

Mendelsohn 三元系大集的谱的完成*

康庆德 雷建国

(河北师范学院数学研究所, 石家庄 050091)

摘 要

本文构造性地给出了如下的递归定理: 对于正整数 $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$, $n > 1$, 若存在 $\text{LMTS}(n+2)$ 则存在 $\text{LMTS}(4n+2)$. 从而, 根据 LMTS 存在性的已知结果, 我们得到了关于 Mendelsohn 三元系大集存在谱的预期结论: 对于正整数 $v \equiv 0, 1 \pmod{3}$, $v \geq 3$, $v \neq 6$, 存在 $\text{LMTS}(v)$.

关键词 循环三元组、Mendelsohn 三元系、Mendelsohn 三元系大集

设 X 是一个 v 元集, $v \geq 3$. X 的一个循环三元组是由三个有序对 (x, y) , (y, z) 与 (z, x) 组成的一个集, 记为 $\langle x, y, z \rangle$ 或 $\langle y, z, x \rangle$ 或 $\langle z, x, y \rangle$, 其中 x, y, z 为 X 的不同元. X 上的一个 Mendelsohn 三元系是一个对子 $(X, \mathcal{B})$, 其中 $\mathcal{B}$ 由 X 的若干循环三元组构成, 使得 X 的每个 (由不同元组成的) 有序对恰含在 $\mathcal{B}$ 的一个循环三元组中. 这一设计通常记为 $\text{MTS}(v)$. 已经知道^[1, 2], $\text{MTS}(v)$ 存在的谱是 $v \equiv 0, 1 \pmod{3}$, $v \geq 3$, $v \neq 6$.

如果存在有 $v-2$ 个两两不相交 (即没有公共循环三元组) 的 $\text{MTS}(v)$, 则称它们构成一个 v 阶 Mendelsohn 三元系大集, 记为 $\text{LMTS}(v)$. 这类大集存在性的研究工作开始于 1981 年. Lindner, Teirlinck, 吴利生以及康庆德、常彦勋等先后给出了这方面的一些直接构造或递归构造^[3-5]. 为了后边引用的方便, 我们将其中主要结果列为以下四个引理^[6, 7]:

引理 1 对于正整数 $u \equiv \pm 1 \pmod{6}$, 存在 $\text{LMTS}(u+2)$;

引理 2 对于正整数 $u \equiv \pm 1 \pmod{6}$, 存在 $\text{LMTS}(2u+2)$;

引理 3 对于正整数 $v \geq 3$ 及 $u \equiv \pm 1 \pmod{6}$, 若存在 $\text{LMTS}(v+2)$ 则存在 $\text{LMTS}(uv+2)$;

引理 4 对于正整数 $n \geq 3$, 存在 $\text{LMTS}(2^n+2)$.

在本文之前, $\text{LMTS}(v)$ 存在性问题的完全解决的主要困难来自 $\text{MTS}(6)$ 的不存在性 (从而也就不存在 $\text{LMTS}(4+2)=\text{LMTS}(2^2+2)$). 尽管可在上述四引理基础上应用 $v \rightarrow 3v$, $v+1 \rightarrow 3v+1$ 的递归^[3], 以及应用 $v+2 \rightarrow 3v$ 与 $v+2 \rightarrow 3v+1$ ^[8] 的递归将未知阶数的范围缩小到 $72k+22$ 及 $216k+6$ 的部分阶数中, 但难以完全解决. 本文将给出一个期待已久的递归定理

定理 1 对于正整数 $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$, $n > 1$, 若存在 $\text{LMTS}(n+2)$, 则存在 $\text{LMTS}(4n+2)$.

应用这一定理及上述四个引理, 将完成 Mendelsohn 三元系大集的谱, 得到最终的

定理 2 存在 $\text{LMTS}(v)$ 当且仅当 $v \equiv 0, 1 \pmod{3}$, $v \geq 3$, $v \neq 6$.

1 定理 1 的构造

令 $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ 与 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ 分别为模 4 与模 n 的剩余类环, 正整数 $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$, $n > 1$. 元素 $\infty_1, \infty_2 \notin \mathbb{Z}_n$. 对于 $\mathbb{Z}_n$ 上变元 x, y, k 定义

$$\begin{aligned} A_i &= A_i(y, k) = c_i y + d_i k; \\ Q_i &= Q_i(y, k) = (i, x + A_i(y, k)), \end{aligned}$$

其中系数 $C_i, d_i \in \mathbb{Z}_n$, $i \in \mathbb{Z}_4$, 而 $A_i \in \mathbb{Z}_n$, $Q_i \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_n$ (在不致混淆时, $A_i(y, k)$ 与 $Q_i(y, k)$ 亦可简记为 A_i 与 Q_i). 我们并规定以下记号 (对于 $t \in \mathbb{Z}_4$):

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \begin{cases} 0, & t=0, 2, \\ 1, & t=1, 3; \end{cases} \\ \delta &= \begin{cases} 1, & t=0, 3, \\ -1, & t=1, 2. \end{cases} \end{aligned}$$

今设有 $\text{LMTS}(n+2) = \{\mathbb{Z}_n \cup \{\infty_1, \infty_2\}, \epsilon_k\}$, 其中 n 个 ϵ_k 分别为 $\mathbb{Z}_n \cup \{\infty_1, \infty_2\}$ 上两两不交的 $\text{MTS}(n+2)$. 在 $X = \{\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_n\} \cup \{\infty_1, \infty_2\}$ 上构造 $4n$ 个循环三元系 $\mathcal{B}_k^t$ ($k \in \mathbb{Z}_n, t \in \mathbb{Z}_4$):

(I) $\langle (t, u), (t, v), (t, w) \rangle$, 若 $\langle u, v, w \rangle \in \epsilon_k$. 当 u, v, w 为 ∞_1 或 ∞_2 时, 删去其前边坐标 t ;

(II) $\langle Q_{t+\delta}, Q_{t+2\delta}, Q_{t+3\delta} \rangle$, 其中 $x, y \in \mathbb{Z}_n, y \neq k, k+1$;

(III) $\langle Q_{t-\delta}, Q_{t-2\delta}, Q_{t-3\delta} \rangle$, 其中 $x, y \in \mathbb{Z}_n, y \neq k+1-\bar{t}$;

(IV) $\langle (j, x), (j, y), (t, \frac{x+y}{2} + A_i(k+\bar{t}, k) - A_j(k+\bar{t}, k)) \rangle$, 其中 $x \neq y \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_n \setminus \{t\}$;

(V) $\langle Q_t, Q_{t+\delta}, Q_{t+2\delta} \rangle, \langle Q_t, Q_{t+2\delta}, Q_{t+3\delta} \rangle$ 与 $\langle Q_t, Q_{t+3\delta}, Q_{t+\delta} \rangle$, 其中 $x \in \mathbb{Z}_n$, 而 $y = k + \bar{t}$;

(VI) $\langle \infty_s, Q_{t\pm 1}, Q_{t\pm 2} \rangle, \langle \infty_s, Q_{t\pm 2}, Q_{t\pm 3} \rangle$ 与 $\langle \infty_s, Q_{t\pm 3}, Q_{t\pm 1} \rangle$, 其中 $s=1, 2, x \in \mathbb{Z}_n, y = k+1-\bar{t}$.

而 Q 下标中的 $\pm$ 号, $\bar{t}=0$ 时, $s=1$ 取正, $s=2$ 取负, $\bar{t}=1$ 时反之.

注 此构造的 (IV) 中用到分母 2, 即 $\mathbb{Z}_n$ 中元素 2 的逆元, 这是允许的, 因为 n 为奇数 (且 $n \geq 5$), 故 $\mathbb{Z}_n$ 中确存在有元素 2 的逆元 2^{-1} . 因 $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$, 故 $\mathbb{Z}_n$ 中的元若仅含素因子 2, 3, 则必为可逆元. 特别, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ 都是 $\mathbb{Z}_n$ 中的可逆元, 这在后边将用到.

为了给出 $n+2 \rightarrow 4n+2$ 递归构造中诸 $A_i(y, k)$ 的条件, 我们需要正交表的概念. 所谓一个正交表 $\text{OA}(N, k, n, d)$ 指的是 n 元集 S 上的一个 $N \times k$ 表阵, 使得在其任意 d 列的子阵中, S 的全部可重 d 排列均作为行出现相同的 λ 次. 不难算出这一次数 $\lambda = \frac{n^d}{N}$. 当 $d=2, \lambda=1$ 时,

$\text{OA}(n^2, k, n, 2)$ 常被简记为 $\text{OA}(n, k)$. 熟知, 一个 $\text{OA}(n, 3)$ 等价于一个 n 阶拉丁方, 而一个 $\text{OA}(n, 4)$ 等价于一对正交的 n 阶拉丁方.

下节引理中将涉及以下两种表阵, 它们分别决定着上述构造中的 (II), (III) 与 (IV):

$$M = [x + A_0(y, k), x + A_1(y, k), x + A_2(y, k), x + A_3(y, k)].$$

$$L(t, j) = [x, y, \frac{x+y}{2} + A_i(k+\bar{t}, k) - A_j(k+\bar{t}, k)],$$

其中 $t \neq j \in \mathbb{Z}_n$, 而变元 $x, y, k \in \mathbb{Z}_n$. 表阵的每行由同一组 x, y, k 的值给出. 当 x, y, k 均独立跑遍 $\mathbb{Z}_n$ 时, M 为一个 $n^3 \times 4$ 表阵, $L(t, j)$ 为一个 $n^3 \times 3$ 表阵. 对给定的 $k \in \mathbb{Z}_n$, M 与 $L(t, j)$ 中对应的子阵 (尺寸分别为 $n^2 \times 4$ 与 $n^2 \times 3$) 将分别被记为 M_k 与 $L_k(t, j)$. 而当 $y=k$ 或 $y=k+1$ 时, 表阵 M 中对应的 $n^2 \times 4$ 子阵则分别被简记为 M' 与 M'' . 相仿地, 它们中 k 给定的子阵记为 M'_k 与 M''_k .

2 参数的选取和定理 1 的证明

引理 5 当诸 $A_i (i \in \mathbb{Z}_4)$ 组成的表阵 M 与 $L(t, j) (t \neq j \in \mathbb{Z}_4)$ 满足以下条件时, 上节构造给出的 $4n$ 个循环三元系 $\mathcal{B}'_k (k \in \mathbb{Z}_n, t \in \mathbb{Z}_4)$ 组成一个 $\text{LMTS}(4n+2)$:

(c1) 对每个给定的 $k \in \mathbb{Z}_n$, 表阵 M_k 是一个 $\text{OA}(n, 4)$;

(c2) 表阵 M 是一个 $\text{OA}(n^3, 4, n, 3)$;

(c3) 表阵 M' 与 M'' 分别都是 $\text{OA}(n, 4)$. 而对给定的 $k \in \mathbb{Z}_n$, M'_k 与 M''_k 是 M_k 的两个无公共行的 $n \times 4$ 阶子阵;

(c4) 对每个给定的 $k \in \mathbb{Z}_n$ 及任意的 $t \neq j \in \mathbb{Z}_4$, 表阵 $L_k(t, j)$ 是一个 $\text{OA}(n, 3)$;

(c5) 对任 $t \neq j \in \mathbb{Z}_4$, 表阵 $L(t, j)$ 是一个 $\text{OA}(n^3, 3, n, 3)$.

证 首先给出每个 $\mathcal{B}'_k$ 所含循环三元组个数的计数. 显然, (I) 含有 $\frac{1}{3}(n+1)(n+2)$ 个区组. 而 (II) 则恰含有 n^2-2n 个区组 (这是因为, 由 (c1), 对给定 k, t , 表阵 $M(k)$ 中给定三列的全部 n^2 个行恰构成 $\langle Q_{t+\delta}, Q_{t+2\delta}, Q_{t+3\delta} \rangle = \langle t+\delta, x+A_{t+\delta}(y, k), \langle t+3\delta, x+A_{t+3\delta}(y, k) \rangle \rangle$ 各个元的第二坐标. 而从中剔除的 $y=k$ 与 $y=k+1$ 两族由 (c3) 知各含 n 个, 且彼此无公共区组). 类似可知 (III) 含有 n^2-n 个区组. 而 (IV), (V) 与 (VI) 分别含 $3(n^2-n)$, $3n$ 与 $6n$ 个区组. 于是

$$|\mathcal{B}'_k| = \frac{1}{3}(n+1)(n+2) + (n^2-2n) + (n^2-n) + 3(n^2-n) + 9n = \frac{1}{3}(4n+1)(4n+2).$$

这恰是一个 $\text{MTS}(4n+2)$ 应含的区组数.

为了证明每个 $\mathcal{B}'_k$ 是一个 $\text{MTS}(4n+2)$, 只需说明集合 $X = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_n) \cup \{\infty_1, \infty_2\}$ 中任二不同元组成的有序对 P 都含在某个区组中. 可将诸情形列述如下 (其中 $i, j \in \mathbb{Z}_4, u, v \in \mathbb{Z}_n$, 而 $s=1, 2$):

(1) $P = (\infty_s, \infty_{2-s})$ 含在 (I) 的某区组中;

(2) $P = (\infty_s, (i, u))$ 当 $i=t$ 时含在 (I) 的某区组中, 而当 $i \neq t$ 时则含在 (VI) 的某区组中 (因为 $\{t+1, t+2, t+3\} = \{t-1, t-2, t-3\} = \mathbb{Z}_4 \setminus \{t\}$, 而 $x+A_i(k+1-\bar{t}, k) = x+c_i(k+1-\bar{t})+d_i k$ 对指定的 k, t , 随 x 而跑过 $\mathbb{Z}_n$), $P = ((i, u), \infty_s)$ 时与此类似;

(3) $P = ((i, u), (i, v)), u \neq v$. 当 $i=t$ 时, P 在 (I) 的某区组中; 当 $i \neq t$ 时, 在 (IV) 的某区组中.

(4) $P = ((i, u), (j, v)), i \neq j$.

当 $t \in \{i, j\}$ 时, 由条件 (c4) 知 P 在 (IV) 的某区组或 (V) 的某区组中. 这里需要说明的是 (IV) 诸区组各分量第二坐标组成的拉丁方主对角线上各元对应的 n 个区组被剔除, 其包含的两个有序对族 $((j, x), (t, x+A_i(k+\bar{t}, k)-A_j(k+\bar{t}, k)))$ 与 $((t, x+A_i(k+\bar{t}, k)-A_j(k+\bar{t}, k)), (j, x))$ 恰将出现在 (V) 的相应区组中, 即 $((j, x+A_j(k+\bar{t}, k)), (t, x+A_i(k+\bar{t}, k)))$ 与 $((t, x+A_i(k+\bar{t}, k)), (j, x+A_j(k+\bar{t}, k)))$.

当 $t \notin \{i, j\}$ 时, 因 $\langle t + \delta, t + 2\delta, t + 3\delta \rangle$ 与 $\langle t - \delta, t - 2\delta, t - 3\delta \rangle$ 分别为 $\mathbb{Z}_4 \setminus \{t\}$ 中三个元的两种循环, 故对子 P 的第一坐标对 (i, j) 必可与 (II) 或 (III) 的某第一坐标对吻合. 进而, 由条件 (c1) 知 P 的第二坐标对 (u, v) 也必在 (II) 或 (III) 的某个区组之 (Q_i, Q_j) 对子处出现, 除非它恰好被 $y \neq k, k+1$ 或 $y \neq k+1-\bar{t}$ 的条件所删除. 然而, 因 $\{k+\bar{t}, k+1-\bar{t}\} = \{k, k+1\}$, (III) 中 $y = k+1-\bar{t}$ 时被删除的诸区组的对子将含在 (VI) 的某些区组中, (II) 中 $y = k+\bar{t}$ 与 $y = k+1-\bar{t}$ 时被删除的诸区组的对子将分别含在 (V) 的诸区组与 (VI) 的某些区组中. 总之, 在此情形下, P 必含在 (II), (III), (V) 或 (VI) 的某区组中.

最后再来证明这 $4n$ 个 $\mathcal{B}_k^t$ 的全体恰构成一个大集 $\text{LMTS}(4n+2)$. 这只需说明, 集合 $X = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_n) \cup \{\infty_1, \infty_2\}$ 中任意三个不同元组成的循环三元组 T 都必出现在某个 $\mathcal{B}_k^t$ 的一个区组中. 全部的可能情形如下 (其中 $i, j, t, l \in \mathbb{Z}_4, u, v, w \in \mathbb{Z}_n, s=1, 2$):

(1) $T = \langle \infty_s, \infty_{2-s}, (t, u) \rangle$ 在 $\mathcal{B}_k^t$ 的 (I) 中, 若 $\langle \infty_s, \infty_{2-s}, u \rangle \in \mathcal{C}_k$.

(2) $T = \langle \infty_s, (i, u), (j, v) \rangle$. 若 $i=j$, 则当 $\langle \infty_s, u, v \rangle \in \mathcal{C}_k$ 时, T 在 $\mathcal{B}_k^t$ 的 (I) 中; 若 $i \neq j$, 则因 (VI) 中含 ∞_1 区组内另二元的第一坐标有序对为

$t=0$ 时, $(1, 2), (2, 3), (3, 1)$;

$t=1$ 时, $(0, 3), (3, 2), (2, 0)$;

$t=2$ 时, $(3, 0), (0, 1), (1, 3)$;

$t=3$ 时, $(2, 1), (1, 0), (0, 2)$;

它们恰是 $\mathbb{Z}_4$ 中相异元组成的全部有序对. 因此对于 $s=1$, 恒可找到 $t \in \mathbb{Z}_4$, 使得相应的 $\mathcal{B}_k^t$ 的 (VI) 中含有区组类 $\langle \infty_1, Q_i, Q_j \rangle$, 进而, 由条件 (c3) 的第一句结论可知存在 $k, x \in \mathbb{Z}_n$, 使得此类区组中有 $Q_i = (i, x + A_i(k+1-\bar{t}, k)) = (i, u)$, $Q_j = (j, x + A_j(k+1-\bar{t}, k)) = (j, v)$, 而这个 k 即是上边记号 $\mathcal{B}_k^t$ 中待定的*. 对于 $s=2$ 类似可知, 因此时只需将上列表中诸有序对颠倒反序即可.

(3) $T = \langle (t, u), (t, v), (t, w) \rangle$, 诸 u, v, w 两两不等. 若 $\langle u, v, w \rangle \in \mathcal{C}_k$, 则 T 在 $\mathcal{B}_k^t$ 的 (I) 中.

(4) $T = \langle (j, u), (j, v), (t, w) \rangle$, $j \neq t$ 且 $u \neq v$. 由条件 (c5) 知对给定的 $u \neq v$, 存在 $k \in \mathbb{Z}_n$, 使得 $w = (u+v)/2 + A_t(k+t, k) - A_j(k+t, k)$. 于是 T 在 $\mathcal{B}_k^t$ 的 (IV) 中.

(5) $T = \langle (i, u), (j, v), (l, w) \rangle$, i, j, l 互不相等. 先列出 (II), (III), (V) 三部分区组的一览表 (表 1). 不难看出, (II) 与 (III) 中对某个 t 值缺少的区组都在其它 t 值的 (V) 中被补上了; 而 Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 中任三者的两种循环都在 (II), (III) 中各出现一次. 因此, 对给定的 T 的第一坐标循环 $\langle i, j, l \rangle$, 恒可找到一个 $t \in \mathbb{Z}_4$, 使表 1 此列的 (II) 或 (III) 中出现有 $\langle Q_i, Q_j, Q_l \rangle$. 进而, 由条件 (c2), 必存在 $k, x, y \in \mathbb{Z}_n$, 使得 $u = x + A_i(y, k)$, $v = x + A_j(y, k)$, $w = x + A_l(y, k)$. 于是 T 出现在 $\mathcal{B}_k^t$ 的 (II) 或

表 1

part	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
(II)	$\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$ $y \neq k, k+1$	$\langle Q_0, Q_3, Q_2 \rangle$ $y \neq k, k+1$	$\langle Q_1, Q_0, Q_3 \rangle$ $y \neq k, k+1$	$\langle Q_0, Q_1, Q_2 \rangle$ $y \neq k, k+1$
(III)	$\langle Q_3, Q_2, Q_1 \rangle$ $y \neq k+1$	$\langle Q_2, Q_3, Q_0 \rangle$ $y \neq k$	$\langle Q_3, Q_0, Q_1 \rangle$ $y \neq k+1$	$\langle Q_2, Q_1, Q_0 \rangle$ $y \neq k$
(V)	$\langle Q_0, Q_1, Q_2 \rangle$ $\langle Q_0, Q_2, Q_3 \rangle$ $\langle Q_0, Q_3, Q_1 \rangle$ $y = k$	$\langle Q_1, Q_0, Q_3 \rangle$ $\langle Q_1, Q_3, Q_2 \rangle$ $\langle Q_1, Q_2, Q_0 \rangle$ $y = k+1$	$\langle Q_2, Q_1, Q_0 \rangle$ $\langle Q_2, Q_0, Q_3 \rangle$ $\langle Q_2, Q_3, Q_1 \rangle$ $y = k$	$\langle Q_3, Q_0, Q_1 \rangle$ $\langle Q_3, Q_1, Q_2 \rangle$ $\langle Q_3, Q_2, Q_0 \rangle$ $y = k+1$

(III) 中, 或者 (因 $y=k$ 或 $k+1$) 依上表的缺补关系而出现在某个 $\mathcal{B}_k'$ 的 (V) 中. 引理 5 证毕.

引理 6 当诸 $A_i(y, k) = c_i y + d_i k$ 的系数 $c_i, d_i (i=0, 1, 2, 3)$ 满足以下 (D1) — (D3) 时, 引理 5 的全部条件 (c1) — (c5) 被满足:

(D1) 对任 $i \neq j \in \mathbb{Z}_4$, $c_i - c_j$ 均为 $\mathbb{Z}_n$ 的可逆元;

(D2) 对任 $i \neq j \in \mathbb{Z}_4$, $(c_i + d_i) - (c_j + d_j)$ 均为 $\mathbb{Z}_n$ 可逆元;

(D3) 下列 4×3 矩阵 R 的任意三阶子行列式值均为 $\mathbb{Z}_n$ 中可逆元:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & c_0 & d_0 \\ 1 & c_1 & d_1 \\ 1 & c_2 & d_2 \\ 1 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

证 以下逐条验证 (c1) — (c5) 的成立.

(c1) 对给定的 k 及 M_k 的某两列 $i, j (i \neq j \in \mathbb{Z}_4)$, 任取 $(u, v) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, 我们恒可找到 $x, y \in \mathbb{Z}_n$ 使

$$\begin{cases} x + c_i y + d_i k = u, \\ x + c_j y + d_j k = v. \end{cases}$$

事实上, 上述关于 x, y 的二元一次方程组在 $\mathbb{Z}_n$ 中有解的条件即是其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & c_i \\ 1 & c_j \end{vmatrix} = c_j - c_i$$

为 $\mathbb{Z}_n$ 中可逆元. 而这已由条件 (D1) 给出.

(c2) 对矩阵 M 的任意三列 i, j, l , 任取 $(u, v, w) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, 我们恒可找到 $k, x, y \in \mathbb{Z}_n$, 使得下列等式组成立:

$$\begin{cases} x + c_i y + d_i k = u, \\ x + c_j y + d_j k = v, \\ x + c_l y + d_l k = w, \end{cases}$$

这是因为此方程组的系数行列式是 $\mathbb{Z}_n$ 中的可逆元 (据条件 (D3), 它恰是那里所列 4×3 矩阵的一个三阶子行列式).

(c3) 对于表阵 M' 的任意两列 i, j , 任取 $(u, v) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ 恒可找到 $x, k \in \mathbb{Z}_n$, 使得有

$$\begin{cases} x + c_i k + d_i k = u, \\ x + c_j k + d_j k = v. \end{cases} \quad (*)$$

因为此方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & c_i + d_i \\ 1 & c_j + d_j \end{vmatrix} = (c_j + d_j) - (c_i + d_i)$$

是 $\mathbb{Z}_n$ 中的可逆元 (据 (D2)). 类似地可以说明表阵 M'' 也是一个 $OA(n, 4)$, 因为相应的方程组 (*) 只是等式右边变成 $u - c_i$ 与 $v - d_i$ (仍与 x, k 无关), 关于变元 x, k 的系数行列式并未改变.

至于 M_k' 与 M_k'' 的不相交性可以从更强的“任二列彼此无相同行”的性质推出. 事实上对任二列 i, j , 若有 $(x + (c_i + d_i)k, x + (c_j + d_j)k) = (x' + (c_i + d_i)k + c_i, x' + (c_j + d_j)k + c_j)$, 则将有 $x = x' + c_i$ 与 $x = x' + c_j$, 亦即 $c_i = c_j$. 但这与条件 (D1) 矛盾.

(c4) 对给定的 k 及 $L_k(t, j)$ 某两列, 任取 $(u, v) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. 则恒可找到 $x, y \in \mathbb{Z}_n$, 使该两列中相应于 (x, y) 的一行元为 (u, v) . 事实上, $L_k(t, j)$ 的任一行为

$$\begin{aligned} & (x, y, \frac{x+y}{2} + c_i(k+\bar{t}) + d_i k - c_j(k+\bar{t}) - d_j k) \\ & = (x, y, 2^{-1}x + 2^{-1}y + ((c_i + d_i) - (c_j + d_j))k + (c_i - c_j)\bar{t}). \end{aligned}$$

我们只需说明 x 与 y 的线性方程组

$$\begin{cases} x = u, \\ 2^{-1}x + 2^{-1}y = v - [(c_i + d_i) - (c_j + d_j)]k - (c_i - c_j)\bar{t} \end{cases}$$

在 $\mathbb{Z}_n$ 中有解, 而这是显然的, 因为其系数行列式值 $= 2^{-1}$, 是 $\mathbb{Z}_n$ 中可逆元.

(c5) 任取 $(u, v, w) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, 表阵 $L(t, j)$ 中恒可找到一行恰为 (u, v, w) . 事实上, 线性方程组

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ 2^{-1}x + 2^{-1}y + [(c_i + d_i) - (c_j + d_j)]k = w - (c_i - c_j)\bar{t} \end{cases}$$

恒有解 $x, y, k \in \mathbb{Z}_n$. 因为其系数行列式值 $= (c_i + d_i) - (c_j + d_j)$, 据 (D2) 它是 $\mathbb{Z}_n$ 中可逆元. 证毕.

引理 7 对于 $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$, $n > 1$, 存在有满足引理 6 中条件 (D1) — (D3) 的四个线性函数 $A_i(y, k) = c_i y + d_i k$ ($i = 0, 1, 2, 3$).

证 我们只需实际给出这样的 8 个参数 c_i, d_i ($i = 0, 1, 2, 3$), 并验证它们满足 (D1) — (D3) 即可. 事实上, 可以找到不止一组这样的参数. 这里我们列举出以下两组:

	c_0	d_0	c_1	d_1	c_2	d_2	c_3	d_3
①	0	0	-1	0	2	1	1	1
②	1	-1	2	-1	3	0	4	0

因为实际上 $n \geq 5$, 故这里诸系数所取 0, 1, 2, 3, 4 是合理的. 以下我们允许出现的 $\mathbb{Z}_n$ 中可逆元为 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ (参见第 1 节中注).

对于第①组, 诸 $c_i - c_j$ 的值为 $\pm 1, \pm 3, \pm 1, \pm 2, \pm 2$ 与 ± 1 ; 诸 $(c_i + d_i) - (c_j + d_j)$ 的值为 $\pm 1, \pm 4, \pm 1, \pm 3, \pm 3, \pm 2$; 而 4×3 矩阵 R 的四个三阶子行列式值为 $-1, -1, 1, 1$. 显然所列诸值均为 $\mathbb{Z}_n$ 中可逆元. 满足 (D1) — (D3).

对于第②组, 诸 $c_i - c_j = \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 2, \pm 2, \pm 3$; 诸 $(c_i + d_i) - (c_j + d_j) = \pm 1, \pm 2, \pm 1, \pm 3, \pm 3, \pm 4$; 而矩阵 R 的诸三阶子行列式值 $= 1, 1, -1, -1$. 亦满足 (D1) — (D3). 证毕.

经过引理 5—7, 我们将 $\text{LMTS}(n+2) \rightarrow \text{LMTS}(4n+2)$ 构造的正确性逐步转化为对诸参数 c_i, d_i 的合理选取, 从而最终完成了定理 1 的证明.

3 递归构造实例

设 $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$, $n > 1$. 已知有 $\text{LMTS}(n+2) = \{\{\mathbb{Z}_n \cup \{\infty_1, \infty_2\}, c_k\}; k \in \mathbb{Z}_n\}$, 今在集合 $X = (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) \cup \{\infty_1, \infty_2\}$ 上构作 $\text{LMTS}(4n+2) = \{(X, \mathcal{R}'_k); k \in \mathbb{Z}_n, t \in \mathbb{Z}_4\}$. 我们采用上节最后所给出的第①组参数. 以下诸 $\mathcal{R}'_k$ 的各区组表示式中, 变元 x, y 均跑过 $\mathbb{Z}_n$.

$\mathcal{B}_k^0 (k \in \mathbb{Z}_n)$:

- (I) $\langle (0, u), (0, v), (0, w) \rangle$, 若 $\langle u, v, w \rangle \in \mathcal{C}_k$, 而当 u, v, w 为 ∞_1 或 ∞_2 时删去前边坐标 0;
 (II) $\langle (1, x-y), (2, x+2y+k), (3, x+y+k) \rangle$, $y \neq k, k+1$;
 (III) $\langle (3, x+y+k), (2, x+2y+k), (1, x-y) \rangle$, $y \neq k+1$;
 (IV) $\langle (1, x), (1, y), (0, \frac{x+y}{2} + k) \rangle$, $\langle (2, x), (2, y), (0, \frac{x+y}{2} - 3k) \rangle$, $\langle (3, x), (3, y), (0, \frac{x+y}{2} - 2k) \rangle$, 其中 $x \neq y$;
 (V) $\langle (0, x), (1, x-k), (2, x+3k) \rangle$, $\langle (0, x), (2, x+3k), (3, x+2k) \rangle$, $\langle (0, x), (3, x+2k), (1, x-k) \rangle$;
 (VI) $\langle \infty_1, (1, x-k-1), (2, x+3k+2) \rangle$, $\langle \infty_1, (2, x+3k+2), (3, x+2k+1) \rangle$, $\langle \infty_1, (3, x+2k+1), (1, x-k-1) \rangle$; $\langle \infty_2, (3, x+2k+1), (2, x+3k+2) \rangle$, $\langle \infty_2, (2, x+3k+2), (1, x-k-1) \rangle$, $\langle \infty_2, (1, x-k-1), (3, x+2k+1) \rangle$.

$\mathcal{B}_k^1 (k \in \mathbb{Z}_n)$:

- (I) $\langle (1, u), (1, v), (1, w) \rangle$, 若 $\langle u, v, w \rangle \in \mathcal{C}_k$, 而当 u, v, w 为 ∞_1 或 ∞_2 时删去前边坐标 1;
 (II) $\langle (0, x), (3, x+y+k), (2, x+2y+k) \rangle$, $y \neq k, k+1$;
 (III) $\langle (2, x+2y+k), (3, x+y+k), (0, x) \rangle$, $y \neq k$;
 (IV) $\langle (2, x), (2, y), (1, \frac{x+y}{2} - 4k - 3) \rangle$, $\langle (3, x), (3, y), (1, \frac{x+y}{2} - 3k - 2) \rangle$, $\langle (0, x), (0, y), (1, \frac{x+y}{2} - k - 1) \rangle$, 其中 $x \neq y$;
 (V) $\langle (1, x-k-1), (0, x), (3, x+2k+1) \rangle$, $\langle (1, x-k-1), (3, x+2k+1), (2, x+3k+2) \rangle$, $\langle (1, x-k-1), (2, x+3k+2), (0, x) \rangle$;
 (VI) $\langle \infty_1, (0, x), (3, x+2k) \rangle$, $\langle \infty_1, (3, x+2k), (2, x+3k) \rangle$, $\langle \infty_1, (2, x+3k), (0, x) \rangle$, $\langle \infty_2, (2, x+3k), (3, x+2k) \rangle$, $\langle \infty_2, (3, x+2k), (0, x) \rangle$, $\langle \infty_2, (0, x), (2, x+3k) \rangle$.

$\mathcal{B}_k^2 (k \in \mathbb{Z}_n)$:

- (I) $\langle (2, u), (2, v), (2, w) \rangle$, 若 $\langle u, v, w \rangle \in \mathcal{C}_k$, 当 u, v, w 为 ∞_1 或 ∞_2 时删去前边坐标 2;
 (II) $\langle (1, x-y), (0, x), (3, x+y+k) \rangle$, $y \neq k, k+1$;
 (III) $\langle (3, x+y+k), (0, x), (1, x-y) \rangle$, $y \neq k+1$;
 (IV) $\langle (3, x), (3, y), (2, \frac{x+y}{2} + k) \rangle$, $\langle (0, x), (0, y), (\frac{x+y}{2} + 3k) \rangle$, $\langle (1, x), (1, y), (2, \frac{x+y}{2} + 4k) \rangle$, 其中 $x \neq y$;
 (V) $\langle (2, x+3k), (1, x-k), (0, x) \rangle$, $\langle (2, x+3k), (0, x), (3, x+2k) \rangle$, $\langle (2, x+3k), (3, x+2k), (1, x-k) \rangle$;
 (VI) $\langle \infty_1, (3, x+2k+1), (0, x) \rangle$, $\langle \infty_1, (0, x), (1, x-k-1) \rangle$, $\langle \infty_1, (1, x-k-1), (3, x+2k+1) \rangle$; $\langle \infty_2, (1, x-k-1), (0, x) \rangle$, $\langle \infty_2, (0, x), (3, x+2k+1) \rangle$, $\langle \infty_2, (3, x+2k+1), (1, x-k-1) \rangle$.

$\mathcal{B}_k^3 (k \in \mathbb{Z}_n)$:

- (I) $\langle (3, u), (3, v), (3, w) \rangle$, 若 $\langle u, v, w \rangle \in \mathcal{C}_k$, 而当 u, v, w 为 ∞_1 或 ∞_2 时删去前边坐标 3;
 (II) $\langle (0, x), (1, x-y), (2, x+2y+k) \rangle$; $y \neq k, k+1$;
 (III) $\langle (2, x+2y+k), (1, x-y), (0, x) \rangle$, $y \neq k$;

(IV) $\langle (0, x), (0, y), (3, \frac{x+y}{2} + 2k+1) \rangle, \langle (1, x), (1, y), (3, \frac{x+y}{2} + 3k+2) \rangle, \langle (2, x), (2, y), (3, \frac{x+y}{2} - k-1) \rangle$, 其中 $x \neq y$;

(V) $\langle (3, x+2k+1), (0, x), (1, x-k-1) \rangle, \langle (3, x+2k+1), (1, x-k-1), (2, x+3k+2) \rangle, \langle (3, x+2k+1), (2, x+3k+2), (0, x) \rangle$;

(VI) $\langle \infty_1, (2, x+3k), (1, x-k) \rangle, \langle \infty_1, (1, x-k), (0, x) \rangle, \langle \infty_1, (0, x), (2, x+3k) \rangle; \langle \infty_2, (0, x), (1, x-k) \rangle, \langle \infty_2, (1, x-k), (2, x+3k) \rangle, \langle \infty_2, (2, x+3k), (0, x) \rangle$.

4 LMTS(v)的谱

根据引理 1—4 及刚给出的递归定理 1, 即可最终完成 Mendelsohn 三元系大集的谱.

定理 2 的证 必要性是显然的, 因为 $v \equiv 0, 1 \pmod{3}$, $v \geq 3$, $v \neq 6$ 是 $\text{MTS}(v)$ 存在的谱.

以下证明充分性. 对于正整数 $v \equiv 0, 1 \pmod{3}$, 恒可将其唯一地表示为 $v = 2'u + 2$, 其中 t 为非负整数, 而正整数 $u \equiv \pm 1 \pmod{6}$. 于是

- (1) 当 $t=0$ 时, $v=u+2$. 由引理 1 存在 $\text{LMTS}(v)$;
- (2) 当 $t=1$ 时, $v=2u+2$, 由引理 2 存在 $\text{LMTS}(v)$;
- (3) 当 $t=2$ 时且 $u>1$ 时, 由引理 1 存在 $\text{LMTS}(u+2)$, 而由刚刚得到的定理 1, 存在 $\text{LMTS}(4u+2)=\text{LMTS}(v)$;
- (4) 当 $t \geq 3$ 时, 由引理 1, 4 分别存在有 $\text{LMTS}(u+2)$ 与 $\text{LMTS}(2'+2)$, 从而由引理 3, 存在 $\text{LMTS}(2'u+2)=\text{LMTS}(v)$.

最后要说明的是本文定理 1 的条件实际可以弱化为“对于奇素数 $n>3$, 若存在 …”, 因为由它及引理 3 亦可得到现在的定理 1. 条件弱化后引理 7 中 (D1)—(D3) 诸款的条件“为可逆元”则只需是“为非零元”. 本文只是为了更一般化而采用了强化形式.

参 考 文 献

- [1] Mendelsohn, N. S., *Computers in Number Theory*, Academic Press, New York, 1971, 323—338.
- [2] Bermond, J. C., *Discrete Math.*, 1974, 8: 301—304.
- [3] Lindner, C. C., *J. Combin. Theory (A)*, 1981, 30: 326—330.
- [4] Wu, L. S., *Journal of Suzhou Univ.*, 1987, 3(2): 1—4.
- [5] Teirlinck, Luc., Lindner, C. C., *Eur. J. Combin.*, 1988, 9: 83—89.
- [6] Kang, Q. D., Chang, Y. X., *Combinatorial Designs and Applications* (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 126), Marcel Dekker Inc., 1990, 69—78.
- [7] Kang, Q. D., *Discrete Math.*, 1991, 90: 199—205.
- [8] Kang, Q. D., Chang, Y. X., *Science Bulletin (Chinese)*, 1992, 37(1): 90—91.