计算机科学与探索
Journal of Frontiers of Computer Science and Technology

1673-9418/2022/16(12)-2870-09
doi: 10.3778/j.issn.1673-9418.2103028

代数商空间粒度转换计算研究

魏宗萱[+],王加阳
中南大学 计算机学院,长沙 410083
+ 通信作者 E-mail: 2414011485@qq.com

摘 要: 粒度计算是一种基于多层次结构的问题处理范式,近年来受到国内外学者的广泛关注。粒度转换技术与问题求解是进行多粒度计算的关键,然而代数商空间却缺乏对这两个重要问题的讨论。为此,针对代数商空间模型,首先,根据商空间的构造方法定义三种完备的代数商空间簇,以论证代数粒度转换的封闭性。在上述工作基础上,针对不同的粒化准则与粒化方式,从多角度给出完整的代数粒度转换方法,并详细讨论了不同转换方法的异同以及粒度转换结果之间的关系。其次,为描述代数问题在粗细粒度转换中的求解结果,基于粒度转换方法与代数求解规则,提出求解一致性原理。通过理论分析证明了粒度转换方法与一致性原理的可靠性,以实例验证了所提方法的有效性,且实例结果与理论分析结论相符合,佐证了一致性原理的正确性;解决了使用代数商空间模型进行粒度计算的核心问题,为使用代数粒度计算求解大规模复杂问题提供了理论依据。

关键词: 粒度计算;代数商空间;多粒度;粒度转换;一致性
文献标志码: A **中图分类号:** TP18

Research on Granular Conversion Computing in Algebraic Quotient Space

WEI Zongxuan[+], WANG Jiayang
School of Computer Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China

Abstract: Granular computing is a problem processing paradigm based on multi-level structure, which has attracted extensive attention of domestic and foreign scholars in recent years. Granular transformation and problem solving are key issues of multi-granular computing. However, the algebraic quotient space model lacks discussion of these issues. In light of above problems, for the algebraic quotient space model, three complete clusters of algebraic quotient space are defined according to the algebraic quotient space construction methods, so as to analyze and demonstrate the closeness of granular conversion. Furthermore, for different granularity principles and modes, the complete algebraic granularity conversion methods are given from multiple angles. Next, the similarities and differences between different conversion methods and the relationship between granularity conversion results of the algebraic are discussed. In addition, in order to describe the solution results of algebraic problems after coarse grain and fine grain transformations, the consistency principle of solution results is proposed based on the granularity transformation method and algebraic solution rules. The reliability of the granularity conversion methods and the consistency principle is proven by theoretical analysis, and the effectiveness of the proposed methods is verified by an example. The example results are consistent with the theoretical analysis conclusions, which proves the correctness of the consistency principle. It solves the core problem of granular computing using algebraic quotient

基金项目: 国家自然科学基金(61772031);湖南省自然科学基金(2020JJ4753)。
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (61772031), and the Natural Science Foundation of Hunan Province (2020JJ4753).

收稿日期: 2021-03-08 **修回日期:** 2021-10-28

space model, and provides a theoretical basis for solving large-scale complex problems using algebraic granular computing.

Key words: granular computing; algebraic quotient space; multi-granularity; granularity conversion; consistency

粒度计算(granular computing)一般认为是求解复杂问题的一切理论、方法、技术和工具的总称[1],是模拟人类思考和解决大规模复杂问题的结构化求解模式[2],现已成为人工智能领域的研究热点[3]。商空间理论是粒度计算的主流计算模型之一,该理论以三元组 (X,f,T) 的形式描述问题的论域、属性和结构。由于引入元素之间的相互关系即"结构"的概念,商空间理论具有更强的表达与求解能力[4],被广泛应用于路径规划[5]、图像处理[6-8]、数据分析[9-12]、神经网络[13]、故障诊断[14]等领域,具有重要的理论意义与应用价值。近年来,利用粒度计算分析代数系统受到计算机科学领域的广泛关注[15]。文献[16]将商空间理论推广到代数系统,建立了基于代数结构的商空间模型(简称代数商空间模型)并取得了一系列成果[17-21]。研究上述文献发现,代数商空间模型具有较好的应用前景,但目前鲜有人对代数粒度计算的粒度转换技术与问题求解做深入研究,为代数商空间模型的应用和发展带来一定限制。

针对上述问题,在介绍代数商空间模型的基本理论后,首先,以取商空间、商代数、合成商空间三种方式构造代数商空间簇,并利用基本定理论证其粒度与结构的完备性,进而分析代数粒度转换的封闭性;然后,综合考虑粒化准则的同余性,对代数商空间的粒度分解与合成方法进行讨论;最后,通过分析代数商空间的同态法则得出保真与保假原理在代数商空间模型中仍成立,结合代数粒度转换方法与问题求解规则,提出代数商空间模型的问题求解一致性原理。

1 研究基础

本章将对代数商空间模型的粒化准则和论域结构进行介绍。代数商空间模型一般由 $(X,f,\circ)$ 构成,其中 X 为论域,f 为论域上的属性函数,$\circ$ 为元素之间的二元运算。由于属性函数常与论域结构和领域知识紧密相连,本文只讨论其论域和结构,三元组简记为 $(X,\circ)$。

1.1 同余关系及其性质

代数商空间以代数运算作为论域结构,而等价关系仅能进行论域划分,因此代数商空间模型以特殊的等价关系——同余关系作为粒化准则。

定义1(同余关系)[16] 设有代数系统 $(X,\circ)$,R 为论域 X 上的等价关系。若对 $\forall x,y,u,v\in X$,且 $(x,y)\in R$,$(u,v)\in R$,有 $(x\circ u, y\circ v)\in R$,则称等价关系 R 为同余关系(congruence relation),称 R 的等价类为同余类。

定义1表明,不同的同余类在运算后仍满足同余关系,即同余关系在运算$\circ$下仍能保持,称这种性质为同余关系 R 在运算$\circ$下具有可置换性。下面对一般等价关系 R 定义同余闭包与同余内核。

定义2(同余闭包)[16] 设有代数系统 $(X,\circ)$,$\{C\}$ 为 $(X,\circ)$ 上的全体同余关系,R 为论域 X 上的非空等价关系。若存在同余关系 $c(R)\in\{C\}$ 满足 $R\subseteq c(R)$,且对 $\forall R'\in\{C\}, R\subseteq R'$ 都有 $c(R)\subseteq R'$,则称 $c(R)$ 为 R 的同余闭包。

定义3(同余内核)[20] 设有代数系统 $(X,\circ)$,$\{C\}$ 为 $(X,\circ)$ 上的全体同余关系,R 为 X 上的非空等价关系。若存在同余关系 $\mathrm{int}(R)\in\{C\}$ 满足 $\mathrm{int}(R)\subseteq R$,且对 $\forall R'\in\{C\}, R'\subseteq R$,都有 $R'\subseteq\mathrm{int}(R)$,则称 $\mathrm{int}(R)$ 是 R 的同余内核。

定理1 设有代数系统 $(X,\circ)$,R_1 与 R_2 为论域 X 上的非空等价关系,若 $R_1\subseteq R_2$,则 $\mathrm{int}(R_1)\subseteq\mathrm{int}(R_2)$。

证明 由定义可知 $\mathrm{int}(R_1)\subseteq R_1$,且 $R_1\subseteq R_2$,因此 $\mathrm{int}(R_1)\subseteq R_2$。由 $\mathrm{int}(R_2)$ 可知对 $\forall R'\subseteq R_2$,都有 $R'\subseteq\mathrm{int}(R_2)$,因此 $\mathrm{int}(R_1)\subseteq\mathrm{int}(R_2)$,证明成立。

引理1[17] 设有代数系统 $(X,\circ)$,R_1 与 R_2 为论域 X 上的非空等价关系,若 $R_1\subseteq R_2$,则 $c(R_1)\subseteq c(R_2)$。

引理2[20] 设 R_1 与 R_2 为代数 $(X,\circ)$ 上的非空的等价关系,则有:

$$\mathrm{int}(R_1)\cap\mathrm{int}(R_2)\subseteq\mathrm{int}(R_1\cap R_2) \tag{1}$$

$$c(R_1\cap R_2)\subseteq c(R_1)\cap c(R_2) \tag{2}$$

1.2 商运算及其存在条件

代数系统的商结构为代数运算经映射函数诱导得出的运算规则,称为商运算。

定义4(商运算)[16] 设有代数系统 $(X,\circ)$,R 为论域 X 上的等价关系,映射 $p: X\rightarrow X/R$ 为投影。若商

空间 X/R 上存在运算 $\circ'$，使 p 为同态映射，即对 $\forall x,y\in X$，有 $p(x\circ y)=p(x)\circ p(y)$ 成立，则称 $\circ'$ 为商空间上的商运算。

定义5（商代数） 设 R 是代数 $(X,\circ)$ 上的同余关系，若对 $\forall a,b\in X$ 有 $[a\circ b]=[a]\circ'[b]$，则称 $(X/R,\circ')$ 为 X 关于 R 的商代数。

可见，代数 $(X/R,\circ')$ 为 $(X,\circ)$ 在 R 上的粒层，当且仅当 R 为同余关系时，映射 p 为同态映射，有 $(X/R,\circ')$ 为 $(X,\circ)$ 的商代数。同时，同余关系与同态映射可以相互诱导，而定义4表明，商运算 $\circ'$ 由同态映射 p 诱导，因此粒化准则为同余关系是商空间上存在商运算的充分必要条件。同余关系为论域 X 上特殊的等价关系，等价关系与商集一一对应，同余关系与映射的诱导结果也唯一确定，因此商运算的运算规则是唯一确定的。由此可知，同余关系、同态映射、商运算以及商集之间是一一对应的关系。

2 粒度完备性

2.1 不同代数商空间簇的完备性

粒化准则的完备性是粒度转换的基础，其决定了商空间簇的完备性与求解结果的可靠性。由代数商空间以同余关系作为粒化准则可知，代数系统上所有同余关系构成完备半序格[16]。但在实际问题中并非所有粒化准则均为同余关系，因此，仅从同余关系分析粒度完备性是不够的。为此，本节以代数粒度构造方式为切入点，提出另外两种完备半序格。

在拓扑商空间中，全体等价关系构成完备半序格。因此，代数商空间中的全体等价关系也构成完备半序格。

定义6（粒度关系） 设 R_1 与 R_2 为非空的等价关系，若 $R_1\subseteq R_2$，则称 R_1 比 R_2 细，记为 $R_2\le R_1$。

引理3（基本定理）[4] 对代数系统 $(X,\circ)$，设 $\{R\}$ 为 X 上一切等价关系的集合，则 $\{R\}$ 在定义6的偏序关系"$\le$"下，构成完备半序格 $(\{R\},\le)$。

代数系统的结构由论域和运算共同决定。其中运算仅具备优先级，不具备大小关系，且运算与商运算之间仅具有相似性，因此，可在代数系统中定义如下偏序关系。

定义7（商代数关系） 给定代数系统 $(X,\circ)$，定义代数商空间 $(X_i,\circ_i)$，X_i 为论域 X 的商集，$\circ_i$ 为 X_i 上对应于 $\circ$ 的运算。对 $\forall(X_i,\circ_i),(X_j,\circ_j)$，若 X_i 为 X_j 的细分，则 $(X_j,\circ_j)\le(X_i,\circ_i)$。

下面由一般等价关系构造代数商空间簇，即对代数 $(X,\circ)$ 作一般的粒度分解运算，并由定理2证明该商空间簇的完备性。

定义8（代数商空间簇1） 给定代数系统 $(X,\circ)$，设 $\{X\}$ 为论域 X 中所有等价关系诱导的商集集合，$\{\circ_X\}$ 为商集 $\{X\}$ 上的运算，记代数商空间簇 $U=(X,\circ_X)=\{(X_i,\circ_i)|X_i\in\{X\},\circ_i\in\{\circ_X\}\}$。

定理2 设 $U=(X,\circ_X)$ 为代数 $(X,\circ)$ 的全体代数商空间，则 U 在定义7的偏序关系"$\le$"下构成完备半序格 $(U,\le)$。

证明 商空间理论基于集合论框架进行问题求解。因此，在划分模型下，若全体等价关系构成完备半序格，则其对应的所有划分也构成完备半序格，由基本定理即可证定理2。

对拓扑商空间而言，等价关系保证不同粒层之间具有同态性。然而在代数商空间中，以等价关系作为粒化准则并不适用，故商空间簇 U 仅为粒度完备的，原代数与代数商空间之间不具备同态性。下面由同余关系构造代数商空间簇。

引理4[16] 设 $\{C\}$ 为代数 $(X,\circ)$ 上的全体同余关系，则 $\{C\}$ 在定义6的偏序关系"$\le$"下，构成完备半序格 $(\{C\},\le)$。

定义9（代数商空间簇2） 给定代数 $(X,\circ)$，设 $\{Y\}$ 为论域 X 中所有同余关系诱导的商集集合，$\{\circ_Y\}$ 为商集 $\{Y\}$ 上对应 $\circ$ 的商运算，记代数商空间簇 $W=(Y,\circ_Y)=\{(Y_i,\circ_i)|Y_i\in\{Y\},\circ_i\in\{Y_i\}\}$。

定理3 设 $W=(Y,\circ_Y)$，则 W 在定义7的偏序关系"$\le$"下构成完备半序格 $(W,\le)$。

证明 由引理4可知，代数 $(X,\circ)$ 上的全体同余关系 $\{C\}$ 构成完备半序格[16]，因此 W 为粒度完备的。W 是以同余关系作为粒化准则得到的商空间簇，因此 W 中的商运算可由同余关系与同态映射诱导得出，原代数与代数商空间具有同态性，因此代数商空间簇 W 为商代数簇。

下面给出最后一种代数商空间簇。

定义10（等价关系簇确界） 给定代数系统 $(X,\circ)$，设 $\{R\}$ 为论域 X 上一切等价关系集合。令 $\{R'\}=\{R'|\{R_\alpha\}\subseteq\{R\},R'=\bigcap_\alpha R_\alpha$ 或 $t(\bigcup_\alpha R_\alpha)\}$，称 R' 为等价关系簇 $\{R_\alpha\}$ 的上确界（或下确界）。

定理4 设 $\{R'\}$ 为论域 X 上等价关系簇的上确界集合（或下确界集合），则 $\{R'\}$ 在定义6的偏序关系"$\le$"下，构成完备半序格 $(\{R'\},\le)$。

证明 由定义10可知 $\{R_\alpha\}$ 为等价关系，且 $R'=\bigcap_\alpha R_\alpha$（或 $t(\bigcup_\alpha R_\alpha)$），显然 R' 为等价关系，仿照基本定理[4]，即可得证。

定义11（代数商空间簇3） 给定代数系统 $(X,\circ)$，令 $\{X'\}=\{X'|X'=X/R'$，即 X' 为 $\{R_\alpha\}$ 所有划分的上确界空间（或下确界空间）$\}$，$\{\circ_Z\}$ 为商集 $\{X'\}$ 上对应 $\circ$ 的商运算，记代数商空间簇 $V=(Z,\circ_Z)=\{(Z_i,\circ_i)|Z_i\in\{X'\},\circ_i\in\{Z_i\}\}$。

定理5 设 $V=(Z,\circ_Z)$，则 V 在定义7的偏序关系“$\le$”下构成完备半序格 $(V,\le)$。

证明 仿照定理2即可得证。

对同余关系取上确界或下确界，所得结果显然仍为代数 $(X,\circ)$ 上的同余关系，其与对等价关系的讨论相似，因此本文不对取合成商代数的构造方式作讨论。

2.2 代数商空间簇的关系与含义

由三种代数商空间簇的构造方式可知，V 取 U 的上确界集合与下确界集合，显然 $U\subseteq V$ 成立。而同余关系是特殊的等价关系，因此 $\{C\}\subseteq\{R\}$，于是 $W\subseteq U$ 成立，这表明同余半序格是等价关系半序格中的完备子格。综上所述，构造的三种代数商空间簇具有包含关系 $W\subseteq U\subseteq V$。

此外，完备半序格 U、V、W 都是对论域的颗粒化。其中，U 是商空间理论中最基本的商空间结构[4]，它由一般等价关系簇诱导得出。完备半序格 V 是在商空间簇 U 的基础上由合成等价关系诱导得到的新粒度簇。因此，就 U 与 V 而言，代数 $(X,\circ)$ 与各粒层之间的同态性无法保证，它们仅在粒度层次上完备。而完备半序格 W 中的粒层均由同余关系诱导得出，代数 $(X,\circ)$ 与各粒层之间存在同态映射，因此 W 是粒度与结构完备的商空间簇。综合分析，同余关系使原代数的运算规则在商空间得以保持。同时，同余关系、同态映射、商运算与商集一一对应，因此商集的完备性以及同余关系对运算的可置换性确保代数商空间簇的粒度与结构完备性。由此可知，与拓扑商空间不同，代数商空间的粒度与结构完备性有两方面要求：一方面要求全体商空间簇构成完备半序格；另一方面不同商空间之间要具备同态性，即存在从一个粒层到另一个粒层的同态映射。称上述要求为代数粒度结构完备性条件。

最后，所提出的三种商空间簇分别表示代数 $(X,\circ)$ 的商空间簇、商代数簇以及合成商空间簇。由其粒度完备性可知，代数粒度计算中的粒度分解与合成结果仍落在原论域中，因此代数粒度转换是封闭的。这表明由上述三种构造方式得到的代数商空间是可靠的，为代数商空间模型在不同粒度世界的转换提供了理论依据。

3 粒度转换

在商空间理论中，论域 X 在粒度转换时其结构也会发生改变。对代数商空间模型，同余关系使原代数与代数商空间之间存在同态映射，于是二者具有相同的构成成分与运算规则。显然，同余关系是代数粒度转换的关键。因此研究如何修正粒化准则 R 使之具有同余性是十分必要的。本章将以商空间构造方式为基础，对代数商空间模型的粒度转换及非同余粒化准则的修正进行讨论。

3.1 粒度分解及非同余修正

根据粒化准则的同余性，要对代数粒度分解方法分情况讨论。给定代数 $(X,\circ)$ 及粒化准则 R：

一方面，若 R 为同余关系，由定义4可得商空间 $(X',\circ')$。

定义12（商空间） 设 R 为代数 $(X,\circ)$ 上的同余关系，$(X',\circ')$ 为 R 诱导的代数商空间，则 $(X',\circ')$ 满足：$X'=X/R'$，且映射 $p:X\to X/R$ 使运算 $\circ'$ 满足 $p(a\circ b)=p(a)\circ' p(b)$，其中 a、b 为论域 X 上的任意元素。

显然，由定义12得到的代数商空间为 $(X,\circ)$ 的商代数，映射 p 为从 $(X,\circ)$ 到 $(X',\circ')$ 的同态。

另一方面，若粒化准则 R 为非同余关系，本文采用近似同余进行修正，修正结果能够最大近似原粒化准则，其既有同余性，也满足等价关系 R 的要求，具体定义如下。

定义13（近似同余） 设代数系统 $(X,\circ)$ 上的全体同余关系为 $\{C\}$，全体等价关系集合为 $\{R\}$，则对 $\forall R\in\{R\}$ 且 $R\ne\varnothing$，关于 R 都存在近似同余关系对 $(\overline{R},\underline{R})$ 且 $\overline{R},\underline{R}\in\{C\}$，其中：

$$\overline{R}=t\left(\bigcup_{R_{\alpha i}\in\{c\},R_{\alpha i}\subseteq R}R_{\alpha i}\right) \tag{3}$$

$$\underline{R}=\bigcap_{R_{\alpha i}\in\{c\},R_{\alpha i}\subseteq R}R_{\alpha i} \tag{4}$$

$\overline{R}$ 称为 R 的上同余，$\underline{R}$ 称为 R 的下同余。

由定义2与定义3可知，上同余 $\overline{R}=\mathrm{int}(R)$，下同余 $\underline{R}=c(R)$。对应上（下）同余，由定义12可得论域 X 的近似商空间对 $(\overline{X},\underline{X})$，其中 $\overline{X}=X/\overline{R}$ 为 X 的上商空

间；$\underline{X}=X/\underline{R}$ 为 X 的下商空间。此时三种商空间有如下关系。

定理6 设有代数系统 $(X,\circ)$，R 为论域 X 上的等价关系，若 $(\overline{R},\underline{R})$ 为 R 的近似同余对，$(\overline{X},\underline{X})$ 为其近似商空间对，则 $\overline{R}\ge R\ge\underline{R}$，$\overline{X}\ge X\ge\underline{X}$。

证明 由定义2与定义3可知，$\mathrm{int}(R)\subseteq R\subseteq c(R)$，因此 $X/\mathrm{int}(R)\subseteq X/R\subseteq X/c(R)$，由定义13可得，$\overline{R}\ge R\ge\underline{R}$, $\overline{X}\ge X\ge\underline{X}$。证明成立。

3.2 粒度合成

多粒度合成可由二粒度合成推导，因此仅讨论两个粒度的合成。为保证合成前后问题关键信息不丢失，代数商空间粒层合成要求：合成商空间将完全包含商空间簇的全部信息，且不超过其所能提供的全部信息。因此，代数商空间粒层合成原则如下：

设 $(X_1,\circ_1)$、$(X_2,\circ_2)$ 为代数 $(X,\circ)$ 上两个不同层次的商空间，将 $(X_1,\circ_1)$ 与 $(X_2,\circ_2)$ 的合成定义为 $(X_3,\circ_3)=(X_1,\circ_1)*(X_2,\circ_2)$，则 $(X_3,\circ_3)$ 满足：

（1）X_1 与 X_2 为 $\circ_3$ 的商空间；

（2）$\circ_1$ 与 $\circ_2$ 为 $\circ_3$ 在 X_1、X_2 上的商运算。

同样，代数商空间粒层合成根据粒化准则的同余性分为商代数合成与非商代数合成。首先，对商代数的合成，可直接利用同余关系诱导合成商空间上的等价关系。

定义14（合成商空间） 设 $(X_1,\circ_1)$、$(X_2,\circ_2)$ 为代数 $(X,\circ)$ 的商空间，R_1、R_2 分别为 $(X_1,\circ_1)$ 与 $(X_2,\circ_2)$ 诱导的同余关系，则 X_1 与 X_2 的合成商空间为 $X_3=X_1*X_2=\{a\cap b|a\in X_1,b\in X_2\}$。商空间 X_3 诱导的等价关系为 R_3，则 $R_3=R_1\cap R_2$，为 R_1 与 R_2 的合成。

证明 设 $[x]_3\in X_3$，因同余关系为特殊的等价关系，则有：

$$\begin{aligned}[x]_3=[x]_{R_1\cap R_2}=\{y|y\in X,\ y(R_1\cap R_2)x\}=\\ \{y|y\in X,\ (yR_1x)\cap(yR_2x)\}=\\ \{y|y\in X,\ (yR_1x)\}\cap\{y|y\in X,\ (yR_2x)\}=[x]_1\cap[x]_2\end{aligned}$$

显然，同余关系的交 R_3 仍为同余关系。因为 $R_i\ge R_3, i=1,2$，即 X/R_3 为 X/R_i 的细分，$X/R_3\ge X/R_i$ 恒成立，所以 R_3 合成满足合成原则，证明成立。

根据粒度合成方法以及商运算与同余关系、同态映射的关系，合成商代数上的商运算利用同余关系与同态映射进行诱导可得。

引理5[16] 设 $(X_1,\circ_1)$、$(X_2,\circ_2)$ 分别为代数 $(X,\circ)$ 的商空间，$X_3=X_1*X_2$，$\circ_3$ 为运算 $\circ_1$ 与 $\circ_2$ 的合成，$\circ_3=\circ_1*\circ_2$，$\circ_3{:}X_3*X_3\to X_3$。若 $\circ_3$ 对 $\forall[x]_3$ 有 $[x]_3\circ_3[y]_3=[x]_1\circ_1[y]_1\cap[x]_2\circ_2[y]_2$，则 $\circ_3$ 为 X_3 上相对于 $\circ$ 的商运算，且 $\circ_1$ 与 $\circ_2$ 分别为 X_1 与 X_2 上相对于 $\circ_3$ 的商运算。

其次，对非商代数合成方法，本文仅讨论粒化准则 R_1、R_2 均为非同余的情况，此时合成方法分为后合成法与后修正法。

后合成法指在粒层合成之前，将粒化准则修正为同余关系，再通过商代数合成完成粒层合成。根据修正方式的不同，合成结果有三种：$\underline{X_1}*\underline{X_2}$、$\overline{X_1}*\overline{X_2}$、$\underline{X_1}*\overline{X_2}$（或 $\underline{X_2}*\overline{X_1}$，本文只讨论一种情况）。定理7给出并证明了各合成结果的关系。

定理7 设 R、R_2 为代数 $(X,\circ)$ 上的等价关系，其近似同余关系对分别为 $(\overline{R_1},\underline{R_1})$、$(\overline{R_2},\underline{R_2})$，近似商空间对为 $(\overline{X_1},\underline{X_1})$、$(\overline{X_2},\underline{X_2})$，则粒层不同合成结果关系如下：

$$\underline{R_1}\cap\underline{R_2}\le\underline{R_1}\cap\overline{R_2}\le\overline{R_1}\cap\overline{R_2}\tag{5}$$

$$\underline{X_1}*\underline{X_2}\le\underline{X_1}*\overline{X_2}\le\overline{X_1}*\overline{X_2}\tag{6}$$

$$\underline{R_1}\cap\underline{R_2}\le R_1\cap R_2\le\overline{R_1}\cap\overline{R_2}\tag{7}$$

$$\underline{X_1}*\underline{X_2}\le X_1*X_2\le\overline{X_1}*\overline{X_2}\tag{8}$$

证明 由定理6可得，$\mathrm{int}(R_1)\subseteq R_1\subseteq c(R_1)$ 与 $\mathrm{int}(R_2)\subseteq R_2\subseteq c(R_2)$ 成立，则有 $\mathrm{int}(R_1)\cap\mathrm{int}(R_2)\subseteq c(R_2)$ 与 $\mathrm{int}(R_1)\cap\mathrm{int}(R_2)\subseteq c(R_1)$，于是 $\mathrm{int}(R_1)\cap\mathrm{int}(R_2)\subseteq c(R_1)\cap c(R_2)$；同理 $c(R_1)\cap\mathrm{int}(R_2)\subseteq c(R_1)\cap c(R_2)$。故 $\underline{R_1}\cap\underline{R_2}\le\underline{R_1}\cap\overline{R_2}\le\overline{R_1}\cap\overline{R_2}$ 成立，对应的划分满足 $\underline{X_1}*\underline{X_2}\le\underline{X_1}*\overline{X_2}\le\overline{X_1}*\overline{X_2}$。

由定理6可知 $\mathrm{int}(R_1)\subseteq R_1\subseteq c(R_1)$，$\mathrm{int}(R_2)\subseteq R_2\subseteq c(R_2)$ 成立，因此：

$$\mathrm{int}(R_1)\cap\mathrm{int}(R_2)\subseteq R_1\cap R_2\subseteq c(R_1)\cap c(R_2)\tag{9}$$

$\underline{R_1}\cap\underline{R_2}\le R_1\cap R_2\le\overline{R_1}\cap\overline{R_2}$，进而 $\underline{X_1}*\underline{X_2}\le X_1*X_2\le\overline{X_1}*\overline{X_2}$ 成立。

后修正法为先进行粒层合成，得到合成等价关系后再对合成结果修正，合成结果为 $\overline{X_1*X_2}$ 或 $\underline{X_1*X_2}$。

定理8 设 R_1 与 R_2 是代数 $(X,\circ)$ 上的等价关系，若 R_1 与 R_2 合成的等价关系为 $R_1\cap R_2$，则其修正同余关系对为 $(\overline{R_1\cap R_2},\underline{R_1\cap R_2})$，其诱导的商空间对为 $(\overline{X_1*X_2},\underline{X_1*X_2})$，则合成结果关系如下：

$$\underline{R_1\cap R_2}\le R_1\cap R_2\le\overline{R_1\cap R_2}\tag{10}$$

$$\underline{X_1*X_2}\le X_1*X_2\le\overline{X_1*X_2}\tag{11}$$

证明 由定理6可知，对任意等价关系 R 有 $\overline{R}\ge R\ge\underline{R}$，因此 $\underline{R_1\cap R_2}\le R_1\cap R_2\le\overline{R_1\cap R_2}$，其对应划分有 $\underline{X_1*X_2}\le X_1*X_2\le\overline{X_1*X_2}$，证明成立。

3.3 粒度合成结果分析

前文所述六种合成结果，一般有以下大小关系。

定理9 设 R_1、R_2 为代数 $(X,\circ)$ 上的两个等价关系，X_1、X_2 为其对应的商空间，则有：

$$\underline{X_1}*\underline{X_2} \le \underline{X_1*X_2} \le X_1*X_2 \le \overline{X_1*X_2} \le \overline{X_1}*\overline{X_2} \tag{12}$$

证明 由引理2可得 $\overline{R_1\cap R_2} \le \overline{R_1}\cap\overline{R_2}$ 与 $\underline{R_1\cap R_2} \le \underline{R_1}\cap\underline{R_2}$ 成立，结合式(8)与式(11)，各类合成结果的关系为式(12)，其中 $\underline{R_1}\cap\overline{R_2}$ 不作讨论，证明成立。

针对合成结果的一致性，分为两方面讨论：

一方面，当等价关系 R_1 与 R_2 均为同余关系时，则不论何种合成方式，其合成结果均一致，即：

$$\underline{X_1}*\underline{X_2} = \underline{X_1*X_2} = X_1*X_2 = \underline{X_1}*\overline{X_2} = \overline{X_1*X_2} = \overline{X_1}*\overline{X_2} \tag{13}$$

证明 若 R 为同余关系，则 $c(R)=R, \mathrm{int}(R)=R$ [20]，因此，式(14)成立。

$$\underline{R_1}\cap\underline{R_2} = \underline{R_1\cap R_2} = R_1\cap R_2 = \underline{R_1}\cap\overline{R_2} = \overline{R_1\cap R_2} = \overline{R_1}\cap\overline{R_2} \tag{14}$$

显然，其各划分必定相等，证明成立。

另一方面，若 R_1 与 R_2 均为非同余关系，则有定理10成立。

定理10 设代数系统 $(X,\circ)$，R_1 与 R_2 为 $(X,\circ)$ 上的非同余粒化准则，X_1、X_2 为 R_1 与 R_2 诱导的商空间，若 $\underline{X_1*X_2} = \underline{X_1}*\underline{X_2}$，则必满足以下任一条件：

（1）R_1 与 R_2 为包含关系；

（2）$\mathrm{int}(R_1)\cap\mathrm{int}(R_2)$ 为全等关系；

（3）$\mathrm{int}(R_1\cap R_2)$ 为恒等关系。

若 $\overline{X_1*X_2} = \overline{X_1}*\overline{X_2}$，则必满足以下任一条件：

（1）R_1 与 R_2 为包含关系；

（2）$c(R_1)\cap c(R_2)$ 为恒等关系；

（3）$c(R_1\cap R_2)$ 为全等关系。

特别的，当 $R_1\cap R_2$ 为同余关系、全等关系或恒等关系时，有 $\underline{X_1*X_2} = \overline{X_1*X_2} = X_1*X_2$。

证明 若 $\mathrm{int}(R_1)\cap\mathrm{int}(R_2)$ 为全等或 $\mathrm{int}(R_1\cap R_2)$ 为恒等关系，则 $\mathrm{int}(R_1)\cap\mathrm{int}(R_2)=\mathrm{int}(R_1\cap R_2)$ [20]；若 R_1 与 R_2 为包含关系，设 $R_1\subseteq R_2$，则 $R_1\cap R_2=R_1, \mathrm{int}(R_1\cap R_2)=\mathrm{int}(R_1)$。若 $R_1\subseteq R_2$，则由定理1可得 $\mathrm{int}(R_1)\subseteq\mathrm{int}(R_2)$ 成立。因此有 $\mathrm{int}(R_1)\cap\mathrm{int}(R_2)=\mathrm{int}(R_1)$，此时 $\mathrm{int}(R_1)\cap\mathrm{int}(R_2)=\mathrm{int}(R_1)=\mathrm{int}(R_1\cap R_2)$。由此可知，当 $\mathrm{int}(R_1)\cap\mathrm{int}(R_2)=\mathrm{int}(R_1\cap R_2)$ 时，有 $\overline{X_1*X_2}=\overline{X_1}*\overline{X_2}$ 成立。除上述三种情况外均有 $\overline{X_1*X_2}<\overline{X_1}*\overline{X_2}$ 成立。

若 $c(R_1)\cap c(R_2)$ 为恒等或 $c(R_1\cap R_2)$ 为全等关系时，则 $c(R_1)\cap c(R_2)=c(R_1\cap R_2)$ [20]；若 R_1 与 R_2 为包含关系，设 $R_1\subseteq R_2$，则 $R_1\cap R_2=R_1, c(R_1\cap R_2)=c(R_1)$。若 $R_1\subseteq R_2$，由引理1与定义13可得 $c(R_1)\subseteq c(R_2)$，则 $c(R_1)\cap c(R_2)=c(R_1)$，即 $c(R_1\cap R_2)=c(R_1)=c(R_1)\cap c(R_2)$，此时有 $\underline{X_1}*\underline{X_2}=\underline{X_1*X_2}$ 成立。除上述三种情况外均有 $\underline{X_1}*\underline{X_2}<\underline{X_1*X_2}$ 成立。

若 $R_1\cap R_2$ 为同余关系或者为 I、E，则 $\overline{R_1\cap R_2}=R_1\cap R_2=\underline{R_1\cap R_2}$，因此 $\underline{X_1*X_2}=X_1*X_2=\overline{X_1*X_2}$，证明成立。

基于以上讨论，代数商空间模型在粒度转换时首先要分析粒化准则 R 是否为同余关系：若 R 为同余关系，则可直接由 R 进行粒度分解或合成，再由定义12或引理5诱导商运算或合成运算；若 R 为非同余，则在粒度转换时要对 R 进行修正。

针对非同余关系的合成，后合成法要分别对 R_1、R_2 修正，虽然计算量有所增加，但修正后的粒化准则在运算 $\circ$ 下具有可置换性，因此可由引理5直接求得新粒度的商运算；后修正法在粒层合成时并未考虑论域结构，因此虽仅修正一次粒化准则，但新粒度上的运算规则要由定义4或定义12逐一诱导，计算繁琐。然而结合式(12)可知，后修正法的合成结果 $\overline{X_1*X_2}$、$\underline{X_1*X_2}$ 与原粒层直接合成的结果最为接近。上述两种合成方式各有利弊，在粒层合成时需根据实际情况进行选择。

例1 设问题为代数系统 $(X,\circ)$，其中 $X=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \circ=+_8$，$R_1$ 与 R_2 为 $(X,\circ)$ 上的非同余粒化准则，满足 $X_1=X/R_1=\{\{0,1,2,4\},\{3\},\{5\},\{6\},\{7\}\}, X_2=X/R_2=\{\{0,2,4,5,6\},\{3,7\},\{1\}\}$，则由定义13可得，$\overline{X_1}=\{\{1\},\{3\},\{2,6\},\{4,0\},\{5\},\{7\}\}, \underline{X_1}=\{\{1,2,3,4,5,6,7,0\}\}; \overline{X_2}=\{\{0,4\},\{1\},\{2,6\},\{3,7\},\{5\}\}, \underline{X_2}=\{\{1,2,3,4,5,6,7,0\}\}$。因此后合成法的合成结果分别为 $\overline{X_1}\cap\overline{X_2}=\{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}, \underline{X_1}\cap\underline{X_2}=\{\{1,2,3,4,5,6,7,0\}\}$；在先合成后修正下计算合成结果，合成等价关系为 $X_3=X/R_1\cap R_2=\{\{0\},\{1\},\{2,4\},\{6\},\{5\},\{7\}\}$，修正后的合成结果为 $\overline{X_3}=\{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}, \underline{X_3}=\{\{1,3,5,7\},\{0,2,4,6\}\}$。

综上四种合成结果，有以下关系成立：$\overline{X_1}\cap\overline{X_2}=\overline{X_3}\subseteq\underline{X_3}\subseteq\underline{X_1}\cap\underline{X_2}$，即 $\underline{X_1}*\underline{X_2}\le\underline{X_1*X_2}=\overline{X_1*X_2}\le\overline{X_1}*\overline{X_2}$，满足式(12)。其中 $\overline{X_1}\cap\overline{X_2}=\overline{X_3}$，有 $\underline{X_3}$ 为恒等关系，满足定理10中的条件(2)。

4 代数商空间求解一致性及应用

本章将研究代数商空间的求解原理，并讨论其

应用意义。

4.1 代数商空间求解一致性原理

拓扑商空间借助商映射的连续性与集合的连通性，将求解复杂问题转换为求某一集合的连通集，并根据同态法则给出“若问题在原空间中有解，则在粗粒度空间上也一定有解；若问题在粗粒度空间中无解，则在原空间也一定无解”的结论[4]。上述结论被称为商空间理论的保真与保假原理。保真与保假原理是商空间理论研究多粒度计算的重要内容，利用该原理可删除问题的无解部分，缩小求解范围，大大减少计算量。因此，该原理在代数商空间中成立与否是十分重要的问题。与拓扑求解不同，代数系统以代数方程是否有解作为问题求解依据，因此某一问题是否有解等价于代数方程是否有解。下面对问题在某一粒度上是否有解进行定义。

定义15（代数解） 设有代数系统 $(X,\circ)$，R 为论域 X 上的等价关系，设 $\forall a,b\in X$，$[X]=X/R$。若目标方程 $[a]\circ[x]=[b]$ 有解，则问题在代数 $(X,\circ)$ 的粒度 R 上有解。

在划分模型下，定义4表明商空间 X/R 上存在商运算 $\circ'$ 使 $[x\circ y]=[x]\circ'[y]$，即元素经过运算后的投影与投影后进行商运算的结果相同。因此，同余关系与运算 $\circ'$ 显然可使映射 p 为同态映射，原代数与代数商空间遵循同态法则，由此可知在代数商空间中，保真原理与保假原理仍成立。结合粒度转换方法可知：代数商空间在粒度转换时，尽管运算结构发生改变，但问题的解并未改变，它仅是在粗细粒度转换中被细分或合并，由此得出代数商空间求解一致性原理。

定理11（一致性原理） 设 R_1 与 R_2 为代数系统 $(X,\circ)$ 上的同余关系，$(X_1,\circ_1)$、$(X_2,\circ_2)$ 为其对应的代数商空间，若代数方程 $a\circ x=b$ 在 $(X,\circ)$ 上有解，则问题在粒度 R_1 与 R_2 上分别有解，其解分别为 $[x]_1$ 与 $[x]_2$；若代数方程 $[a]_1\circ[x]_1=[b]_1$ 与 $[a]_2\circ[x]_2=[b]_2$ 在 $(X_1,\circ_1)$ 与 $(X_2,\circ_2)$ 上分别有解，则问题在合成商代数中一定有解，其解为 $[x]_1\cap[x]_2$。

证明 R_1 与 R_2 为同余关系，因此商空间 $(X_1,\circ_1)$ 与 $(X_2,\circ_2)$ 上的运算为商运算，于是有 $[a\circ x]_i=[a]_i\circ_i[x]_i,\ i=1,2$。若 $a\circ x=b$ 有解，则 $[a\circ x]_i=[a]_i\circ_i[x]_i=[b]_i$ 成立，于是 $[a]_i\circ_i[x]_i=[b]_i$ 也有解。

设 X_3 诱导的等价关系为 R_3，则 $R_3=R_1\cap R_2$。因 R_1 与 R_2 为同余关系得 R_3 为同余关系。由同余关系、同态映射、商运算的一一对应性可得，合成空间 X_3 上也存在商运算 $\circ_3$，根据合成原则定义 $\circ_3$ 为：对 $\forall x_3,y_3\in X_3$，有 $[x]_3\circ_3[y]_3=[x\circ y]_3$。显然，$[x]_3=[x]_1\cap[x]_2$，因此，代数方程 $[a]_3\circ_3[x]_3=[b]_3$，有：

$$[b]_3=[a]_3\circ_3[x]_3=[a\circ x]_3=([a]_1\circ_1[x]_1)\cap([a]_2\circ_2[x]_2)=[b]_1\cap[b]_2$$

因此 $[a]_3\circ_3[x]_3=[b]_3$ 有解，且 $[b]_3=[b]_1\cap[b]_2$，证明成立。

一致性原理给出代数方程在粒度转换后的求解结果，其一致性是指粒度转换前后组成问题解的元素为同一论域。该原理表明，代数商空间以同余关系作为粒化准则使问题的关键信息在粒度转换时得以保存；因此，对于大规模的复杂代数问题，一致性原理确保问题能在多个粗代数上求解，且各粒层互不影响，在获得各粒层的求解结果后取其交集即可得出原问题的解。由此可知，代数商空间在多粒度计算中仍具有商空间理论求解问题的优势。

例2 设有代数系统 $(X,\circ)$，其中 $X=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，$\circ=+_6$，R_1 与 R_2 为 $(X,\circ)$ 上的同余粒化准则，$R_1=\{\{1,3,5,7\},\{0,2,4,6\}\},R_2=\{\{0,3,6\},\{1,4,7\},\{2,5,1\}\}$，求 $1\circ x=2$ 的全部解。

利用代数粒度计算进行问题求解，首先 R_1 与 R_2 可分别诱导代数商空间 $(X_1,\circ_1),(X_2,\circ_2)$，其中 $X_1=\{\{1,3,5,7\},\{0,2,4,6\}\}$，$\circ=+_2$；$X_2=\{\{0,3,6\},\{1,4,7\},\{2,5,1\}\}$，$\circ=+_3$。原代数方程 $1\circ x=2$ 在 $(X_1,\circ_1)$ 下表达为 $[1]_1\circ_1[x]_1=[2]_1$，显然有 $[1]_1\circ_1[1]_1=[2]_1$，故 $[x]_1=\{1,3,5,7\}$；在 $(X_2,\circ_2)$ 下表达为 $[1]_2\circ_2[x]_2=[2]_2$，显然有 $[1]_2\circ_2[1]_2=[2]_2$，故 $[x]_2=\{1,4,7\}$。那么综上可得原问题 $1\circ x=2$ 的解为 $x=[x]_1\cap[x]_2=\{1,7\}$。显然，其解得到验证，解的值域不变。

4.2 代数商空间的应用

商空间理论作为多粒度计算的主要计算理论已成为问题求解与数据分析的重要工具。代数商空间解决了商空间模型在论域分解与合成前后结构不一致的问题[17]，本文在对代数商空间粒化方法、粒化结果等的研究基础上提出求解一致性原理，证明了代数商空间在粒度转化时不会改变问题的解，为使用代数商空间进行问题求解奠定理论基础。

近年来，利用代数系统分析计算模型或计算理论受到计算机科学领域的广泛关注，代数商空间将商空间理论拓展到了更多的领域中。代数是推理系统表示的有效语言，若利用代数商空间模型，则定性推理实际上是在某一代数商空间上对问题进行推理和分析，那么代数商空间的粒度转换技术与一致性

原理均可应用于推理过程。例如：通过粒化或合成构造定性空间，此时，对于非同余的粒化准则，不必采用逼近策略计算上界空间和运算，可直接通过近似同余与定义12诱导商空间、商运算与约束条件等。同时，在商空间上进行推理与分析时，求解一致性保证了推理结果的正确性。于是代数商空间则成为描述定性推理的新的数学工具。

5 结束语

本文以代数商空间模型的粒度转换为切入点，论证其粒度完备性，系统讨论了代数商空间粒度转换技术，并提出问题解的一致性原理：基于不同的粒度构造方式提出三种代数商空间簇，并探讨其联系、含义以及粒度结构与运算结构的完备性；针对代数粒度转换，采用上同余与下同余修正非同余粒化准则。同时，综合考虑粒度转换原则给出粒度分解与合成方法，并证明不同转换结果之间具有确定的大小关系及合成结果的相等条件。最后，提出并论证了代数商空间的求解一致性原理，结合实例与定性推理简要讨论了对代数商空间的应用。本文仅对代数商空间的核心问题进行理论探讨，在未来工作中，考虑将代数商空间应用到实际问题中，并继续研究使用代数商空间求解模糊、不确定性问题。

参考文献：

[1] YAO Y Y. Three perspectives of granular computing[J]. Journal of Nanchang Institute of Technology, 2006, 25(2): 16-21.

[2] 王国胤, 张清华, 胡军. 粒计算研究综述[J]. 智能系统学报, 2007, 2(6): 8-26.
WANG G Y, ZHANG Q H, HU J. An overview of granular computing[J].CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2007, 2(6): 8-26.

[3] 苗夺谦, 张清华, 钱宇华, 等. 从人类智能到机器实现模型——粒计算理论与方法[J]. 智能系统学报, 2016, 11(6): 743-757.
MIAO D Q, ZHANG Q H, QIAN Y H, et al. From human intelligence to machine implementation model: theories and applications based on granular computing[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2016, 11(6): 743-757.

[4] 张铃, 张钹. 问题求解理论及应用: 商空间粒度计算理论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 4-106.
ZHANG L, ZHANG B. Theory and applications of problem solving: quotient space based granular computing[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007: 4-106.

[5] ORTHE Y A, ESCANDE A, YOSHIDA E. Quotient-space motion planning[C]//Proceedings of the 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Madrid, Oct 1-5, 2018. Piscataway: IEEE, 2018: 8089-8096.

[6] 刘利敏, 余洁, 李小娟, 等. 引入商空间粒度计算的全极化SAR影像分类[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(1): 74-80.
LIU L M, YU J, LI X J, et al. An improved full polarimetric SAR image classification method combining with granularity computing of quotient space theory[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2018, 43(1): 74-80.

[7] ZHAO T, WANG G Y, XIAO B. Image enhancement based on quotient space[C]//LNCS 8537: Proceedings of the 2nd International Conference on Rough Sets and Intelligent Systems Paradigms, Granada and Madrid, Jul 9-13, 2014. Cham: Springer, 2014: 384-391.

[8] XU G, WU R, WANG Q. Multi-granular angle description for plant leaf classification and retrieval based on quotient space[J]. Journal of Information Processing Systems, 2020, 16(3): 663-676.

[9] ZHAO S H, SUN X, CHEN J, et al. Relational granulation method based on quotient space theory for maximum flow problem[J]. Information Sciences, 2020, 507: 472-484.

[10] LU J, QING J, HE H, et al. Classification algorithm of case retrieval based on granularity calculation of quotient space [J]. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2020, 35(1): 2150003.

[11] 谢娟英, 鲁肖肖, 屈亚楠, 等. 粒计算优化初始聚类中心的*K*-medoids聚类算法[J]. 计算机科学与探索, 2015, 9(5): 611-620.
XIE J Y, LU X X, QU Y N, et al. *K*-medoids clustering algorithms with optimized initial seeds by granular computing[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2015, 9(5): 611-620.

[12] 魏华珍, 赵姝, 陈洁, 等. 基于标签传播的大规模网络最大流求解方法[J]. 计算机科学与探索, 2017, 11(10): 1609-1620.
WEI H Z, ZHAO S, CHEN J, et al. Method of solving maximum flow problem in large-scale network based on label propagation[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2017, 11(10): 1609-1620.

[13] 陶永芹, 崔杜武. 基于动态模糊粒神经网络算法的负荷辨识[J]. 控制与决策, 2011, 26(4): 519-523.
TAO Y Q, CUI D W. Load identification of algorithm based on dynamic fuzzy granular neural network[J]. Control and Decision, 2011, 26(4): 519-523.

[14] 张金凤, 李雪, 杨蕊, 等. 基于商空间和支持向量机的滚动轴承故障智能诊断[J]. 计量学报, 2020, 41(7): 835-841.

ZHANG J F, LI X, YANG R, et al. Intelligent diagnosis for rolling bearing fault based on quotient space and support vector machine[J]. Acta Metrologica Sinica, 2020, 41(7): 835-841.
[15] CZAJA L, WOLSKI M, GOMOLI A, et al. An incidence algebra approach to knowledge granulation in Pawlak information systems[J]. Fundamenta Informaticae, 2013, 128(1/2): 223-238.
[16] 陈林书, 王加阳, 杨正华, 等. 基于代数结构的商空间模型研究[J]. 电子学报, 2016, 44(4): 952-958.
CHEN L S, WANG J Y, YANG Z H, et al. A study for quotient space model based on algebraic structure[J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(4): 952-958.
[17] 王加阳, 杨正华. 两种结构的商空间模型比较研究[J]. 电子学报, 2013, 41(11): 2262-2269.
WANG J Y, YANG Z H. A comparative study of quotient space model with two structures[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(11): 2262-2269.
[18] CHEN L S, WANG J Y, LI L. The models of granular system and algebraic quotient space in granular computing[J]. Chinese Journal of Electronics, 2016, 25(6): 1109-1113.
[19] CHEN L S, WANG J Y. The rough representation and measurement of quotient structure in algebraic quotient space model[J]. High Technology Letters, 2017, 23(3): 293-297.
[20] 孙野, 王加阳, 张思同. 代数商空间的同余结构研究[J]. 电子学报, 2017, 45(10): 2434-2438.
SUN Y, WANG J Y, ZHANG S T. A study of congruence structurein algebraic quotient space[J]. Acta Electronica Sinica, 2017, 45(10): 2434-2438.
[21] CHEN L S, WANG J Y, WANG W C, et al. A new granular computing model based on algebraic structure[J]. Chinese Journal of Electronics, 2019, 28(1): 136-142.

魏宗萱(1995—),女,河北保定人,硕士研究生,主要研究方向为粒度计算、智能信息处理等。
WEI Zongxuan, born in 1995, M.S. candidate. Her research interests include granular computing, intelligent information processing, etc.

王加阳(1963—),男,湖南长沙人,博士,教授,博士生导师,CCF高级会员,主要研究方向为粒度计算、智能信息处理、决策支持等。
WANG Jiayang, born in 1963, Ph.D., professor, Ph.D. supervisor, senior member of CCF. His research interests include granular computing, intelligent information processing, decision support, etc.