell)} \in \mathbb{C}^5$, $y^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{4k-6}$. 取 $\{v^{(\ell)} : 1 \leq \ell \leq 6\}$

图 1 $H_1 \cup H_2$, 实线为 H_1 中的边, 虚线为 H_2 中的边. 从 $v^{(10)}$ 到 $v^{(4k+1)}$ 的路 (交错的实线和虚线) 被省略

如下, 其中 $\{\mathbf{y}^{(\ell)} : 1 \leq \ell \leq 6\}$ 皆为零向量:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)} &= (1, 0, 0, 0, 0, \mathbf{0}), & \mathbf{v}^{(2)} &= (0, 1, 0, 0, 0, \mathbf{0}), & \mathbf{v}^{(3)} &= (0, 0, 1, 0, 0, \mathbf{0}), \\ \mathbf{v}^{(4)} &= (0, 0, 0, 1, 0, \mathbf{0}), & \mathbf{v}^{(5)} &= (1, 1, 0, 0, 1, \mathbf{0}), & \mathbf{v}^{(6)} &= (0, 0, 1, 1, 1, \mathbf{0}). \end{aligned}$$

接下来选取 $\mathbf{v}^{(7)}$ 和 $\mathbf{v}^{(8)}$:

$$\mathbf{v}^{(7)} = (1, 0, 1, 0, -1, \lambda \mathbf{y}^{(7)}), \quad \mathbf{v}^{(8)} = (0, 1, 0, 1, -1, \tau \mathbf{y}^{(8)}),$$

其中 $\mathbf{y}^{(7)}$ 和 $\mathbf{y}^{(8)}$ 是 $\mathbb{C}^{4k-6}$ 中的向量, 而 λ 和 τ 是两个暂时待定的非零复数. 最后, 其他向量形如 $\mathbf{v}^{(\ell)} = \{0, 0, 0, 0, 0, \mathbf{y}^{(\ell)}\}$, $9 \leq \ell \leq 4k+2$.

到目前为止, 可以检查发现向量的选取已满足了 H_3 中涉及前 6 个顶点的所有正交关系. 接下来需要选取 $\{\mathbf{y}^{(\ell)} : 7 \leq \ell \leq 4k+2\}$ 以满足剩余的正交关系. 注意到只要 $\mathbf{y}^{(7)}$ 和 $\mathbf{y}^{(8)}$ 不正交, 就能通过对待定参数 λ 和 τ 的调节, 使得 $(\mathbf{v}^{(7)}, \mathbf{v}^{(8)}) = 1 + \lambda\tau(\mathbf{y}^{(7)}, \mathbf{y}^{(8)}) = 0$. 于是, $\{\mathbf{y}^{(\ell)} : 7 \leq \ell \leq 4k+2\}$ 的选取应满足的正交关系是整个圈 $v^{(7)} \sim v^{(8)} \sim \dots \sim v^{(4k+1)} \sim v^{(4k+2)} \sim v^{(7)}$ 的补图, 即需要考虑此圈 C_{4k-4} 在 $\mathbb{C}^{4k-6}$ 上的正交表示. 那么, 这些向量的存在性可由引理 2.2 保证 (因为圈是一个 2-连通图), 且额外地可以保证 $\{\mathbf{y}^{(\ell)} : 7 \leq \ell \leq 4k+2\}$ 中的任意 $4k-6$ 个向量线性无关.

尚需要说明所构造的这族正交态满足不可扩展限定. 前两个局部空间中, 不饱和集 W_1 仅可取为 $\{v^{(1)}, v^{(2)}\}$ 或 $\{v^{(3)}, v^{(4)}\}$ 或任意的单点集, 不饱和集 W_2 仅可取为 $\{v^{(1)}, v^{(3)}\}$ 或 $\{v^{(2)}, v^{(4)}\}$ 或任意的单点集. 而对于局部空间 $\mathbb{C}^{4k-1}$ 中的不饱和集 W_3 的选取, 我们有以下断言.

断言 对于一族 $\{\mathbf{y}^{(\ell)} : 7 \leq \ell \leq 4k+2\}$ 合适的选取, 总能调整参数 λ 和 τ , 使得不饱和集 W_3 满足 $|W_3| \leq 4k-1$, 且等号取到时必须额外有 $|W_3 \cap \{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}\}| \geq 3$.

一旦证明了这个断言, 那么就很容易检查发现不可能将顶点集 V 拆分为 3 个不饱和集. 进而引理 2.1 保证了上文构造的这族正交态确实为一族 UPB. 余下只需证明此断言的正确性.

将 $\{\mathbf{v}^{(\ell)} : 1 \leq \ell \leq 4k+2\}$ 这些向量列为一个矩阵 $A_{(4k+2) \times (4k-1)}$, 其中第 ℓ 行对应于向量 $\mathbf{v}^{(\ell)}$. 考察删去第 p 和 q 行之后形成的子矩阵 $A'_{(4k) \times (4k-1)}$. 一方面, 如果前 6 行中至多删去了一行, 则可利用前 5 行对矩阵 A' 做初等行变换得到分块矩阵 $\begin{pmatrix} B_{5 \times 5} & 0 \\ 0 & C_{(4k-5) \times (4k-6)} \end{pmatrix}$, 其中 $\text{rank}(B_{5 \times 5}) = 5$ 且 $\text{rank}(C_{(4k-5) \times (4k-6)}) = 4k-6$. 另一方面, 如果所删除的两行都来自前 6 行, 则可利用最后 $4k-6$ 行对矩阵 A' 做初等行变换得到分块矩阵 $\begin{pmatrix} D_{6 \times 5} & 0 \\ 0 & E_{(4k-6) \times (4k-6)} \end{pmatrix}$, 其中 $\text{rank}(D_{6 \times 5}) = 5$ 且 $\text{rank}(E_{(4k-6) \times (4k-6)}) = 4k-6$. 无论是哪种情形, 都可以得到 $\text{rank}(A'_{(4k) \times (4k-1)}) = 4k-1$. 于是, $\{\mathbf{v}^{(\ell)} : 1 \leq \ell \leq 4k+2\}$ 中的任意 $4k$ 个向量可线性张成整个局部空间 $\mathbb{C}^{4k-1}$, 那么不饱和集 W_3 必然满足 $|W_3| \leq 4k-1$.

下一步分析从矩阵 A 中删去第 p 、 q 和 r 行之后的子矩阵 $A''_{(4k-1) \times (4k-1)}$. 如果 $|\{p, q, r\} \cap \{1, 2, 3, 4\}| = 3$, 或者 $\{p, q\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 且 $r \in \{5, 6, 7, 8\}$, 那么与上文类似, 利用初等行变换可得到分块矩阵 $\begin{pmatrix} F_{5 \times 5} & 0 \\ 0 & G_{(4k-6) \times (4k-6)} \end{pmatrix}$, 其中 $\text{rank}(F_{5 \times 5}) = 5$ 且 $\text{rank}(G_{(4k-6) \times (4k-6)}) = 4k-6$.

最后, 如果 $\{p, q\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 且 $r \in \{9, \dots, 4k+2\}$, 那么 $A''_{(4k-1) \times (4k-1)}$ 形如

$$\begin{pmatrix} P_{4 \times 5} & 0 \\ (1, 0, 1, 0, -1) & \lambda \mathbf{y}^{(7)} \\ (0, 1, 0, 1, -1) & \tau \mathbf{y}^{(8)} \\ 0 & Q_{(4k-7) \times (4k-6)} \end{pmatrix},$$

其中 $\text{rank}(P_{4 \times 5}) = 4$ 且 $\text{rank}(Q_{(4k-7) \times (4k-6)}) = 4k-7$, 并且中间两行是原本的向量 $\mathbf{v}^{(7)}$ 和 $\mathbf{v}^{(8)}$. 此时做初等行变换时, 可利用 $P_{4 \times 5}$ 将中间两行的前 5 个坐标上调整为 $P_{4 \times 5}$ 的补空间上的向量, 而同理可利用 $Q_{(4k-7) \times (4k-6)}$ 将中间两行的后面 $4k-6$ 个坐标上调整为 $Q_{(4k-7) \times (4k-6)}$ 的补空间上的向量. 只要中间两行最后是独立的, 就有 $\text{rank}(A''_{(4k-1) \times (4k-1)}) = 4k-1$. 要小心的是这里中间两行在变换之后的独立性需要谨慎考虑, 它们有可能被变换为 $(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y})$ 和 $(\alpha \mathbf{x}, \tau \beta \mathbf{y})$, 其中系数满足 $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda}{\tau}$. 但是, 注意到这里参数 λ 和 τ 待定, 唯一的约束是它们的乘积满足 $\lambda \tau = -\frac{1}{(\mathbf{y}^{(7)}, \mathbf{y}^{(8)})}$ (前文说明过, 为了保障 $\mathbf{v}^{(7)}$ 与 $\mathbf{v}^{(8)}$ 之间正交). 由于三元组 $\{p, q, r\}$ 的取法是有限的, 则 $\frac{\lambda}{\tau}$ 所禁止的取值仅为有限个, 于是总能找到 λ 和 τ 的合适取值, 使得对任意三元组 $\{p, q, r\}$ 的取法, 删去 3 行之后的矩阵满秩.

综上所述, $\mathbb{C}^{4k-1}$ 中的不饱和集 W_3 满足 $|W_3| \leq 4k-1$, 且等号取到时必须额外有

$$|W_3 \cap \{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}\}| \geq 3.$$

断言证毕, 进而成功构造了态的数目为 $4k+2$ 的一族 UPB, 则 $f(2, 2, 4k-1) = 4k+2$. $\square$

例 3.1 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^7$ 中的一族态的数目恰好为 10 的 UPB (其中, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{g}$ 均为 $\mathbb{C}^2$ 中的任意非零向量, 取自同一个局部空间中的任意两个向量线性无关, 但彼此不正交):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{e} \otimes (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \mathbf{v}^{(2)} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{f} \otimes (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \mathbf{v}^{(3)} &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{e} \otimes (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & \mathbf{v}^{(4)} &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{f} \otimes (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), \\ \mathbf{v}^{(5)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{h} \otimes (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & \mathbf{v}^{(6)} &= \mathbf{b}^\perp \otimes \mathbf{h}^\perp \otimes (0, 0, 1, 1, 1, 0, 0), \\ \mathbf{v}^{(7)} &= \mathbf{c} \otimes \mathbf{e}^\perp \otimes (1, 0, 1, 0, -1, 2, 0), & \mathbf{v}^{(8)} &= \mathbf{d}^\perp \otimes \mathbf{f}^\perp \otimes \left(0, 1, 0, 1, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \\ \mathbf{v}^{(9)} &= \mathbf{d} \otimes \mathbf{g}^\perp \otimes (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), & \mathbf{v}^{(10)} &= \mathbf{c}^\perp \otimes \mathbf{g} \otimes (0, 0, 0, 0, 0, 1, -1). \end{aligned}$$

4 几类其他的满足 $f(k_1, k_2, \dots, k_m) = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2$ 的参数

本节讨论几类其他的满足 $f(k_1, k_2, \dots, k_m) = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2$ 的参数. 回顾第 2 节, 我们分析过态的数目恰好为 $\sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2$ 的 UPB 所对应的正交图的必要的结构. 考虑取其中一个特殊图为 k_i 正则的, 且希望为这个图选取合适的向量的过程是简单的. 那么这个特殊图该如何选取呢? 一个简单的情形是, 当 $n = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2 = 4k$, 即顶点数目是 4 的倍数时, 我们可以为一个局部空间 $\mathbb{C}^2$ 选取特殊的图, 图的取法为 k 份 $K_{2,2}$ 的并. 此时对应的向量赋值也是平凡的. 完成此步骤之后, 余下的图皆拆解为满足一定连通性要求的 $(k_i - 1)$ -正则图, 对应的向量可以利用引理 2.2 中的正交表示来处理. 这即是本节的主要思路. 首先推导一些所需的图论工具.

考虑 $\mathbb{Z}_n$ 的一个对称的子集 $S \subseteq \mathbb{Z}_n$, $0 \notin S$, 这里对称的含义是一旦有 $g \in S$ 则必然也有 $-g \in S$. 所谓的循环图 $\Gamma(\mathbb{Z}_n, S)$ 以 $\mathbb{Z}_n$ 为顶点集, 两个元素 g 和 h 相连当且仅当 $g - h \in S$. 显然, 循环图是一个正则的无向简单图, 每个顶点的度数皆为 $|S|$. 如果一个循环图是 $|S|$ -连通的, 则称其具有满连通度. 这种具有满连通度的循环图将是我们构造的核心. Alon 和 Lovász^[10] 也利用了其中一类这样的图:

引理 4.1^[10] 当 $2t \leq n$ 时, 循环图 $\Gamma(\mathbb{Z}_n, T = \{\pm 1, \dots, \pm t\})$ 是 $|T|$ -连通的. 当 $2t \leq n-3$ 时, 循环图 $\Gamma(\mathbb{Z}_n, S = \mathbb{Z}_n \setminus (T \cup \{0\}))$ 是 $|S|$ -连通的.

需要类似的结果, 包含下面 3 类循环图, 顶点集对应于 $\mathbb{Z}_{4k}$, 记为 $V = \{v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(4k-1)}\}$. 下文中的加减运算都是在模 $4k$ 的意义下进行的. 对于顶点集的一个子集 $W \subseteq V$ 和一个整数集 B , 定义 $W + B$ 为顶点集 $\{v^{(j+b)} : v^{(j)} \in W, b \in B\}$.

引理 4.2 对任意整数 m 和 p , $1 \leq m, p < 2k$, $m < 2k - p - 1$, $m \neq p$, 循环图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm 1, \dots, \pm m\} \cup \{\pm(2k-p), \dots, \pm(2k-1), 2k\})$ 是 $(2m+2p+1)$ -连通的.

证明 令 $B = \{\pm 1, \dots, \pm m\} \cup \{\pm(2k-p), \dots, \pm(2k-1), 2k\} \cup \{0\}$. 如果此图不是 $(2m+2p+1)$ -连通的, 则存在某个点割集 S , $|S| < 2m+2p+1$, 使得图去掉点割集 S 之后至少有两个连通分支, 选取其中除却一个最小的连通分支之外的其余的点形成集合 W . 由于 $4k - |S| \geq 4k - 2m - 2p \geq 4$, 因此 $|W| \geq 2$, $W + B \neq \mathbb{Z}_{4k}$, 且 $|(W+B) \setminus W| \leq 2m+2p$. 下面证明这种 W 不可能存在.

不失一般性, 假设 $m > p$. 若不然, 可以令集合

$$B' = B + 2k = \{\pm(2k-1), \dots, \pm(2k-m)\} \cup \{\pm p, \dots, \pm 1, 0\} \cup \{2k\},$$

从而交换了 m 和 p 的角色. 进而由于 $|W+B| = |W+B'|$, $|(W+B) \setminus W| = |(W+B') \setminus W|$, 则可以将问题转化到研究 $(W+B') \setminus W$ 上.

同样不失一般性, 设 $v^{(0)} \notin (W+B)$. 这意味着 $\{v^{(1)}, \dots, v^{(m)}, v^{(2k-p)}, \dots, v^{(2k+p)}, v^{(4k-m)}, \dots, v^{(4k-1)}\}$ 中的每个点都不属于 W . 我们可以找到指标 $m < z < z' < 4k-m$ 使得

- $v^{(z)} \in W$ 且对于任意的 $m < i < z$, 有 $v^{(i)} \notin W$;
- $v^{(z')} \in W$ 且对于任意的 $z' < i < 4k-m$, 有 $v^{(i)} \notin W$.

余下的讨论取决于 $v^{(z)}$ 和 $v^{(z')}$ 的具体位置.

情形 1 $m < z < z' < 2k-p$, 即 $\{v^{(2k-p)}, \dots, v^{(4k-1)}\}$ 与 W 交集为空集. 那么可以在 $(W+B) \setminus W$ 中找到下列不相同的顶点: $\{v^{(z-m)}, \dots, v^{(z-1)}\}$, $\{v^{(z'+1)}, \dots, v^{(z'+m)}\}$, $\{v^{(z'+2k-p)}, \dots, v^{(z'+2k+p)}\}$, 共计 $2m+2p+1$ 个顶点. 这与 $|(W+B) \setminus W| \leq 2m+2p$ 矛盾. 对称地, $2k+p < z < z' < 4k-m$ 这一情形也可同理得到矛盾.

情形 2 否则, $m < z < 2k-p$ 且 $2k+p < z' < 4k-m$. 此时我们进而能找到指标 y ($z \leq y < 2k-p$) 使得 $v^{(y)} \in W$ 且对于任意的 $y < j < 2k-p$ 有 $v^{(j)} \notin W$. 类似地可以找到指标 y' ($2k+p < y' \leq z'$) 使得 $v^{(y')} \in W$ 且对于任意的 $2k+p < j < y'$ 有 $v^{(j)} \notin W$. 那么可以在 $(W+B) \setminus W$ 中找到下列不相同的顶点: $\{v^{(z-m)}, \dots, v^{(z-1)}\}$, $\{v^{(y+1)}, \dots, v^{(y+m)}\} \cup \{v^{(y'-m)}, \dots, v^{(y'-1)}\}$, $\{v^{(z'+1)}, \dots, v^{(z'+m)}\}$, 其中第二部分的并集或者是包含了 $2m$ 个不同的点 (当 $y+m < y'-m$ 时), 或者是包含了整个 $\{v^{(2k-p)}, \dots, v^{(2k+p)}\}$ 这 $2p+1$ 个顶点. 无论是哪一种情形, 顶点总数为 $m + \min\{2m, 2p+1\} + m > 2m+2p$ 个, 这又与 $|(W+B) \setminus W| \leq 2m+2p$ 矛盾. $\square$

用类似的方法, 我们可以得到另外两个引理, 证明略.

引理 4.3 对任意正整数 $1 \leq m < k-1$, 循环图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\} \cup \{\pm k\})$ 是 $(2m+2)$ -连通的.

引理 4.4 对任意正整数 $0 \leq m < k-1$, $0 \leq p < k-1$, $m \neq p$, 循环图 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm 1, \dots, \pm m\} \cup \{\pm k\} \cup \{\pm(2k-p), \dots, \pm(2k-1), 2k\})$ 是 $(2m+2p+3)$ -连通的.

最后, 我们还需要图的 1-因子分解这一个图论工具. 冯克勤先生的工作 [11] 中已经显示了 1-因子分解在 UPB 问题中的作用, 尤其是针对有若干个局部空间 $\mathbb{C}^2$ 的时候. 因为一个 1-因子, 即图的一个完美匹配, 即可作为某个局部空间 $\mathbb{C}^2$ 的正交图. 我们需要下述结果:

引理 4.5 [23] 对于任意偶数阶的 Abel 群 G 和 G 的任意对称子集 S , Cayley 图 $\Gamma(G, S)$ 有 1-因子分解.

基于以上工具, 我们可以得到一系列新的满足 $f(k_1, k_2, \dots, k_m) = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2$ 的参数. 这些结果的共同点是, 目标值 $n = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2 = 4k$, 唯一的特殊正交图取为 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm k\})$, 余下的正交图也为循环图, 需按一定规则调整其生成集, 以方便调用前文中循环图连通性的结论.

定理 4.1 令 $t \geq 3, s \geq 3$, 则当 $t + s + 1$ 是 4 的倍数时, 有 $f(2^{[t]}, s) = t + s + 1$.

证明 令 $t + s + 1 = 4k$. 为一个特殊的局部空间 $\mathbb{C}^2$ 选取正交图为 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm k\})$, 即 k 份 $K_{2,2}$ 的并. 记 H 为局部空间 $\mathbb{C}^s$ 所选取的初始图. 首先考虑 t 为奇数而 s 为偶数的情形. 令 $p = \frac{t+1}{2}$.

如果 $p + 1 > k$, 选取 H 为 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm(p+1), \dots, \pm(2k-1), 2k\})$, 它与 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm k\})$ 没有重复的边. 由引理 4.1 知, 其补图 $\bar{H} = \Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm 1, \dots, \pm p\})$ 是 $(t+1)$ -连通的, 进而由引理 2.2 可找到 $\bar{H}$ 在 $\mathbb{R}^s$ 上的正交表示, 且额外保证任意 s 个向量之间线性无关. 其他剩余的局部空间 $\mathbb{C}^2$ 的正交图的并应构成 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(k-1), \pm(k+1), \dots, \pm p\})$, 这是可以做到的, 因为引理 4.5 保证了其 1-因子分解的存在性. 此外, 不可扩展限定也成立, 因为 $\mathbb{C}^s$ 上的不饱和集至多有 $s-1$ 个顶点, 唯一的特殊的局部空间 $\mathbb{C}^2$ 上的不饱和集至多有两个顶点, 其他局部空间 $\mathbb{C}^2$ 上的不饱和集至多有一个顶点, 进而无法将 $t + s + 1$ 个顶点拆分为不饱和集的并.

如果 $p + 1 \leq k$, 选取 H 为 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{2k, \pm(2k-1), \dots, \pm(k+1), \pm(k-1), \dots, \pm p\})$, 它与 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm k\})$ 没有重复的边. 由引理 4.3 知, 其补图 $\bar{H} = \Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm 1, \dots, \pm(p-1), \pm k\})$ 是 $(t+1)$ -连通的, 进而由引理 2.2 可找到 $\bar{H}$ 在 $\mathbb{R}^s$ 上的正交表示, 且额外保证任意 s 个向量之间线性无关. 余下的证明类似于上一情形.

当 t 为偶数而 s 为奇数时, 令 $q = \frac{s+1}{2}$. 选取 H 为 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm 1, \dots, \pm(q-1)\})$ 或者 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm 1, \dots, \pm(k-1), \pm(k+1), \dots, \pm q\})$, 取决于 $q-1 < k$ 或者 $q-1 \geq k$. 余下的证明类似上文. $\square$

进一步地, 我们可以得到下面的结果. 虽然这类参数的描述显得过于复杂, 但它一定程度上代表了我们利用循环图的这一框架所能做到的极限.

定理 4.2 令 t 为一个正奇数. 令 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 为一系列正奇数. 令 b 为一个偶数. 设下述条件至少有一个成立: 或者 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 不全部相同, 或者 $t \geq 3$. 此时, 若 $t + \sum_{i=1}^k (a_i - 1) + b + 1$ 为 4 的倍数, 则有 $f(2^{[t]}, a_1, \dots, a_k, b) = t + \sum_{i=1}^k (a_i - 1) + b + 1$.

证明 记目标值为 $4k$. 为一个特殊的局部空间 $\mathbb{C}^2$ 选取正交图为 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm k\})$, 即 k 份 $K_{2,2}$ 的并. 维数为 $b = 2(p+1)$ 的局部空间, 若 $p < k$, 则初始图选为 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm(2k-p), \dots, \pm(2k-1), 2k\})$; 若 $p \geq k$, 则初始图选为 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm(2k-p-1), \dots, \pm(k-1), \pm(k+1), \pm(2k-1), 2k\})$. 所有奇数维数的局部空间的初始图皆形如 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm a, \pm(a+1), \dots, \pm(b-1), \pm b\})$, 或者其中至多一个形如 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm a, \dots, \pm(k-1), \pm(k+1), \dots, \pm b\})$. 保证这些图的选取中没有重复的边. 余下的部分是剩余的局部空间 $\mathbb{C}^2$ 的正交图的并, 可由 1-因子分解所得.

对应的向量选取和不可扩展限定的证明同上, 需借助引理 2.2 和 4.1–4.4. 注意, 这里唯一需要小心的是使用引理 4.4 时需保证其中的参数 $m \neq p$. 也即我们无法处理形如 $\Gamma(\mathbb{Z}_{4k}, \{\pm(m+1), \dots, \pm(k-1), \pm(k+1), \dots, \pm(2k-m-1)\})$ 这种初始图. 在定理预设的条件下, 只要有至少 3 个二维空间, 或者只要 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 不全部相同, 那么这种无法处理的图就可以回避掉. $\square$

5 k 为偶数时 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k$ 中的态的数目为 $k+3$ 的 UPB 的不存在性

考虑 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k$ 在 k 为偶数时的情形. 此时平凡下界 $f(2, 2, k) = k+2$ 是可达到的. 本节将证明, 此情形下态的数目恰好为 $k+3$ 的 UPB 是不存在的. 与前文类似, 核心仍然是分析局部空间 $\mathbb{C}^k$ 上的正交图及其对应的向量族 $\{v^{(\ell)} : 1 \leq \ell \leq k+3\}$ 的选取.

定理 5.1 在 k 为偶数时, $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k$ 中不存在态的数目恰好为 $k+3$ 的 UPB.

证明 当 $k = 2$ 时, 文献 [13] 说明了不存在态的数目为 5 的 UPB. 下面设定 k 为偶数且 $k \geq 4$, 假设 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k$ 中存在态的数目恰好为 $k + 3$ 的 UPB. 考虑其正交图并设定顶点集为 $V = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k+3)}\}$. 由于 G_1 和 G_2 皆为某个局部空间 $\mathbb{C}^2$ 上的正交图, 因此它们各自都是一族完全二部子图的并. 此外, 由引理 2.3 可知, 任意顶点 $v^{(\ell)}$ 在 G_1 或 G_2 中的度数均只能为 1 或 2, 故而构成 G_1 和 G_2 的每个完全二部子图的每个部的大小只能是 1 或 2.

由假设知, 顶点数目 $k + 3$ 为奇数, 则在 G_1 和 G_2 中偶数大小的部 (即双顶点的部) 的数目必须是奇数. 假设 G_1 有至少 3 个双顶点的部. 任取 G_2 中的一个双顶点的部, 它必然与 G_1 的 3 个双顶点的部其中之一交集为空集. 则我们找到了前两个局部空间中的两个大小为 2 的不相交的不饱和集, 余下的 $k - 1$ 个点自然可成为局部空间 $\mathbb{C}^k$ 中的不饱和集. 这样的选取违背了引理 2.1. 基于以上分析, 我们断言: 图 G_1 和 G_2 各自有且只有一个双顶点的部, 且两个部需要有非空的交集. 不失一般性地, G_1 的取法可如图 2 所示.

图 G_2 与 G_1 完全同构, 只是顶点的标号不同. 从前文的论述中可知, 可不失一般性地假设 $v^{(1)}$ 也出现在图 G_2 的唯一一个双顶点的部中. 同时, 注意到引理 2.3 要求任意顶点在图 G_3 中的度数为 $k - 1$ 或 k , 进而其在 $G_1 \cup G_2$ 中的度数为 2 或 3. 基于以上分析, 对 G_2 的讨论只需考虑以下 5 种顶点的标号方式, 如图 2 所示. 接下来只需要对这 5 种 G_2 的取法分别找到一组由不饱和集构成的拆分 $V = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ 即可, 进而引理 2.1 即说明了不存在态的数目恰好为 $k + 3$ 的 UPB. 前 4 个情形的分析相对简单.

情形 1 和情形 2 取 $W_1 = \{v^{(1)}, v^{(3)}\}$, $W_2 = \{v^{(2)}\}$. W_3 为剩余的顶点, 即图 G_3 中顶点 $v^{(1)}$ 的所有邻居.

情形 3 取 $W_1 = \{v^{(4)}\}$, $W_2 = \{v^{(1)}, v^{(2)}\}$. W_3 为剩余的顶点, 即图 G_3 中顶点 $v^{(1)}$ 的所有邻居.

情形 4 在 G_3 中, $v^{(1)}$ 和 $v^{(3)}$ 相邻且它们有公共的 $k - 1$ 个邻居 $\{v^{(5)}, v^{(6)}, \dots, v^{(k+3)}\}$. 于是由 $\{v^{(\ell)} : 5 \leq \ell \leq k + 3\}$ 这族向量所张成的子空间与由 $\{v^{(1)}, v^{(3)}\}$ 张成的二维子空间正交, 则由引理 2.3, 此空间维数必须为 $k - 2$. 任意添加一个额外的向量, 如 $v^{(4)}$, 则由 $\{v^{(\ell)} : 4 \leq \ell \leq k + 3\}$ 这族向量所

图 2 正交图 G_1 和 G_2

张成的子空间维数为 $k-1$. 于是, $W_3 = \{v^{(4)}, v^{(5)}, \dots, v^{(k+3)}\}$ 是局部空间 $\mathbb{C}^k$ 中的一个不饱和集. 再取 $W_1 = \{v^{(1)}, v^{(3)}\}$ 和 $W_2 = \{v^{(2)}\}$ 即可.

最后分析余下的情形 5.

考虑图 $G_1 \cup G_2$ 并删除顶点 $v^{(1)}$ 及其所在的边, 得到一个 2-正则图 G' , 它可能形如一个 $k+2$ 长的圈 C_{k+2} , 也可能形如一系列小的偶数长的圈的不交并. 下面依据 G' 中的圈的数目继续分情形讨论: $G' = C_{k+2}$ 或者 G' 包含多个圈. 我们需要下面的断言.

断言 对 G' 中任意的路径 $v^{(\ell_0)} \sim v^{(\ell_1)} \sim v^{(\ell_2)} \sim \dots \sim v^{(\ell_t)} \sim v^{(\ell_{t+1})}$, $t < k$, 由向量 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)}) \cap \dots \cap N(v^{(\ell_t)})\}$ 张成的子空间维数为 $k-t$.

证明 首先, 在 G_3 中, $N(v^{(\ell_1)}) = V \setminus \{v^{(\ell_0)}, v^{(\ell_1)}, v^{(\ell_2)}\}$, 且依据引理 2.3 对应的 k 个向量 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)})\}$ 张成的空间维数为 $k-1$. 同样的分析适用于 $N(v^{(\ell_2)}) = V \setminus \{v^{(\ell_1)}, v^{(\ell_2)}, v^{(\ell_3)}\}$, 对应的 k 个向量 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_2)})\}$ 张成的空间维数也为 $k-1$. 现在考察由 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)}) \cap N(v^{(\ell_2)})\}$ 张成的空间. 假设这 $k-1$ 个向量张成的空间维数也是 $k-1$, 则这意味着 $v^{(\ell_0)}$ 和 $v^{(\ell_3)}$ 这两个向量都可以由 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)}) \cap N(v^{(\ell_2)})\}$ 线性表示. 于是, $v^{(\ell_0)}$ 、 $v^{(\ell_3)}$ 和 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)}) \cap N(v^{(\ell_2)})\}$ 这 $k+1$ 个向量一起张成一个仅有 $k-1$ 维数的空间, 这与引理 2.3 相矛盾. 于是假设不成立, 则 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)}) \cap N(v^{(\ell_2)})\}$ 这 $k-1$ 个向量张成的空间维数为 $k-2$. 延续类似的思路, 我们逐个分析 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)}) \cap N(v^{(\ell_2)})\}$, $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)}) \cap N(v^{(\ell_2)}) \cap N(v^{(\ell_3)})\}$, $\dots$, $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)}) \cap \dots \cap N(v^{(\ell_t)})\}$. 最终的结论是, $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)}) \cap \dots \cap N(v^{(\ell_t)})\}$ 这 $k-t+1$ 个向量生成的空间维数应为 $k-t$. $\square$

子情形 5.1 $G' = C_{k+2}$.

在此子情形下, $v^{(2)}$ 和 $v^{(4)}$ 是圈上不相邻的两个顶点, 以它们为边界把圈分为两个弧. 不失一般性地, 记两个弧分别为 $v^{(2)} \sim v^{(\ell_1)} \sim v^{(\ell_2)} \sim \dots \sim v^{(\ell_t)} \sim v^{(4)}$ 和 $v^{(2)} \sim v^{(j_1)} \sim v^{(j_2)} \sim \dots \sim v^{(j_{k-t})} \sim v^{(4)}$, 其中 $1 \leq t \leq k-1$, 并且可不失一般性地假设 $v^{(3)}$ 在第一个弧上.

由前文中的断言知, 在图 G_3 中, 集合 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)}) \cap \dots \cap N(v^{(\ell_t)})\}$ 包含了 $k-t+1$ 个向量 $\{v^{(1)}, v^{(j_1)}, \dots, v^{(j_{k-t})}\}$, 张成的空间维数为 $k-t$. 此外, $v^{(1)}$ 与此集合中所有其他的向量正交, 于是 $\{v^{(j_1)}, \dots, v^{(j_{k-t})}\}$ 这 $k-t$ 个向量张成的空间维数为 $k-t-1$. 则在 $\{v^{(j_1)}, \dots, v^{(j_{k-t})}\}$ 中任意额外添加其他 t 个顶点之后, 所得到的集合也仍然是不饱和集. 基于这些分析, 我们可以如下选取不饱和集: 取 $W_1 = \{v^{(1)}, v^{(3)}\}$, $W_2 = \{v^{(\ell)}\}$, 其中 $\ell \neq 1, 3, j_1, \dots, j_{k-t}$. 余下的 k 个顶点为 $\mathbb{C}^k$ 中的不饱和集 W_3 .

子情形 5.2 G' 包含多个圈.

在这个子情形下, 我们需要区分考虑 $v^{(2)}$ 与 $v^{(4)}$ 是否在同一个圈上, 参见图 3. 如果点 $v^{(2)}$ 和 $v^{(4)}$ 在不同的圈上, 则不失一般性地假设 $v^{(2)}$ 位于圈 $v^{(2)} \sim v^{(3)} \sim v^{(\ell_1)} \sim v^{(\ell_2)} \sim \dots \sim v^{(\ell_t)} \sim v^{(2)}$, $t \geq 2$ (注意这里 $v^{(2)}$ 与 $v^{(3)}$ 相连是由 G_1 的标号所决定的). 考虑路径 $v^{(3)} \sim v^{(\ell_1)} \sim v^{(\ell_2)} \sim \dots \sim$

图 3 $G_1 \cup G_2$. 基于 $v^{(2)}$ 和 $v^{(4)}$ 是否在同一个圈上的两种情形

$v^{(\ell_t)} \sim v^{(2)}$ 并套用上文中的断言. 在 G_3 中, 由 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)}) \cap \dots \cap N(v^{(\ell_t)})\} = \{v^{(j)} : v^{(j)} \in V \setminus \{v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(\ell_1)}, \dots, v^{(\ell_t)}\}\}$ 所张成的空间的维数为 $k - t$. 此外, $\{v^{(3)}, v^{(\ell_1)}, \dots, v^{(\ell_t)}\}$ 与 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in V \setminus \{v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(\ell_1)}, \dots, v^{(\ell_t)}\}\}$ 中的成员都正交. 那么, $\{v^{(3)}, v^{(\ell_1)}, \dots, v^{(\ell_t)}\}$ 张成的子空间维数为 t . 则可以按如下方式取不饱和集: $W_1 = \{v^{(\ell)}\}$, 其中 $\ell \neq 1, 3, 6, \ell_1, \dots, \ell_t$, $W_2 = \{v^{(1)}, v^{(6)}\}$, 最后 W_3 是余下的 k 个顶点.

如果 $v^{(2)}$ 和 $v^{(4)}$ 在同一个圈上, 则存在一个圈 $v^{(\ell_0)} \sim v^{(\ell_1)} \sim v^{(\ell_2)} \sim \dots \sim v^{(\ell_t)} \sim v^{(\ell_{t+1})} \sim v^{(\ell_0)}$ ($t \geq 2$), 这个圈上每个顶点都不与 $v^{(1)}$ 相邻. 由断言可知, 在图 G_3 中, 由 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in N(v^{(\ell_1)}) \cap \dots \cap N(v^{(\ell_t)})\} = \{v^{(j)} : v^{(j)} \in V \setminus \{v^{(\ell_0)}, v^{(\ell_1)}, \dots, v^{(\ell_{t+1})}\}\}$ 张成的子空间维数为 $k - t$. 由于 $\{v^{(\ell_0)}, v^{(\ell_1)}, \dots, v^{(\ell_{t+1})}\}$ 与 $\{v^{(j)} : v^{(j)} \in V \setminus \{v^{(\ell_0)}, v^{(\ell_1)}, \dots, v^{(\ell_{t+1})}\}\}$ 中的所有成员都正交, 因此 $\{v^{(\ell_0)}, v^{(\ell_1)}, \dots, v^{(\ell_{t+1})}\}$ 张成的空间维数为 t , 这与引理 2.3 相矛盾. $\square$

6 对 $\mathcal{S}(2, 2, k)$ 近乎完全的刻画

本节考虑刻画 $\mathcal{S}(2, 2, k)$, 即由 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k$ 中所有 UPB 所包含的态的可能数目的集合. 首先需要回顾冯克勤先生在文献 [11] 中给出的关于 UPB 的一个递归构造:

引理 6.1 如果在 $\mathbb{C}^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{k_m} \otimes \mathbb{C}^a$ 中存在一个 UPB 的态的数目为 s , 在 $\mathbb{C}^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{k_m} \otimes \mathbb{C}^b$ 中存在一个 UPB 的态的数目为 t , 则在 $\mathbb{C}^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{k_m} \otimes \mathbb{C}^{a+b}$ 中存在一个 UPB 的态的数目为 $s + t$.

基于这个递归构造, 关于 $\mathcal{S}(2, 2, k)$ 的部分事实可列举如下:

- (1) 因为 $\mathcal{S}(2, 2, 1) = \mathcal{S}(2, 2) = \{4\}$, 所以由 $n \in \mathcal{S}(2, 2, k)$ 可推导得到 $n + 4 \in \mathcal{S}(2, 2, k + 1)$;
- (2) 因为 $4 \in \mathcal{S}(2, 2, 2)$, 所以由 $n \in \mathcal{S}(2, 2, k)$ 可推导得到 $n + 4 \in \mathcal{S}(2, 2, k + 2)$;
- (3) 上一节解释了 $k + 2 \in \mathcal{S}(2, 2, k)$ 当且仅当 k 为偶数, 而 $k + 3 \in \mathcal{S}(2, 2, k)$ 当且仅当 k 为奇数;
- (4) 最后, 回顾我们在引言部分提到过的性质, $4k \in \mathcal{S}(2, 2, k)$ 而 $4k - 3, 4k - 2, 4k - 1 \notin \mathcal{S}(2, 2, k)$ (参见文献 [13, 15]).

6.1 $\mathcal{S}(2, 2, 3) = \{6, 7, 8, 12\}$

唯一未被上述事实覆盖的数值是 7. 我们可以在 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ 中构造如下的态的数目为 7 的 UPB (其中, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ 均为 $\mathbb{C}^2$ 中的任意非零向量, 取自同一个局部空间中的任意两个向量线性无关, 但彼此不正交, 下同):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} \otimes (0, 1, 0), & \mathbf{v}^{(2)} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{d} \otimes (1, 0, 2), & \mathbf{v}^{(3)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{c}^\perp \otimes (0, 1, 2), \\ \mathbf{v}^{(4)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{c} \otimes (0, 1, 1), & \mathbf{v}^{(5)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{c} \otimes (0, 1, -1), & \mathbf{v}^{(6)} &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}^\perp \otimes (2, 2, -1), \\ \mathbf{v}^{(7)} &= \mathbf{b}^\perp \otimes \mathbf{d}^\perp \otimes (1, 0, 0). \end{aligned}$$

6.2 $\mathcal{S}(2, 2, 4) = \{6, 8, 9, 10, 11, 12, 16\}$

唯一未被上述事实覆盖的数值是 9. 我们可以在 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$ 中构造如下的态的数目为 9 的 UPB:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} \otimes (1, 0, 0, 0), & \mathbf{v}^{(2)} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}^\perp \otimes (1, 1, 1, 0), & \mathbf{v}^{(3)} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{d} \otimes (0, 1, -1, 1), \\ \mathbf{v}^{(4)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{c}^\perp \otimes (30, 37, 16, 21), & \mathbf{v}^{(5)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{d} \otimes (-10, 11, -29, 17), & \mathbf{v}^{(6)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{c} \otimes (1, 2, 1, 1), \\ \mathbf{v}^{(7)} &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes (0, 2, -1, -3), & \mathbf{v}^{(8)} &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}^\perp \otimes (-3, 1, 2, 1), & \mathbf{v}^{(9)} &= \mathbf{b}^\perp \otimes \mathbf{d}^\perp \otimes (0, -1, 1, 1). \end{aligned}$$

6.3 $\mathcal{S}(2, 2, 5) = \{8 \sim 16, 20\}$

唯一未被上述事实覆盖的数值是 9. 我们可以在 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^5$ 中构造如下的态的数目为 9 的 UPB:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} \otimes (3, -2, 2, 3, 3), & \mathbf{v}^{(2)} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{d} \otimes (11, -21, -18, -26, 13), \\ \mathbf{v}^{(3)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{e} \otimes (1, 0, 0, 0, 0), & \mathbf{v}^{(4)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{e}^\perp \otimes (0, 1, 0, 0, 0), \\ \mathbf{v}^{(5)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{c} \otimes (0, 0, 1, 2, 1), & \mathbf{v}^{(6)} &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{e} \otimes (0, 1, 1, -1, 1), \\ \mathbf{v}^{(7)} &= \mathbf{b}^\perp \otimes \mathbf{d}^\perp \otimes (0, 0, 3, -1, -1), & \mathbf{v}^{(8)} &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{e}^\perp \otimes (1, 0, -3, 2, -1), \\ \mathbf{v}^{(9)} &= \mathbf{b}^\perp \otimes \mathbf{c}^\perp \otimes (0, 0, 13, 7, 32). \end{aligned}$$

6.4 $\mathcal{S}(2, 2, 6) = \{8, 10 \sim 20, 24\}$

唯一未被上述事实覆盖的数值是 11. 我们可以在 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^6$ 中构造如下的态的数目为 11 的 UPB:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} \otimes (1, 0, 0, 0, 0, 0), & \mathbf{v}^{(2)} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}^\perp \otimes (1, 1, 1, 0, 0, 0), \\ \mathbf{v}^{(3)} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{e} \otimes (0, 1, -1, 1, 2, 1), & \mathbf{v}^{(4)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{d} \otimes (-10, -1, -1, 3, 2, 1), \\ \mathbf{v}^{(5)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{d} \otimes (1, -26, 3, -9, -6, 26), & \mathbf{v}^{(6)} &= \mathbf{a}^\perp \otimes \mathbf{e} \otimes (1, 1, -2, 1, 2, 2), \\ \mathbf{v}^{(7)} &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{d}^\perp \otimes (0, 1, -1, -1, 0, -1), & \mathbf{v}^{(8)} &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{e}^\perp \otimes (0, -1, 1, -1, 2, -1), \\ \mathbf{v}^{(9)} &= \mathbf{b}^\perp \otimes \mathbf{c}^\perp \otimes (-6, 9, -3, -21, 3, 3), & \mathbf{v}^{(10)} &= \mathbf{b}^\perp \otimes \mathbf{c} \otimes (0, 1, 1, 1, -1, 1), \\ \mathbf{v}^{(11)} &= \mathbf{b}^\perp \otimes \mathbf{d}^\perp \otimes (0, -3, 3, -1, 2, 3). \end{aligned}$$

这个过程可以对每个 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k$ 持续下去, 但是 k 为偶数时 $k+5$ 这个数值以及 k 为奇数时 $k+4$ 这个数值并不能由递归构造得到, 需要自行构造或借助计算机搜索. 以上正面的例子让我们作出如下猜想:

猜想 6.1 当 k 为偶数时, $k+5 \in \mathcal{S}(2, 2, k)$. 当 k 为奇数时, $k+4 \in \mathcal{S}(2, 2, k)$.

一旦这个猜想成立, 那么基于先前的结果和递归构造, 就可以完整刻画 $\mathcal{S}(2, 2, k)$ 如下:

猜想 6.2 当 k 为偶数时,

$$\mathcal{S}(2, 2, k) = \{k+2, \dots, 4k\} \setminus \{k+3, 4k-3, 4k-2, 4k-1\}.$$

当 k 为奇数时,

$$\mathcal{S}(2, 2, k) = \{k+2, \dots, 4k\} \setminus \{k+2, 4k-3, 4k-2, 4k-1\}.$$

7 总结

不可扩展直积基 (UPB) 在量子信息中有着广泛的应用. 本文介绍了不可扩展直积基的一系列最新进展, 包括在最小态数目问题上的一系列新结果以及对 $\mathcal{S}(2, 2, k)$ 的近乎完整的刻画, 这些结果或许对各种量子信息的其他理论问题也有所帮助.

在不存在二维局部空间时, 寻找使得 $f(k_1, k_2, \dots, k_m) = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) + 2$ 的参数比较困难, 难点主要在于某空间上的特殊的正交图及其对应的向量的选取. 例如, 我们可以说明 $f(3, 4, 4) = 10$.

初始图分别选为 $\Gamma(\mathbb{Z}_{10}, \{\pm 3\})$ 、 $\Gamma(\mathbb{Z}_{10}, \{\pm 4, 5\})$ 和 $\Gamma(\mathbb{Z}_{10}, \{\pm 1, \pm 2\})$. 前两张图上向量的构造可由引理 2.2 保证. 在第 3 个局部空间上, 向量 $v_1, \dots, v_{10}$ 可以被选取为 $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(1, x, 0, -1)$, $(1, -2/x, -4/x, -1)$, $(3, -1, 4 - x, 3 - x)$, $(1, 2, -1, 1)$, $(0, 1, 1, -1)$, $(0, 0, 1, 1)$, 其中 $x = 3\sqrt{2} - 2$. 这仅仅是一个手工搜索出的结果, 更一般的思路有待之后的研究, 可能需要其他图论工具的辅助.

最后, 关于 $S(2, 2, k)$ 的刻画, 我们期待猜想 6.1 的正确性. 如果有一个明确的算法, 能在 k 为偶数时找到态的数目恰好为 $k + 5$ 的 UPB, 能在 k 为奇数时找到态的数目恰好为 $k + 4$ 的 UPB, 那么 $S(2, 2, k)$ 的刻画将彻底完成.

致谢 接触 UPB 这一课题, 最早源于冯克勤先生的一次学术报告. 非常感谢冯老师多年来对学科发展作出的杰出贡献, 尤其是对于我们这些年轻人的引领、教导和鼓励. 在此, 向冯老师表示我们诚挚的感谢与衷心的祝福.

参考文献

- 1 Bennett C H, DiVincenzo D P, Mor T, et al. Unextendible product bases and bound entanglement. *Phys Rev Lett*, 1999, 82: 5385–5388
- 2 Skowronek L. Three-by-three bound entanglement with general unextendible product bases. *J Math Phys*, 2011, 52: 122202
- 3 Sollid P Ø, Leinaas J M, Myrheim J. Unextendible product bases and extremal density matrices with positive partial transpose. *Phys Rev A*, 2011, 84: 042325
- 4 Terhal B M. A family of indecomposable positive linear maps based on entangled quantum states. *Linear Algebra Appl*, 2001, 323: 61–73
- 5 Bennett C H, DiVincenzo D P, Fuchs C A, et al. Quantum nonlocality without entanglement. *Phys Rev A*, 1999, 59: 1070–1091
- 6 Augusiak R, Stasińska J, Hadley C, et al. Bell inequalities with no quantum violation and unextendable product bases. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 070401
- 7 Bravyi S, Smolin J A. Unextendible maximally entangled bases. *Phys Rev A*, 2011, 84: 042306
- 8 Guo Y, Wu S. Unextendible entangled bases with fixed Schmidt number. *Phys Rev A*, 2014, 90: 054303
- 9 Shi F, Zhang X D, Guo Y. Constructions of unextendible entangled bases. *Quantum Inf Process*, 2019, 18: 324
- 10 Alon N, Lovász L. Unextendible product bases. *J Combin Theory Ser A*, 2001, 95: 169–179
- 11 Feng K. Unextendible product bases and 1-factorization of complete graphs. *Discrete Appl Math*, 2006, 154: 942–949
- 12 Johnston N. The minimum size of qubit unextendible product bases. In: *Proceedings of the 8th Conference on the Theory of Quantum Computation, Communication and Cryptography (TQC)*. Dagstuhl: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2013, 93–105
- 13 Johnston N. The structure of qubit unextendible product bases. *J Phys A*, 2014, 47: 424034
- 14 Chen J, Johnston N. The minimum size of unextendible product bases in the bipartite case (and some multipartite cases). *Comm Math Phys*, 2015, 333: 351–365
- 15 Chen L, Doković D Ž. Separability problem for multipartite states of rank at most 4. *J Phys A*, 2013, 46: 275304
- 16 DiVincenzo D P, Mor T, Shor P W, et al. Unextendible product bases, uncompletable product bases and bound entanglement. *Comm Math Phys*, 2003, 238: 379–410
- 17 Yang Y H, Gao F, Xu G B, et al. Characterizing unextendible product bases in qutrit-ququad system. *Sci Rep*, 2015, 5: 11963
- 18 Chen L, Doković D Ž. Nonexistence of n -qubit unextendible product bases of size $2^n - 5$. *Quantum Inf Process*, 2018, 17: 24
- 19 Chen L, Doković D Ž. Multiqubit UPB: The method of formally orthogonal matrices. *J Phys A*, 2018, 51: 265302
- 20 Wang K, Chen L. The construction of 7-qubit unextendible product bases of size ten. *Quantum Inf Process*, 2020, 19: 185
- 21 Lovász L. On the Shannon capacity of a graph. *IEEE Trans Inform Theory*, 1979, 25: 1–7
- 22 Lovász L, Saks M, Schrijver A. Orthogonal representations and connectivity of graphs. *Linear Algebra Appl*, 1989, 114–115: 439–454
- 23 Stong R A. On 1-factorizability of Cayley graphs. *J Combin Theory Ser B*, 1985, 39: 298–307

New results on unextendible product bases

Yiwei Zhang, Fei Shi, Xiande Zhang, Yiting Yang & Gennian Ge

Abstract Unextendible product bases (UPB) is an important concept and has extensive applications in various fields of quantum information theory. The construction of UPBs is closely related to combinatorics. Alon and Lovász (2001) first used a series of graph theoretic tools to characterize the necessary and sufficient conditions when the size of a UPB can attain the trivial lower bound. Later Feng (2006) brought the 1-factorization of graphs into the study of UPBs. In this paper, we further apply some graph theoretic tools to analyze the minimum size of a UPB under certain parameters and obtain a series of new results. Moreover, we have an almost complete characterization of all the potential sizes of UPBs in $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^k$.

Keywords unextendible product bases, quantum information theory, orthogonal representation, connectivity, circulant graphs, 1-factorization

MSC(2020) 81P45, 05C90, 05B99

doi: 10.1360/SSM-2020-0303