论 文

Łukasiewicz 命题逻辑中公式的 Γ -真度理论和
极限定理

吴洪博

陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710062

E-mail: wuhb@snnu.edu.cn

收稿日期: 2014-04-20; 接受日期: 2014-06-26

国家自然科学基金 (批准号:11171196) 资助项目

摘要 对“Łukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理”进行了再研究. (1) 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 给出了真度的赋值表示形式, 该形式从赋值角度直接反映了公式的真度表示公式为重言式的隶属度的实质; (2) 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 利用真度的赋值表示形式提出了公式关于局部有限理论 Γ 的 Γ -真度概念, 给出了公式的 Γ -真度的几种等价形式及性质; (3) 得到了Łukasiewicz n 值命题逻辑中关于 Γ -真度理论的极限定理; (4) 给出了Łukasiewicz 连续值命题逻辑中公式的 Γ -真度定义的合理形式, 以及Łukasiewicz 命题逻辑中真度的对称性定理; (5) 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 利用极限方法和 Γ -真度的赋值形式对公式关于无限理论 Γ 的 Γ -真度问题进行了讨论.

关键词 Łukasiewicz 命题逻辑 真度 赋值 局部有限理论 Γ -真度 极限定理 无限理论

1 引言

自 20 世纪 70 年代 Pavelka 关于命题逻辑中结论程度化的思想提出以后^[1], 关于逻辑结论的程度化问题吸引了众多学者的关注, 并在结论程度化方法的研究方面取得了一系列的研究成果^[2~38], 其中 21 世纪初期王国俊教授提出的模糊推理的三 I 算法理论, 广义重言式理论, 计量逻辑理论^[12~15]是这些研究成果的重要组成部分. 许多学者投入到对这些理论和方法的研究之中^[16~38]. 计量逻辑中的基本理论是公式的真度理论, 而真度理论是王国俊教授将概率计算与数理逻辑相结合在 2000 年于文献^[15]中建立的, 随后经过系列研究, 于文献^[38]中建立了Łukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理, 将Łukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和Łukasiewicz 连续值命题逻辑中公式的真度理论有机的联系在一起. 文献^[21,32]从不同的角度在几种著名的逻辑系统对广义真度问题和广义重言度问题进行了研究, 文献^[33]将真度理论引入模态逻辑理论的研究之中, 并在模态逻辑中得到了关于真度理论的和谐定理, 文献^[34,35]将真度方法应用于多值模态逻辑和基于有限迁移系统的线性时态逻辑的计量化方法的研究之中, 并取得了一些重要成果. 本文根据文献^[1]中关于 Γ -结论程度化的思想, 对文献^[38]中Łukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理进行了再研究. 首先, 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中给出了真度定义的赋值表示形式, 这种形式从赋值方面直接体现了公式真度表示公式为重言式的隶属度, 利于将真度理论进行合理推广, 以及对公式关于无限理论的 Γ -

引用格式: 吴洪博. Łukasiewicz 命题逻辑中公式的 Γ -真度理论和极限定理. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 1542–1559, doi: 10.1360/N112013-00171

真度问题进行讨论; 其次, 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中利用真度定义的赋值表示形式给出了公式关于局部有限理论 Γ (理论 Γ 中出现在 Γ 的公式中的原子公式有限) 的 Γ -真度, 并给出了 Γ -真度的不同表示形式, 讨论了 Γ -真度的一些重要性质; 第三, 证明了Łukasiewicz n 值命题逻辑中关于 Γ -真度的极限定理, 给出了 Γ -真度的极限定理中条件极限 (积分域测度不等于零时) 的积分表示形式; 第四, 利用Łukasiewicz n 值命题逻辑中关于 Γ -真度的极限定理给出了Łukasiewicz 连续值命题逻辑中 Γ -真度的合理形式, 以及Łukasiewicz 命题逻辑中真度的对称性定理; 第五, 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中利用极限方法和 Γ -真度的赋值形式讨论了公式关于无限理论的 Γ -真度问题.

本文未指出而直接引用的有关概念和基本结论请参见参考文献 [15,38].

2 预备知识

首先记

$$L_n = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}, n \geq 2.$$

在 L_n 和单位闭区间 $[0,1]$ 中规定

$$a \rightarrow b = \min\{1 - a + b, 1\}, \quad a \vee b = \max\{a, b\}, \quad \neg a = 1 - a.$$

则 L_n 是Łukasiewicz n 值系统, $[0,1]$ 是Łukasiewicz 连续值系统 [38], 本文仍分别简记为 $L_n, [0,1]$.

定义 2.1^[15,38] 设 $S = \{p_1, p_2, \dots\}$ 是可数无穷集合, $(F(S), (\neg, \vee, \rightarrow))$ 是由 S 生成的 (1,2,2) 型自由代数, 称 $F(S)$ 中的元素为命题公式或公式, 称 S 中的元素为原子公式.

定义 2.2^[15,37,38] 设 $A = A(p_1, \dots, p_m) \in F(S)$, 则 A 在Łukasiewicz n 值和连续值命题逻辑中分别对应 m 元函数 $\bar{A}^*: L_n^m \rightarrow L_n$ 和 $\bar{A}: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$. 这里 $\bar{A}^*(x_1, \dots, x_m)$ 和 $\bar{A}(x_1, \dots, x_m)$ 是由运算符 $\neg, \vee, \rightarrow$ 把 $x_1, \dots, x_m$ 连接而成, 其方式恰如 $A = A(p_1, \dots, p_m)$ 由连接词 $\neg, \vee, \rightarrow$ 将原子公式 $p_1, \dots, p_m$ 连接而成. 称 $\bar{A}^*$ 和 $\bar{A}$ 是公式 A 所诱导的函数.

由于双限制函数 $\bar{A}|_{L_n}: L_n^m \rightarrow [0,1] \cap L_n$ 就是函数 $\bar{A}^*: L_n^m \rightarrow L_n$, 本文将函数 $\bar{A}^*$ 也记作 $\bar{A}$.

定义 2.3 在Łukasiewicz 命题逻辑中, 设 $\bar{A}(x_1, \dots, x_m)$ 是 $F(S)$ 中命题公式 $A(p_1, \dots, p_m)$ 所诱导的函数, $k \geq m$. 定义 $\bar{A}^k: L_n^k \rightarrow L_n$ (或 $\bar{A}^k: [0,1]^k \rightarrow [0,1]$), $\forall (x_1, \dots, x_k) \in L_n^k$ (或 $[0,1]^k$),

$$\bar{A}^k(x_1, \dots, x_m, \dots, x_k) = \bar{A}(x_1, \dots, x_m),$$

称 $\bar{A}^k$ 为函数 $\bar{A}$ 的直到第 k 元的扩张.

在文献 [15] 中, 王国俊教授将概率计算和数理逻辑相结合在Łukasiewicz n 值命题逻辑中建立了公式真度理论, 随后在文献 [38] 中建立了连接Łukasiewicz n 值命题逻辑和Łukasiewicz 连续值命题逻辑中公式的真度理论的极限定理. 在此基础上创立了计量逻辑理论 (Quantitative Logic)^[13~15]. 本文对真度的原始定义 [38] 不再赘述, 仅以引理的形式给出真度定义的等价形式.

引理 2.1^[38] 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 设 $A = A(p_1, \dots, p_m)$ 是 $F(S)$ 中含有 m 个原子公式 $p_1, \dots, p_m$ 的命题公式, $\bar{A}(x_1, \dots, x_m)$ 是公式 A 所诱导的函数. 则

$$\tau_n(A) = \frac{1}{n^m} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| \bar{A}^{-1} \left(\frac{i}{n-1} \right) \right|,$$

这里, $\tau_n(A)$ 为 A 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中的真度 [38], $|E|$ 表示集合 E 中元素的个数.

定义 2.4^[37,38] 在Lukasiewicz 连续值命题逻辑中, 设 $A = A(p_1, \dots, p_m) \in F(S)$ 是含有 m 个原子公式 $p_1, \dots, p_m$ 的命题公式, $\bar{A}(x_1, \dots, x_m)$ 是公式 A 所诱导的函数. 令

$$\tau_{\infty}(A) = \int_{[0,1]^m} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m,$$

称 $\tau_{\infty}(A)$ 为公式 A 在Lukasiewicz 连续值命题逻辑中的真度. 本文后面将 $\bar{A}^k$ 仍记为 $\bar{A}$.

3 真度的赋值表示形式

在Lukasiewicz n 值命题逻辑中, 为了从赋值方面体现公式的真度表示公式为重言式的隶属度的实质, 并将真度理论合理地推广为公式关于给定理论 Γ 的 Γ -真度理论, 下面给出公式真度的赋值表示形式.

定理 3.1 在Lukasiewicz n 值命题逻辑中, 设 Ω 是从 $F(S)$ 到 L_n 的全体赋值之集, 即, $\Omega = \{v : F(S) \rightarrow L_n \text{ 是 } \neg, \vee, \rightarrow \text{ 型同态}\}$, $A = A(p_1, \dots, p_m)$ 是 $F(S)$ 中含原子公式 $p_1, \dots, p_m$ 的命题公式, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, 令 $N(A, i) = |\{v|_{\{p_1, \dots, p_m\}} | v \in \Omega, v(A) = \frac{i}{n-1}\}|$, 则在Lukasiewicz n 值命题逻辑中, $\tau_n(A) = \frac{1}{n^m} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-1} N(A, i)$, 其中 $v|_{\{p_1, \dots, p_m\}} : \{p_1, \dots, p_m\} \rightarrow L_n$ 是赋值 $v : F(S) \rightarrow L_n$ 在 $\{p_1, \dots, p_m\}$ 上的限制.

证明 见附录 A.

4 Lukasiewicz n 值命题逻辑中的 Γ -真度

引理 2.1 是命题公式 A 在Lukasiewicz n 值命题逻辑中真度的等价形式. 按照 Pavelka 的观点^[1,15], 一个自然的问题是: 在Lukasiewicz n 值命题逻辑中, 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, 命题公式 A 相对于理论 Γ 的真度如何定义?

设公式 $A(p_1, \dots, p_m)$ 是Lukasiewicz n 值命题逻辑中的重言式, 即, $\forall v \in \Omega, v(A) = 1$. 则在定理 3.1 中, $N(A, n-1) = n^m, \forall i \in \{1, \dots, n-2\}, N(A, i) = 0$. 因此, 由定理 3.1 可知: $\tau_n(A) = 1$. 这个结果从赋值的角度直接表明在Lukasiewicz n 值命题逻辑中公式 A 的真度实质是公式 A 为重言式的隶属度. 因此, 在Lukasiewicz n 值命题逻辑中公式 A 相对于理论 Γ 的真度应是公式 A 相对于模型集 $\Omega(\Gamma) = \{v \in \Omega | \forall B \in \Gamma, v(B) = 1\}$ 为 Γ -重言式的隶属度. 基于这个观点, 结合定理 3.1, 我们在Lukasiewicz n 值命题逻辑中给出公式 A 相对于局部有限理论 Γ (理论 Γ 中出现在 Γ 的公式中的原子公式有限) 的 Γ -真度定义, 随后利用诱导函数给出了 Γ -真度的两种等价形式并讨论了相关性质.

设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$, 本文约定 $S_{\Gamma} = \{p \in S | \exists B \in \Gamma, p \text{ 在 } B \text{ 中出现}\}$, $S_A = \{p \in S | p \text{ 在 } A \text{ 中出现}\}$. 当 S_{Γ} 有限时, 称 Γ 为Lukasiewicz 命题逻辑中的局部有限理论.

定义 4.1 在Lukasiewicz n 值命题逻辑中, 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $\Omega(\Gamma) = \{v \in \Omega | \forall B \in \Gamma, v(B) = 1\}$, S_{Γ} 有限. $\forall A \in F(S)$,

当 $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ 时, 定义

$$\tau_{n,\Gamma}(A) = \frac{1}{N(\Gamma, A)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} N(\Gamma, A, i),$$

其中, $N(\Gamma, A) = \sum_{i=0}^{n-1} N(\Gamma, A, i)$, $N(\Gamma, A, i) = |\{v|_{S_{\Gamma} \cup S_A} | v \in \Omega(\Gamma), v(A) = \frac{i}{n-1}\}|$ ($\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$), $v|_{S_{\Gamma} \cup S_A} : S_{\Gamma} \cup S_A \rightarrow L_n$ 是 $v : F(S) \rightarrow L_n$ 在 $S_{\Gamma} \cup S_A$ 上的限制. 当 $\Omega(\Gamma) = \emptyset$ 时, 约定 $\tau_{n,\Gamma}(A) = 1$.

$\tau_{n,\Gamma}(A)$ 叫做公式 A 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中相对于局部有限理论 Γ 的 Γ -真度, 简称 Γ -真度. 本文将 $\tau_{n,\Gamma}(A)$ 简记为 $\tau_{n\Gamma}(A)$.

注 4.1 (1) 由于 $\forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, 当 $i \neq j$ 时,

$$\left\{v|_{S_{\Gamma \cup S_A}} | v \in \Omega(\Gamma), v(A) = \frac{i}{n-1}\right\} \cap \left\{v|_{S_{\Gamma \cup S_A}} | v \in \Omega(\Gamma), v(A) = \frac{j}{n-1}\right\} = \emptyset.$$

因此 $N(\Gamma, A) = \sum_{i=0}^{n-1} |\{v|_{S_{\Gamma \cup S_A}} | v \in \Omega(\Gamma), v(A) = \frac{i}{n-1}\}| = |\bigcup_{i=0}^{n-1} \{v|_{S_{\Gamma \cup S_A}} | v \in \Omega(\Gamma), v(A) = \frac{i}{n-1}\}| = |\{v|_{S_{\Gamma \cup S_A}} | v \in \Omega(\Gamma)\}|$.

(2) 当 $\Gamma = \emptyset$ 时, $S_{\Gamma} = \emptyset$, $\Omega(\Gamma) = \Omega$. 设 A 由原子公式 $p_1, \dots, p_m$ 构成. 则由 (1) 知

$$N(\Gamma, A) = |\{v|_{S_{\Gamma \cup S_A}} | v \in \Omega(\Gamma)\}| = |\{v|_{\{p_1, \dots, p_m\}} | v \in \Omega\}| = n^m.$$

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, N(\Gamma, A, i) = \left| \left\{v|_{\{p_1, \dots, p_m\}} | v \in \Omega, v(A) = \frac{i}{n-1}\right\} \right| = N(A, i).$$

因此, 根据定理 3.1 知: $\tau_{n\Gamma}(A) = \tau_n(A)$. 此式说明 Γ -真度是真度概念的自然推广.

例 4.1 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 设 $\Gamma_1 = \{p_1 \rightarrow p_2\}$, $\Gamma_2 = \{(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_2\}$, $A = p_2$. 试分别计算 $\tau_{n\Gamma_1}(A)$, $\tau_{n\Gamma_2}(A)$.

解答 分别按定义 4.1 计算.

(1) $S_{\Gamma_1} = \{p_1, p_2\}$, $S_A = \{p_2\}$,

$$\begin{aligned} \Omega(\Gamma_1) &= \{v \in \Omega | v(p_1 \rightarrow p_2) = 1\} \\ &= \{v \in \Omega | v(p_1) \rightarrow v(p_2) = 1\} = \{v \in \Omega | v(p_1) \leq v(p_2)\} \\ &= \left\{v \in \Omega | (v(p_1), v(p_2)) \in \bigcup_{i=0}^n \left(\bigcup_{j=i}^n \left\{ \left(\frac{i}{n-1}, \frac{j}{n-1} \right) \right\} \right) \right\} \\ &= \{v \in \Omega | (v(p_1), v(p_2)) \in \left\{ (0, 0), \dots, \left(0, \frac{n-1}{n-1} \right), \left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1} \right), \dots, \left(\frac{1}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} \right), \dots, (1, 1) \right\}\}. \end{aligned}$$

因此, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

$$N(\Gamma_1, A, i) = \left| \left\{v|_{\{p_1, p_2\}} | v \in \Omega(\Gamma_1), v(A) = \frac{i}{n-1}\right\} \right| = i + 1,$$

而且

$$N(\Gamma_1, A) = \sum_{i=0}^{n-1} N(\Gamma_1, A, i) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \tau_{n\Gamma_1}(A) &= \frac{1}{N(\Gamma_1, A)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} N(\Gamma_1, A, i) \\ &= \frac{2}{n \times (n+1)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \times (i+1) = \frac{2}{n \times (n+1) \times (n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} i \times (i+1) \\ &= \frac{2}{n \times (n+1) \times (n-1)} \times \frac{1}{3} (n-1)n(n+1) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$(2) S_{\Gamma_2} = \{p_1, p_2\}, S_A = \{p_2\},$$

$$\begin{aligned}\Omega(\Gamma_2) &= \{v \in \Omega | v((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_2) = 1\} \\ &= \{v \in \Omega | (v(p_1) \rightarrow v(p_2)) \rightarrow v(p_2) = 1\} \\ &= \{v \in \Omega | v(p_1) = 1, \text{ 或 } v(p_2) = 1\} \\ &= \left\{v \in \Omega | (v(p_1), v(p_2)) \in \left\{\left(\frac{i}{n-1}, 1\right) | i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\right\} \cup \left\{\left(1, \frac{i}{n-1}\right) | i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\right\}\right\}.\end{aligned}$$

因此, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$,

$$N(\Gamma_2, A, i) = \left| \left\{ v |_{\{p_1, p_2\}} | v \in \Omega(\Gamma_2), v(A) = \frac{i}{n-1} \right\} \right| = 1.$$

$$N(\Gamma_2, A, n-1) = \left| \left\{ v |_{\{p_1, p_2\}} | v \in \Omega(\Gamma_2), v(A) = \frac{n-1}{n-1} \right\} \right| = n.$$

而且,

$$N(\Gamma_2, A) = \sum_{i=0}^{n-1} N(\Gamma_2, A, i) = n-1 + n = 2n-1.$$

因此,

$$\begin{aligned}\tau_{n\Gamma_2}(A) &= \frac{1}{N(\Gamma_1, A)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} N(\Gamma_1, A, i) \\ &= \frac{1}{2n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{i}{n-1} N(\Gamma_1, A, i) + \frac{n-1}{n-1} N(\Gamma_1, A, n-1) \right) \\ &= \frac{1}{2n-1} \left(\left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{i}{n-1} \right) + n \right) \\ &= \frac{3n-2}{2(2n-1)}.\end{aligned}$$

定理 4.1 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 设 $\Gamma \subseteq F(S), A \in F(S), S_\Gamma$ 有限, $S_\Gamma \cup S_A = \{p_1, \dots, p_k\}$, $\Delta_n(\Gamma, A) = \{(x_1, \dots, x_k) \in L_n^k | \forall B \in \Gamma, \bar{B}(x_1, \dots, x_k) = 1\} \neq \emptyset$. 则

$$\tau_{n\Gamma}(A) = \frac{1}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| (\bar{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1} \left(\frac{i}{n-1} \right) \right|,$$

$\bar{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)} : \Delta_n(\Gamma, A) \rightarrow L_n$ 是公式 A 诱导的函数的扩充函数 $\bar{A} : L_n^k \rightarrow L_n$ 在 $\Delta_n(\Gamma, A)$ 上的限制.

证明 根据定义 4.1, 方法类似定理 3.1 的证明.

定理 4.2 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 设 $\Gamma \subseteq F(S), A \in F(S), S_\Gamma$ 有限, $S_\Gamma \cup S_A = \{p_1, \dots, p_m\}$, $\Delta_n(\Gamma, A) = \{(x_1, \dots, x_m) \in L_n^m | \forall B \in \Gamma, \bar{B}(x_1, \dots, x_m) = 1\} \neq \emptyset$. 则

$$\tau_{n\Gamma}(A) = \frac{1}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A)} \bar{A}(x_1, \dots, x_m),$$

其中, $\bar{A}$ 是公式 A 诱导的函数的扩充函数 $\bar{A} : L_n^m \rightarrow L_n$.

证明 见附录 B.

推论 4.1(真度的均值表示形式)^[36] 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 设 $A = A(p_1, \dots, p_m)$ 是 $F(S)$ 中含有 m 个原子公式 $p_1, \dots, p_m$ 的命题公式, $\bar{A}(x_1, \dots, x_m)$ 是公式 A 所诱导的函数, 则有

$$\tau_n(A) = \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in L_n^m} \bar{A}(x_1, \dots, x_m).$$

证明 当 $\Gamma = \emptyset$ 时, $\Delta_n(\Gamma, A) = L_n^m$, $|\Delta_n(\Gamma, A)| = n^m$; 又由注 4.1(2) 知, 当 $\Gamma = \emptyset$ 时, $\tau_{n\Gamma}(A) = \tau_n(A)$. 因此, 根据定理 4.1 知结论成立.

定理 4.3 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$, S_Γ 有限, $\forall p_j \in S$, 令 $D = A \wedge (p_j \rightarrow p_j)$, 则 $\tau_{n\Gamma}(A) = \tau_{n\Gamma}(D)$. 从而, 在公式 A 的真度不变的前提下, 可以将公式 A 中的原子公式进行有限次的扩充.

证明 见附录 C.

定理 4.3 的重要性在于当讨论不同公式的 Γ -真度时, 例如, 讨论连接词的 Γ -真度性质时, 需要利用定理 4.3 将各个公式中的原子公式进行扩充, 使得他们在 Γ -真度不变的前提下含有相同的原子公式.

5 Γ -真度极限定理

在文献 [38] 中Łukasiewicz n 值命题逻辑中真度的极限定理将Łukasiewicz 有限值命题逻辑中的公式真度理论和Łukasiewicz 连续值命题逻辑中的公式真度理论有机地联系为一体, 完美的体现了真度理论的和諧性. 本节将在Łukasiewicz n 值命题逻辑中给出关于 Γ -真度理论的极限定理, 而将文献 [38] 中关于真度理论的极限定理作为它的推论.

定理 5.1(Γ -真度极限定理) 在Łukasiewicz 连续值命题逻辑中, 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$, S_Γ 有限, $S_\Gamma \cup S_A = \{p_1, \dots, p_m\}$, $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A) = \{(x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]^m \mid \forall B \in \Gamma, \bar{B}(x_1, \dots, x_m) = 1\}$. 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma}(A)$ 存在, 并且当 $\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} dx_1 \cdots dx_m \neq 0$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma}(A) = \frac{1}{\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} dx_1 \cdots dx_m} \int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m,$$

其中, 被积函数 $\bar{A}(x_1, \dots, x_m)$ 是Łukasiewicz 连续值命题逻辑中公式 A 诱导的函数 $\bar{A}(x_1, \dots, x_m) : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$.

证明 见附录 D.

推论 5.1(真度极限定理)^[38] 在Łukasiewicz n 值和连续值命题逻辑中, 设 $A = A(p_1, \dots, p_m)$ 是 $F(S)$ 中含有 m 个原子公式 $p_1, \dots, p_m$ 的命题公式, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(A) = \tau_\infty(A)$.

证明 在定理 5.1 中取 $\Gamma = \emptyset$ 并结合注 4.1(2) 可知结论成立.

6 Łukasiewicz 连续值命题逻辑中公式的 Γ -真度

本节将借助Łukasiewicz n 值命题逻辑中 Γ -真度理论的极限定理在Łukasiewicz 连续值命题逻辑中给出公式相对于局部有限理论的 Γ -真度的合理形式. 与文献 [38] 中真度理论的极限定理类似, 关

于 Γ -真度理论的极限定理是Łukasiewicz 有限值命题逻辑和Łukasiewicz 连续值命题逻辑中公式关于局部有限理论 Γ 的 Γ -真度理论的联系纽带.

根据定理 5.1 可知下面的定义 6.1 是合理的.

定义 6.1 在Łukasiewicz 连续值命题逻辑中, 设 $\Gamma \subseteq F(S), A \in F(S), S_\Gamma$ 有限. 称 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma}(A)$ 为公式 A 在Łukasiewicz 连续值命题逻辑中相对于局部有限理论 Γ 的 Γ -真度, 记作 $\tau_{[0,1]\Gamma}(A)$. 即,

$$\tau_{[0,1]\Gamma}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma}(A).$$

例 6.1 在Łukasiewicz 连续值命题逻辑中, 设

$$\Gamma_1 = \{p_1 \rightarrow p_2\}, \Gamma_2 = \{(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_2\}, A = p_2.$$

试分别计算 $\tau_{[0,1]\Gamma_1}(A), \tau_{[0,1]\Gamma_2}(A)$.

解答 由例 4.1 知 $\forall n \in Z_+ - \{1\}$, 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中

$$\tau_{n\Gamma_1}(A) = \frac{2}{3}, \quad \tau_{n\Gamma_2}(A) = \frac{3n-2}{2(2n-1)}.$$

因此, 根据定义 6.1 知在Łukasiewicz 连续值命题逻辑中,

$$\tau_{[0,1]\Gamma_1}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma_1}(A) = \frac{2}{3},$$

$$\tau_{[0,1]\Gamma_2}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma_2}(A) = \frac{3}{4}.$$

或由于

$$\begin{aligned} \Delta_{[0,1]}(\Gamma_1, A) &= \{(x_1, x_2) \in [0, 1]^2 | \overline{p_1} \rightarrow \overline{p_2}(x_1, x_2) = 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in [0, 1]^2 | x_1 \rightarrow x_2 = 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in [0, 1]^2 | x_1 \leq x_2\}. \end{aligned}$$

因此, $\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma_1, A)} dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \neq 0$, 根据定义 6.1 和定理 5.1 得

$$\begin{aligned} \tau_{[0,1]\Gamma_1}(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma_1}(A) \\ &= \frac{1}{\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} dx_1 dx_2} \int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma_1, A)} \overline{A}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} dx_1 dx_2} \int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma_1, A)} x_2 dx_1 dx_2 \\ &= 2 \int_0^1 \left(\int_0^{x_2} dx_1 \right) x_2 dx_2 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

由于 $\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma_2, A)} dx_1 dx_2 = 0$, 因此, $\tau_{n\Gamma_2}(A)$ 没有积分计算形式.

定理 6.1 在Łukasiewicz 连续值命题逻辑中, 设 $\Gamma \subseteq F(S), A \in F(S), S_\Gamma$ 有限, $\forall p_j \in S$ 令 $D = A \wedge (p_j \rightarrow p_j)$, 则 $\tau_{[0,1]\Gamma}(A) = \tau_{[0,1]\Gamma}(D)$. 从而, 在公式 A 的真度不变的前提下, 可以将公式 A 中的原子公式进行有限次的扩充.

证明 这是定理 4.3, 定义 6.1, 定理 5.1 的直接结果.

定理 6.2(真度对称性定理) 在Łukasiewicz 命题逻辑中, 把命题公式中的部分原子公式换成它的否定, 公式的真度不变.

证明 见附录 E 定理 6.2 的证明.

例 6.2 文献 [38] 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中已经得到: $\tau_n(p \rightarrow q) = \frac{5n-1}{6n}$, 结合定理 6.2 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中可以得到

$$\tau_n(\neg p \rightarrow q) = \tau_n(p \rightarrow \neg q) = \tau_n(\neg p \rightarrow \neg q) = \tau_n(p \rightarrow q) = \frac{5n-1}{6n}.$$

因此, 在Łukasiewicz 连续值命题逻辑中根据推论 5.1 得

$$\tau_\infty(\neg p \rightarrow q) = \tau_\infty(p \rightarrow \neg q) = \tau_\infty(\neg p \rightarrow \neg q) = \tau_\infty(p \rightarrow q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(p \rightarrow q) = \frac{5}{6}.$$

注 6.1 在Łukasiewicz 命题逻辑中 Γ -真度并不具有像定理 6.2 中真度的对称性质. 例如, 例 6.1 中我们已经通过计算得到: $\tau_{[0,1]\Gamma_1}(A) = \frac{2}{3}$. 将 A 中的 p_2 换为 $\neg p_2$ 后得到公式 $B = \neg p_2$. 由于 $S_{\Gamma_1} \cup S_B = S_{\Gamma_1} \cup S_A = \{p_1, p_2\}$, 根据定理 5.1 中 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 的定义和例 6.1 知 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma_1, B) = \Delta_{[0,1]}(\Gamma_1, A) = \frac{1}{2} \neq 0$. 因此, 根据定义 6.1 和定理 5.1 得:

$$\begin{aligned} \tau_{[0,1]\Gamma_1}(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma_1}(B) \\ &= \frac{1}{\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, B)} dx_1 dx_2} \int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma_1, B)} \overline{B}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, B)} dx_1 dx_2} \int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma_1, B)} \neg x_2 dx_1 dx_2 \\ &= 2 \int_0^1 \left(\int_0^{x_2} dx_1 \right) (1 - x_2) dx_2 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

从而, $\tau_{[0,1]\Gamma_1}(A) \neq \tau_{[0,1]\Gamma_1}(B)$.

7 公式相对于无限理论 Γ 的 Γ -真度的思考

本文在有限值和连续值Łukasiewicz 命题逻辑中提出了公式相对于局部有限理论 Γ 的 Γ -真度理论, 将真度理论在有限值和连续值Łukasiewicz 命题逻辑中进行了两方面的推广, 并且将两者通过有限值Łukasiewicz 命题逻辑中 Γ -真度理论的极限定理和谐的联系在一起, 从而说明了这种推广的合理性和严谨性. 但 Γ -真度仅仅是相对于局部有限理论建立的, 因此一个自然的问题是: 在Łukasiewicz n 值(或连续值)命题逻辑中, 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$. 当 S_Γ 无限时, 公式 A 相对于理论 Γ 的 Γ -真度如何定义?

我们首先在Łukasiewicz n 值命题逻辑中进行考虑. 根据定义 4.1, 我们可以利用极限的思想方法讨论这个问题.

定义 7.1 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $\Omega(\Gamma) = \{v \in \Omega | \forall B \in \Gamma, v(B) = 1\} \neq \emptyset$, $A \in F(S)$, $S_A \cup S_\Gamma = \{q_1, q_2, \dots, q_k, \dots\}, \forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, 令 $N(\Gamma, A, k, i) = |\{v | \{q_1, q_2, \dots, q_k\} \mid v \in \Omega(\Gamma), v(A) = \frac{i}{n-1}\}|$, $N(\Gamma, A, k) = |\{v | \{q_1, q_2, \dots, q_k\} \mid v \in \Omega(\Gamma)\}|$.

定义

$$\tau_{n\Gamma}^k(A) = \frac{1}{N(\Gamma, A, k)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} N(\Gamma, A, k, i).$$

若 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma}^k(A)$ 存在, 则称 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma}^k(A)$ 为公式 A 相对于理论 Γ 的 Γ 真度.

注 7.1 当 Γ 为局部有限理论时, 可认为由 $S_A \cup S_\Gamma$ 中的原子公式构成的原子公式序列从某一项以后的各项均是同一原子公式, 根据定义 4.1 可知: $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma}^k(A)$ 存在, 且等于 $\tau_{n\Gamma}(A)$.

例 7.1 在Łukasiewicz 四值命题逻辑中, 设

$$A = p_1,$$

$$\Gamma_1 = \{p_1 \rightarrow p_2, p_1 \rightarrow p_3, \dots, p_1 \rightarrow p_k, \dots\},$$

$$\Gamma_2 = \{p_2 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_3, \dots, p_{2k} \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_{2k+1}, \dots\}.$$

请计算 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{4\Gamma_1}^k(A), \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{4\Gamma_2}^k(A)$.

解答 在Łukasiewicz 四值命题逻辑中, $L_4 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$. $\forall v \in \Omega$.

(1) $v \in \Omega(\Gamma_1)$ 当且仅当 $\forall k \in Z_+, v(p_1 \rightarrow p_k) = 1$, 当且仅当 $\forall k \in Z_+, v(p_1) \leq v(p_k)$.

(i) 如果 $v(p_1) = 0$, 则 $\forall k \in Z_+ - \{1\}, v(p_k) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, 因此

$$N(\Gamma_1, A, k, 0) = |\{v \mid_{\{p_1, \dots, p_k\}} \mid v \in \Omega(\Gamma_1), v(A) = 0\}| = 4^{k-1}.$$

(ii) 如果 $v(p_1) = \frac{1}{3}$, 则 $\forall k \in Z_+ - \{1\}, v(p_k) \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, 因此

$$N(\Gamma_1, A, k, 1) = \left| \left\{ v \mid_{\{p_1, \dots, p_k\}} \mid v \in \Omega(\Gamma_1), v(A) = \frac{1}{3} \right\} \right| = 3^{k-1}.$$

类似地, 可得

$$N(\Gamma_1, A, k, 2) = \left| \left\{ v \mid_{\{p_1, \dots, p_k\}} \mid v \in \Omega(\Gamma_1), v(A) = \frac{2}{3} \right\} \right| = 2^{k-1},$$

$$N(\Gamma_1, A, k, 3) = 1.$$

因此, 根据定义 7.1 得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{4\Gamma_1}^k(A) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N(\Gamma_1, A, k)} \sum_{i=0}^3 \frac{i}{3} N(\Gamma_1, A, k, i) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \cdot 3^{k-1} + \frac{2}{3} \cdot 2^{k-1} + 1}{4^{k-1} + 3^{k-1} + 2^{k-1} + 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2) $v \in \Omega(\Gamma_2)$, 当且仅当 $\forall m \in Z_+, v(p_{2m} \rightarrow p_1) = 1, v(p_1 \rightarrow p_{2m+1}) = 1$; 当且仅当 $\forall m \in Z_+, v(p_{2m}) \leq v(p_1), v(p_1) \leq v(p_{2m+1})$; 当且仅当下列四种情形之一成立:

1. 当 $v(p_1) = 0$ 时, $v(p_{2m}) = 0, v(p_{2m+1}) \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$;
2. 当 $v(p_1) = \frac{1}{3}$ 时, $v(p_{2m}) \in \left\{0, \frac{1}{3}\right\}, v(p_{2m+1}) \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$;
3. 当 $v(p_1) = \frac{2}{3}$ 时, $v(p_{2m}) \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}, v(p_{2m+1}) \in \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$;
4. 当 $v(p_1) = 1$ 时, $v(p_{2m}) \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}, v(p_{2m+1}) = 1$.

因此, $\forall m \in Z_+$,

(i) 如果 $k = 2m$,

$$\begin{aligned} N(\Gamma_2, A, k, 0) &= |\{v \mid \{p_1, \dots, p_{2m-1}, p_{2m}\} \mid v \in \Omega(\Gamma_2), v(A) = 0\}| = 4^{m-1}, \\ N(\Gamma_2, A, k, 1) &= |\{v \mid \{p_1, \dots, p_{2m-1}, p_{2m}\} \mid v \in \Omega(\Gamma_2), v(A) = 0\}| = 2^m \cdot 3^{m-1}, \\ N(\Gamma_2, A, k, 2) &= |\{v \mid \{p_1, \dots, p_{2m-1}, p_{2m}\} \mid v \in \Omega(\Gamma_2), v(A) = 0\}| = 3^m \cdot 2^{m-1}, \\ N(\Gamma_2, A, k, 3) &= |\{v \mid \{p_1, \dots, p_{2m-1}, p_{2m}\} \mid v \in \Omega(\Gamma_2), v(A) = 0\}| = 4^m. \end{aligned}$$

因此, 根据定义 7.1 得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{4\Gamma_2}^k(A) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N(\Gamma_2, A, k)} \sum_{i=0}^3 \frac{i}{3} N(\Gamma_2, A, k, i) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \cdot 2^m \cdot 3^{m-1} + \frac{2}{3} \cdot 3^m \cdot 2^{m-1} + 4^m}{4^{m-1} + 3^m \cdot 2^{m-1} + 3^{m-1} \cdot 2^m + 4^m} \\ &= \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

(ii) 如果 $k = 2m + 1$,

$$\begin{aligned} N(\Gamma_2, A, k, 0) &= |\{v \mid \{p_1, \dots, p_{2m}, p_{2m+1}\} \mid v \in \Omega(\Gamma_2), v(A) = 0\}| = 4^m, \\ N(\Gamma_2, A, k, 1) &= |\{v \mid \{p_1, \dots, p_{2m}, p_{2m+1}\} \mid v \in \Omega(\Gamma_2), v(A) = 0\}| = 2^m \cdot 3^m, \\ N(\Gamma_2, A, k, 2) &= |\{v \mid \{p_1, \dots, p_{2m}, p_{2m+1}\} \mid v \in \Omega(\Gamma_2), v(A) = 0\}| = 3^m \cdot 2^m, \\ N(\Gamma_2, A, k, 3) &= |\{v \mid \{p_1, \dots, p_{2m}, p_{2m+1}\} \mid v \in \Omega(\Gamma_2), v(A) = 0\}| = 4^m. \end{aligned}$$

因此, 根据定义 7.1 得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{4\Gamma_2}^k(A) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N(\Gamma_2, A, k)} \sum_{i=0}^3 \frac{i}{3} N(\Gamma_2, A, k, i) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \cdot 2^m \cdot 3^m + \frac{2}{3} \cdot 3^m \cdot 2^m + 4^m}{4^m + 2^m \cdot 3^m + 3^m \cdot 2^m + 4^m} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

根据上述 (i), (ii) 知: $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{4\Gamma_2}^k(A)$ 不存在.

注 7.2 例 7.1 说明在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 当 S_Γ 无限时, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma}^k(A)$ 未必存在. 因此, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 我们可以考虑取 $\tau_{n\Gamma}^k(A)$ 的上极限 (或下极限) 作为公式 A 的 Γ -真度, 但这样的定义是否能保持相对于局部有限理论 Γ 的 Γ -真度的良好性质是值得商榷的.

8 后记

本文在有限值Łukasiewicz 命题逻辑中通过真度的赋值形式提出了公式相对于给定的局部有限理论 Γ 的 Γ -真度理论, 证明了关于 Γ -真度理论的极限定理, 并利用极限定理在Łukasiewicz 连续值命题逻辑中合理地引入了公式相对于给定局部有限理论 Γ 的 Γ -真度理论, 从而使真度理论在Łukasiewicz

命题逻辑系统中得到了全面推广. 可以证明 Γ -真度具有许多良好的性质, 并利用 Γ -真度可以建立基于公式集 $F(S)$ 的 Γ -逻辑度量空间, 从而建立基于 Γ -真度的近似推理理论^[13,15].

致谢 作者对审稿人及编委提出的宝贵的修改建议表示衷心感谢!

参考文献

- 1 Pavelka J. On fuzzy logic I: Many-valued rules of inference; II: Enriched residuated lattice and semantics of propositional calculi; III: Semantical completeness of some many-valued propositional calculi. *Zeitschr Math Logik und Grundlagen der Math*, 1979, 25: 45–52; 119–134; 447–464
- 2 Adams E W. *A Primer of Probability Logic*. Stanford: CSLI Publication, 1998
- 3 Li H X. To see the success of fuzzy logic from mathematical essence of fuzzy control. *Fuzzy Syst Math*, 1995, 9: 1–14 [李洪兴. 从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功. *模糊系统与数学*, 1995, 9: 1–14]
- 4 Dubois D, Prade H. Possibility theory and multiple-valued logics. *Ann Math Artif Intell*, 2001, 32: 35–66
- 5 Esteva F, Garcir C P, Godo L. Enriched interval bilattices and partial many valued logics: An approach to deal with graded truth and imprecision. *Int J Uncertain Fuzz*, 1994, 2: 37–64
- 6 Gerla G. Inference in probability logic. *Atifi Intell*, 1994, 70: 33–52
- 7 Kakas A G, Sadri F E. *Computational Logic: Logic for Programming and Beyond*. New York: Springer-Verlag, 2002
- 8 Mundici D. Averaging the truth-value in Lukasiewicz logic. *Studia Logica*, 1995, 55: 113–127
- 9 Hájek P. *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Dordrecht: Kluwer Academics Publisher, 1998
- 10 Zhang W X, Liang Y. *The Uncertainty Reasoning Principles*. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1996 [张文修, 梁怡. 不确定性推理原理. 西安: 西安交通大学出版社, 1996]
- 11 Xu Y, Ruan D, Qin K Y, et al. *Lattice-valued Logic*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2003
- 12 Wang G J. Total triple I algorithm of fuzzy reasoning. *Sci China Ser E*, 1999, 29: 43–53 [王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法. *中国科学: E 辑*, 1999, 29: 43–53]
- 13 Wang G J, Zhou H J. Quantitative logic. *Inf Sci*, 2009, 179: 226–247
- 14 Wang G J, Zhou H J. *Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle*. Beijing: Science Press, 2009
- 15 Wang G J. *Nonclassical Mathematical Logic and Approximate Reasoning*, 2nd Editon. Beijing: Science Press, 2008 [王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理, 第二版. 北京: 科学出版社, 2008]
- 16 Wang G J, Leung Y. Integrated semantics and logic metric spaces. *Fuzzy Set Syst*, 2003, 136: 71–91
- 17 Liu H W, Wang G J. Triple I method based on point-wise sustaining degrees. *Comput Math Appl*, 2008, 55: 2680–2688
- 18 Liu H W, Wang G J. Unified forms of fully implication restriction methods for fuzzy reasoning. *Inf Sci*, 2007, 177: 956–966
- 19 Wu H B. The theory of generalized tautologies in the revised Kleene system. *Sci China Series E-Tech Sci*, 2001, 44: 233–238
- 20 Wang G J. Axiomatic theory of truth degree for a class of first-order formulas and its application. *Sci Sin Inf*, 2012, 42: 648–662 [王国俊. 一类一阶逻辑公式中的公理化真度理论及其应用. *中国科学: 信息科学*, 2012, 42: 648–662]
- 21 Wu H B. The generalized truth degrees of quantitative logic in the logic system $\mathcal{L}_n^*$. *Comput Math Appl*, 2010, 59: 2587–2596
- 22 Wang D G, Gu Y D, Li H X. Generalized tautology in fuzzy modal propositional logic. *Acta Electron Sin*, 2007, 35: 261–264 [汪德刚, 谷云东, 李洪兴. 模糊模态命题逻辑及其广义重言式. *电子学报*, 2007, 35: 261–264]
- 23 Yang X B, Zhang W X. Theory of generalized tautology on Lukasiewicz many-valued logic system. *Fuzzy Sys Math*, 2000, 14: 8–12 [杨晓斌, 张文修. Lukasiewicz 多值逻辑系统中的广义重言式理论. *模糊系统与数学*, 2000, 14(1): 8–12]
- 24 Song S J, Feng C B, Lee E S. Triple I method of fuzzy reasoning. *Comput Math Appl*, 2002, 44: 1567–1579
- 25 Song S J, Wu C. Reverse triple I method of fuzzy reasoning. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2002, 45: 344–364 [宋士吉, 吴澄. 模糊推理的反向三 I 算法. *中国科学: E 辑*, 2002, 32: 230–246]
- 26 Song S J, Feng C B, Wu C X. Theory of restriction degree of triple I method with total inferences of fuzzy reasoning. *Prog Nat Sci*, 2001, 11: 58–66

- 27 Han B H, Li Y M. Approximate reasoning in quantitative logic. *Fuzzy Sys Math*, 2010, 24: 1–7[韩邦合, 李永明. 计量逻辑学中的近似推理. *模糊系统与数学*, 2010, 24: 1–7]
- 28 Li J, Wang G J. The theory of truth degrees of propositions in L_n^* logic system. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2006, 49: 471–483 [李骏, 王国俊. 逻辑系统 L_n^* 中的命题真度理论. *中国科学: E 辑*, 2006, 36: 631–643]
- 29 Zhang D X, Li L F. Syntactic graded method of two-valued propositional logic formulas. *Acta Electron Sin*, 2008, 36: 325–320[张东晓, 李立峰. 二值命题逻辑公式的语构程度化方法. *电子学报*, 2008, 36: 325–320]
- 30 Li J, Li S P, Xia Y F. Theory of truth degrees in Lukasiewicz n -valued propositional logic. *Acta Math Sin*, 2004, 47: 769–780[李骏, 黎所平, 夏亚锋. Lukasiewicz n 值命题逻辑中命题的真度理论. *数学学报*, 2004, 47: 769–780]
- 31 Wang G J, Fu L, Song J S. The truth degree theory in two-valued propositional logic. *Sci China Ser A-Math*, 2001, 31: 998–1008[王国俊, 傅丽, 宋建社. 二值命题逻辑中命题的真度理论. *中国科学: A 辑*, 2001, 31: 998–1008]
- 32 Wang G J, Liu B C. The theory of relative Γ -tautology degree of formulas in four propositional logics. *Chin J Eng Math*, 2007, 24: 598–610[王国俊, 刘保翠. 四种命题逻辑中公式的相对 Γ -重言度理论. *工程数学学报*, 2007, 24: 598–610]
- 33 Wang G J, Duan Q L. Theory of (n) truth degrees of formulas in modal logic and a consistency theorem. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2009, 52: 70–83 [王国俊, 段巧林. 模态逻辑中的 (n) 真度理论与和谐定理. *中国科学: F 辑*, 2009, 39: 234–245]
- 34 Shi H X, Wang G J. Quantitative method for multi-value modal logics. *J Soft*, 2012, 23: 3074–3087[时慧娴, 王国俊. 多值模态逻辑的计量化方法. *软件学报*, 2012, 23: 3074–3087]
- 35 Shi H X, Wang G J. A quantitative approach for linear temporal logic based on finite transition systems. *Fuzzy Sys Math*, 2012, 26: 30–35[时慧娴, 王国俊. 基于有限迁移系统的线性时态逻辑的计量化方法. *模糊系统与数学*, 2012, 26: 30–35]
- 36 Zhou J R, Wu H B. The form of mean representation of truth degree with applications in quantitative logic. *Acta Electron Sin*, 2012, 40: 1822–1828[吴洪博, 周建仁. 计量逻辑中真度的均值表示及其应用. *电子学报*, 2012, 40: 1822–1828]
- 37 Wang G J, Leung Y. Integrated semantics and logic metric spaces. *Fuzzy Sets Syst*, 2003, 136: 71–91
- 38 Wang G J, Li B J. The truth degree theory in n -valued Lukasiewicz propositional logic and the limit theory. *Sci China Ser E-Tech Sci*, 2005, 48: 727–736 [王国俊, 李壁镜. Lukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理. *中国科学: E 辑*, 2005, 35: 561–569]
- 39 McNaughton R. A theorem about infinite-valued sentential calculus. *J Sym Log*, 1951, 16: 1–13
- 40 Mundici D. A constructive proof of McNaughton's theorem in infinite-valued logic. *J Sym Log*, 1994, 59: 596–602
- 41 Department of Mathematics of Huadong Normal University. *Mathematical Analysis-3th Edition*. Beijing: Higher Education Press, 2001[华东师范大学数学系编. *数学分析 - 第三版*. 北京: 高等教育出版社, 2001]

The theory of Γ -truth degrees of formulas and limit theorem in Lukasiewicz propositional logic

WU HongBo

College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China
E-mail: wuhb@snnu.edu.cn

Abstract The theory of truth degrees of formulas and limit theorem in Lukasiewicz n -valued propositional logic has been investigated again. (1) In Lukasiewicz n -valued propositional logic, a form of truth degree's definition described by valuations is given which indicates directly from the aspects of valuations that the truth degree of a formula is membership degree for the formula belonging to tautologies; (2) In Lukasiewicz n -valued propositional logic, a concept of Γ -truth degree of a formula relative to locally finite theory Γ is proposed through the valuation's form of truth degree, some equivalent forms with properties of Γ -truth degrees are given; (3) The limit theorem about Γ -truth degree in Lukasiewicz n -valued propositional logic is proved; (4) A reasonable form of Γ -truth degree in Lukasiewicz continuity-valued propositional logic and a symmetrical theorem of truth degree in Lukasiewicz propositional logic are given; (5) In Lukasiewicz n -valued propositional logic, the problem of Γ -truth degrees of formulas relative to infinite theory is discussed by limit method and the valuation's form of Γ -truth degrees.

Keywords Lukasiewicz propositional logic, truth degree, valuation, locally finite theory, Γ -truth degree, limit theorem, infinite theory

附录 A 定理 3.1 的证明.

仅需证明 $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $|\overline{A}^{-1}(\frac{i}{n-1})| = N(A, i)$, 因此仅需证明 $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, 在两个集合 $\overline{A}^{-1}(\frac{i}{n-1})$ 和 $\{v|_{\{p_1, \dots, p_m\}} | v \in \Omega, v(A) = \frac{i}{n-1}\}$ 之间存在一一映射.

$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, 映射 $h_i : \overline{A}^{-1}(\frac{i}{n-1}) \rightarrow \{v|_{\{p_1, \dots, p_m\}} | v \in \Omega, v(A) = \frac{i}{n-1}\}$ 定义如下:

$$\forall (x_1, \dots, x_m) \in \overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right),$$

首先, 定义映射 $v^* : S \rightarrow L_n$: $v^*(p_k) = \begin{cases} x_k, & k \in \{1, \dots, m\}, \\ 1, & k \in \{m+1, \dots, n\}. \end{cases}$

由于 $F(S)$ 是由 S 生成的 $\neg, \vee, \rightarrow$ 型自由代数, 因此通过 $v^* : S \rightarrow L_n$ 可以生成唯一的 $\neg, \vee, \rightarrow$ 型同态 $v : F(S) \rightarrow L_n$ 使得 $v \circ \sigma = v^*$, 其中 $\sigma : S \rightarrow F(S)$ 为嵌入映射^[15]. 令 $h_i((x_1, \dots, x_m)) = v|_{\{p_1, \dots, p_m\}}$. 而且,

$$\begin{aligned} v(A) &= v(A(p_1, \dots, p_m)) = \overline{A}(v(p_1), \dots, v(p_m)) \\ &= \overline{A}(v^*(p_1), \dots, v^*(p_m)) = \overline{A}(x_1, \dots, x_m) = \frac{i}{n-1}. \end{aligned}$$

因此, $h_i : \overline{A}^{-1}(\frac{i}{n-1}) \rightarrow \{v|_{\{p_1, \dots, p_m\}} | v \in \Omega, v(A) = \frac{i}{n-1}\}$ 的定义是合理的.

(1) 设 $(x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m) \in \overline{A}^{-1}(\frac{i}{n-1})$, 并且 $(x_1, \dots, x_m) \neq (y_1, \dots, y_m)$. 再设

$$h_i((x_1, \dots, x_m)) = v|_{\{p_1, \dots, p_m\}}, h_i((y_1, \dots, y_m)) = u|_{\{p_1, \dots, p_m\}}.$$

因为 $(x_1, \dots, x_m) \neq (y_1, \dots, y_m)$, 则 $\exists k \in \{1, \dots, m\}$ 使得 $x_k \neq y_k$, 从而 $v^*(p_k) \neq u^*(p_k)$, 从而 $v|_{\{p_1, \dots, p_m\}}(p_k) \neq u|_{\{p_1, \dots, p_m\}}(p_k)$, 因此 $v|_{\{p_1, \dots, p_m\}} \neq u|_{\{p_1, \dots, p_m\}}$. 即, $h_i(x_1, \dots, x_m) \neq h_i(y_1, \dots, y_m)$. 因此, $h_i : \overline{A}^{-1}(\frac{i}{n-1}) \rightarrow \{v|_{\{p_1, \dots, p_m\}} | v \in \Omega, v(A) = \frac{i}{n-1}\}$ 是单射.

(2) $\forall u|_{\{p_1, \dots, p_m\}} \in \{v|_{\{p_1, \dots, p_m\}} | v \in \Omega, v(A) = \frac{i}{n-1}\}$, 则 $u \in \Omega$, 且 $u(A) = \frac{i}{n-1}$. 令

$$(x_1, \dots, x_m) = (u(p_1), \dots, u(p_m)).$$

因此, $\overline{A}(x_1, \dots, x_m) = \overline{A}(u(p_1), \dots, u(p_m)) = u(A(p_1, \dots, p_m)) = u(A) = \frac{i}{n-1}$. 因此, $(x_1, \dots, x_m) \in \overline{A}^{-1}(\frac{i}{n-1})$.

设 $h_i((x_1, \dots, x_m)) = v|_{\{p_1, \dots, p_m\}}$, 则 $\forall k \in \{1, \dots, m\}$, 由 h_i 的定义知

$$h_i((x_1, \dots, x_m))(p_k) = v|_{\{p_1, \dots, p_m\}}(p_k) = v(p_k) = v^*(p_k) = x_k = u(p_k) = u|_{\{p_1, \dots, p_m\}}(p_k).$$

因此, $h_i((x_1, \dots, x_m)) = u|_{\{p_1, \dots, p_m\}}$. $h_i : \overline{A}^{-1}(\frac{i}{n-1}) \rightarrow \{v|_{\{p_1, \dots, p_m\}} | v \in \Omega, v(A) = \frac{i}{n-1}\}$ 是满射.

综上知, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $h_i : \overline{A}^{-1}(\frac{i}{n-1}) \rightarrow \{v|_{\{p_1, \dots, p_m\}} | v \in \Omega, v(A) = \frac{i}{n-1}\}$ 是双射. 因此, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $|\overline{A}^{-1}(\frac{i}{n-1})| = N(A, i)$. 结合引理 2.1 知

$$\tau_n(A) = \frac{1}{n^m} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-1} N(A, i).$$

附录 B 定理 4.2 的证明.

$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, 设 $E_i = \{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A) \mid \overline{A}(x_1, \dots, x_m) = \frac{i}{n-1}\}$. 那么 当 $i \neq j$ 时,

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \text{ 且 } \bigcup_{i=0}^{n-1} E_i = \Delta_n(\Gamma, A).$$

由 E_i 的定义知: $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $E_i = (\overline{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1}(\frac{i}{n-1})$. 所以

$$\sum_{(x_1, \dots, x_m) \in E_i} \overline{A}(x_1, \dots, x_m) = \frac{i}{n-1} \left| (\overline{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \right|,$$

从而

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in E_i} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| (\bar{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1} \left(\frac{i}{n-1} \right) \right|,$$

即

$$\sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \bigcup_{i=0}^{n-1} E_i} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| (\bar{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1} \left(\frac{i}{n-1} \right) \right|,$$

所以

$$\sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A)} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| (\bar{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1} \left(\frac{i}{n-1} \right) \right|.$$

结合引理 4.1 得

$$\tau_n \Gamma(A) = \frac{1}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A)} \bar{A}(x_1, \dots, x_m).$$

附录 C 定理 4.3 的证明.

设 $S_\Gamma \cup S_A = \{p_1, \dots, p_k\}$.

(1) 当 $p_j \notin (S_\Gamma \cup S_A)$ 时, 不妨设 $p_j = p_{k+1}$. 由于 $D = A \wedge (p_{k+1} \rightarrow p_{k+1})$, 因此 $\bar{D}: L_n^{k+1} \rightarrow L_n$ 满足 $\forall (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \in L_n^{k+1}, \bar{D}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = \bar{A}(x_1, \dots, x_k)$.

$\forall B \in \Gamma$, 定义 $\bar{B}^*: L_n^{k+1} \rightarrow L_n, \forall (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \in L_n^{k+1}, \bar{B}^*(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = \bar{B}(x_1, \dots, x_k)$.

由于 $S_\Gamma \cup S_D = \{p_1, \dots, p_k\} \cup \{p_{k+1}\} = S_\Gamma \cup S_A \cup \{p_{k+1}\}$, 因此,

$$\begin{aligned} \Delta_n(\Gamma, D) &= \{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \in L_n^{k+1} | \forall B \in \Gamma, \bar{B}^*(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = 1\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \in L_n^k \times L_n | \forall B \in \Gamma, \bar{B}(x_1, \dots, x_k) = 1\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_k) \in L_n^k | \forall B \in \Gamma, \bar{B}(x_1, \dots, x_k) = 1\} \times L_n \\ &= \Delta_n(\Gamma, A) \times L_n. \end{aligned}$$

因此, 根据定理 4.2 得

$$\begin{aligned} \tau_n \Gamma(D) &= \frac{1}{|\Delta_n(\Gamma, D)|} \sum_{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \in \Delta_n(\Gamma, D)} \bar{D}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \\ &= \frac{1}{|\Delta_n(\Gamma, A)| \times n} \sum_{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \in \Delta_n(\Gamma, A) \times L_n} \bar{A}(x_1, \dots, x_k) \\ &= \frac{1}{|\Delta_n(\Gamma, A)| \times n} \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in \Delta_n(\Gamma, A)} n \times \bar{A}(x_1, \dots, x_k) \\ &= \frac{1}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in \Delta_n(\Gamma, A)} \bar{A}(x_1, \dots, x_k) \\ &= \tau_n \Gamma(A). \end{aligned}$$

(2) 当 $p_j \in (S_\Gamma \cup S_A)$ 时, 则 $S_\Gamma \cup S_D = S_\Gamma \cup S_A = \{p_1, \dots, p_k\}$. 此时 $\Delta_n(\Gamma, D) = \Delta_n(\Gamma, A)$, $\bar{D}$ 仍含有 k 个变元 $x_1, \dots, x_k$, 并且 $\bar{D}: L_n^k \rightarrow L_n$ 满足:

$$\forall (x_1, \dots, x_k) \in L_n^k, \bar{D}(x_1, \dots, x_k) = \bar{A}(x_1, \dots, x_k).$$

根据定理 4.2 得: $\tau_n \Gamma(A) = \tau_n \Gamma(D)$.

附录 D 定理 5.1 的证明.

$\forall n \in Z_+ - \{1\}$, 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 令

$$\Delta_n(\Gamma, A) = \{(x_1, \dots, x_m) \in L_n^m | \forall B \in \Gamma, \bar{B}(x_1, \dots, x_m) = 1\}.$$

(1) 当 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A) = \emptyset$ 时, 则 $\forall n \in Z_+ - \{1\}, \Omega(\Gamma) = \emptyset$. 根据定义 4.1 知: $\forall n \in Z_+ - \{1\}, \tau_n \Gamma(A) = 1$, 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \Gamma(A) = 1$.

(2) 当 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A) \neq \emptyset$ 时, 则 $\forall n \in Z_+ - \{1\}, \Omega(\Gamma) \neq \emptyset$. 从而 $\forall n \in Z_+ - \{1\}, \Delta_n(\Gamma, A) \neq \emptyset$. 根据定理 4.1 知: $\forall n \in Z_+ - \{1\}$,

$$\begin{aligned} \tau_n \Gamma(A) &= \frac{1}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| (\bar{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1} \left(\frac{i}{n-1} \right) \right| \\ &= \frac{1}{|\Delta_n(\Gamma, A)| \times (n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} \left(i \times \left| (\bar{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1} \left(\frac{i}{n-1} \right) \right| \right). \end{aligned}$$

一方面, 由于 $\Delta_n(\Gamma, A) = \{(x_1, \dots, x_m) \in L_n^m | \forall B \in \Gamma, \bar{B}(x_1, \dots, x_m) = 1\}$, 因此, 根据文献 [39,40] 知: $|\Delta_n(\Gamma, A)|$ 是以 n 为变元, 次数不超过 m 的多项式.

另一方面, 由于

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \left(i \times \left| (\bar{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1} \left(\frac{i}{n-1} \right) \right| \right) &= (n-1) \times \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| (\bar{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1} \left(\frac{i}{n-1} \right) \right| \\ &\leq (n-1) \times \sum_{i=0}^{n-1} \left| (\bar{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1} \left(\frac{i}{n-1} \right) \right| \\ &= (n-1) \times |\Delta_n(\Gamma, A)|. \end{aligned}$$

因此, 以 n 为变元的多项式 $\sum_{i=0}^{n-1} (i \times |(\bar{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1}(\frac{i}{n-1})|)$ 的次数不超过 $|\Delta_n(\Gamma, A)|$ 的次数与 $n-1$ 的次数之和.

综合以上两方面知当 $n \rightarrow \infty$ 时, 分式 $\frac{1}{|\Delta_n(\Gamma, A)| \times (n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} (i \times |(\bar{A}|_{\Delta_n(\Gamma, A)})^{-1}(\frac{i}{n-1})|)$ 的极限存在. 从而当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\tau_n \Gamma(A)$ 的极限存在.

当 $\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} dx_1 \cdots dx_m \neq 0$ 时, 由于 Łukasiewicz 连续值命题逻辑中公式 A 诱导的函数 $\bar{A}: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ 是一次函数 [39,40], $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A) \subseteq [0, 1]^m$, 因此 $\bar{A}: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ 在 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 上是黎曼可积的. 下面, 应用定积分的定义计算 $\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m$.

第一步, 分割积分域 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$.

先分割 $[0, 1]^m$.

n 等分区间 $[0, 1]$ 得到 n 个小区间: $[0, \frac{1}{n}), [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \dots, [\frac{n-1}{n}, 1]$, 则立方体 $[0, 1]^m$ 被分成 n^m 个体积为 $\frac{1}{n^m}$ 的小立方体. 这种分割具有性质:

$$\text{当 } i = 0, \dots, n-2 \text{ 时, } \frac{i}{n-1} \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right), \text{ 当 } i = n-1 \text{ 时, } \frac{i}{n-1} \in \left[\frac{n-1}{n}, 1 \right].$$

由于 $L_n = \{\frac{i}{n-1} | i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$, 所以每个点 $(x_1, \dots, x_m) \in L_n^m$ 属于且仅属于一个小方体, 并将相应的方体记作 $\delta(x_1, \dots, x_m)$, 将方体 $\delta(x_1, \dots, x_m)$ 的测度记作 $m(\delta(x_1, \dots, x_m))$.

$[0, 1]^m$ 的上述分割中的小方体分为三类:

第一类, $\delta(x_1, \dots, x_m)$ 中的点皆是 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 的内点. 令

$$\Delta_n^1(\Gamma, A) = \{(x_1, \dots, x_m) \in L_n^m | \delta(x_1, \dots, x_m) \text{ 中的点皆是 } \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A) \text{ 的内点}\}.$$

第二类, $\delta(x_1, \dots, x_m)$ 中的点含有 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 的边界点. 令

$$\Delta_n^2(\Gamma, A) = \{(x_1, \dots, x_m) \in L_n^m | \delta(x_1, \dots, x_m) \text{ 中的点含有 } \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A) \text{ 的边界点}\}.$$

第二类小方体的全体覆盖了 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 的边界.

第三类, $\delta(x_1, \dots, x_m)$ 中的点不含 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 中的任何点, 即,

$$\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A) \cap \delta(x_1, \dots, x_m) = \emptyset.$$

再分割 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$.

$\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 的分割是

$$\{\delta(x_1, \dots, x_m) \cap \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A) | (x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A)\}.$$

即, 取 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 的分割是 $[0, 1]^m$ 的分割中的每个小方体与 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 的交集构成的集族. 同时以 $m(\delta(x_1, \dots, x_m) \cap \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A))$ 记分块 $\delta(x_1, \dots, x_m) \cap \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 的测度. 令 $S = \int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} dx_1 \cdots dx_m$. 在 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 的分割中, 分块具有以下性质:

(i) 当 $(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^1(\Gamma, A)$ 时,

$$\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A) \cap \delta(x_1, \dots, x_m) = \delta(x_1, \dots, x_m), \quad m(\delta(x_1, \dots, x_m)) - \frac{S}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \geq 0.$$

(ii) 当 $(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^2(\Gamma, A)$ 时,

$$|m(\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A) \cap \delta(x_1, \dots, x_m)) - \frac{S}{|\Delta_n(\Gamma, A)|}| \leq m(\delta(x_1, \dots, x_m)).$$

由文献 [41] 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^1(\Gamma, A) \cup \Delta_n^2(\Gamma, A)} m(\delta(x_1, \dots, x_m)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^1(\Gamma, A)} m(\delta(x_1, \dots, x_m)) = S.$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^2(\Gamma, A)} m(\delta(x_1, \dots, x_m)) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta_n^2(\Gamma, A)|}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} = 0.$$

因此, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使得当 $n \geq N$ 时,

$$\left| \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^1(\Gamma, A)} m(\delta(x_1, \dots, x_m)) - S \right| < \frac{\epsilon}{3},$$

$$\left| \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^2(\Gamma, A)} m(\delta(x_1, \dots, x_m)) \right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \frac{|\Delta_n^2(\Gamma, A)|}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} < \frac{\epsilon}{3S}.$$

因此, 结合 (i), (ii) 及 $0 \leq \bar{A}(x_1, \dots, x_m) \leq 1$, 得

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A)} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) \times m(\delta(x_1, \dots, x_m) \cap \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A)} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) \times \frac{S}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \right| \\ &= \left| \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A)} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) \times \left(m(\delta(x_1, \dots, x_m) \cap \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)) - \frac{S}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^2(\Gamma, A)} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) \times \left(m(\delta(x_1, \dots, x_m) \cap \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)) - \frac{S}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^1(\Gamma, A)} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) \times \left(m(\delta(x_1, \dots, x_m) \cap \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)) - \frac{S}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \right) \right| \\ &\leq \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^2(\Gamma, A)} \left| \left(m(\delta(x_1, \dots, x_m) \cap \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)) - \frac{S}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \right) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^1(\Gamma, A)} \left(m(\delta(x_1, \dots, x_m)) - \frac{S}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left| \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^2(\Gamma, A)} m(\delta(x_1, \dots, x_m)) \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^1(\Gamma, A)} \left(\left(m(\delta(x_1, \dots, x_m)) - \frac{S}{|\Delta_n^1(\Gamma, A)|} \right) + \left(\frac{S}{|\Delta_n^1(\Gamma, A)|} - \frac{S}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \right) \right) \right| \\
 &\leq \frac{\epsilon}{3} + \left| \left(\sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^1(\Gamma, A)} m(\delta(x_1, \dots, x_m)) - S \right) + \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^1(\Gamma, A)} \left(\frac{|\Delta_n^2(\Gamma, A)| S}{|\Delta_n^1(\Gamma, A)| \times |\Delta_n(\Gamma, A)|} \right) \right| \\
 &\leq \frac{\epsilon}{3} + \left| \left(\sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n^1(\Gamma, A)} m(\delta(x_1, \dots, x_m)) - S \right) \right| + \frac{|\Delta_n^2(\Gamma, A)|}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} S \\
 &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A)} \overline{A}(x_1, \dots, x_m) \times m(\delta(x_1, \dots, x_m) \cap \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A)} \overline{A}(x_1, \dots, x_m) \times \frac{\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} dx_1 \cdots dx_m}{|\Delta_n(\Gamma, A)|}
 \end{aligned}$$

第二步, 选点.

在 $\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 的分割的每个小方体 $\delta(x_1, \dots, x_m) \cap \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)$ 中选点 $(x_1, \dots, x_m)$, 则这些点构成的集合是 $\Delta_n(\Gamma, A)$.

第三步, 求和, 取极限.

结合定理 4.2 得:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} \overline{A}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A)} \overline{A}(x_1, \dots, x_m) \times m(\delta(x_1, \dots, x_m) \cap \Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A)} \overline{A}(x_1, \dots, x_m) \times \frac{\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} dx_1 \cdots dx_m}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \\
 &= \int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} dx_1 \cdots dx_m \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Delta_n(\Gamma, A)|} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_n(\Gamma, A)} \overline{A}(x_1, \dots, x_m) \\
 &= \int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} dx_1 \cdots dx_m \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma}(A).
 \end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{n\Gamma}(A) = \frac{1}{\int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} dx_1 \cdots dx_m} \int_{\Delta_{[0,1]}(\Gamma, A)} \overline{A}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m.$$

附录 E 定理 6.2 的证明.

设 $A = A(p_1, \dots, p_m) \in F(S)$ 是含有 m 个原子公式 $p_1, \dots, p_m$ 的命题公式.

设 $i \in \{1, \dots, m\}$, 将 A 中的原子公式 p_i 换成 $\neg p_i$ 后公式 A 变成公式 B , 即,

$$B(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_m) = A(p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i, p_{i+1}, \dots, p_m).$$

首先, 在Łukasiewicz n 值命题逻辑中, 则 $\forall (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \in L_n^m$,

$$\overline{B}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) = \overline{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_m).$$

定义映射 $\phi: L_n^m \rightarrow L_n^m, \forall (x_1, \dots, x_m) \in L_n^m$,

$$\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_m).$$

由于 L_n 中的元素关于 $\frac{1}{2}$ 对称, 因此 $\phi: L_n^m \rightarrow L_n^m$ 为一一映射. 所以

$$\begin{aligned} & \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in L_n^m} \overline{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in L_n^m} \overline{A}(\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in L_n^m} \overline{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in L_n^m} \overline{B}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m). \end{aligned}$$

两边乘以 $\frac{1}{n^m}$, 结合推论 4.1 得: $\tau_n(A) = \tau_n(B)$.

进一步应用数学归纳法可得: 在Lukasiewicz n 值命题逻辑中, 若将公式 A 中的部分原子公式分别换成它们的否定所得公式为 B , 则 $\tau_n(A) = \tau_n(B)$.

其次, 在Lukasiewicz 连续值命题逻辑中, 对等式 $\tau_n(A) = \tau_n(B)$ 两端当 $n \rightarrow \infty$ 时取极限, 并利用推论 5.1 知: $\tau_\infty(A) = \tau_\infty(B)$.

综合以上两方面知: 在Lukasiewicz 命题逻辑中, 把命题公式中的部分原子公式换成它的否定, 公式的真度不变.

WU HongBo was born in 1959. He received the Ph.D. degree in Mathematics from Sichuan University in Chendu city. Currently, he is a professor of Shaanxi Normal University and the senior member of China Computer Federation. His dominating research interests include non-classical mathematical logics and topology on lattice.