中国科学 A辑: 数学 2008 年 第 38 卷 第 7 期: 829～840
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

算术曲面上的赋值

许宁

中国科学院研究生院数学系, 北京 100049
E-mail: xning623@163.com

收稿日期: 2007-10-23; 接受日期: 2008-03-20

摘要 给出了赋值的高度的定义以及大域 $\mathbb{C}_{p,G}$ 的定义, 其中 p 是素数, $G \subset \mathbb{R}$ 是包含 1 的加法子群. 得出 $\mathbb{C}_{p,G}$ 是一个域, 并且是代数闭的. 在此基础上, 得到曲面赋值的完整分类. 进一步地, 对任意 $m \leqslant n \in \mathbb{Z}$, 令 $V_{m,n}$ 为 $n-m+1$ 维的 $\mathbb{R}$- 向量空间, 其中坐标的指数从 m 到 n. 可以推广 $\mathbb{C}_{p,G}$ 的定义, 使得其中 p 是一个素数, $G \subset V_{m,n}$ 是包含 1 的加法子群. 得出如果 $m \leqslant 0 \leqslant n$, 则 $\mathbb{C}_{p,G}$ 是一个域.

关键词 赋值 高度 秩 全序群 大域 超越数

MSC(2000) 主题分类 14J10

1 引言

赋值理论具有很长的历史 [1], 它在许多领域中都具有重要的作用. 关于形式幂级数域上的赋值有过很多的研究 (参考文献 [2–5]). 赋值是许多代数对象的研究工具, 因此如果我们得到关于赋值的完整分类将是非常有帮助的. 令 K 为一个算术曲面的函数域, 即 K 是 $\mathbb{Q}$ 的超越度为 1 的有限生成域扩张. 在本文中, 我们得到算术曲面上赋值的完整分类.

我们给出一些基本定义: 令 K 为一个域. 如果 v 是 K 的一个赋值, 则定义 v 的高度为 $\min_R \mathrm{ht}(P_v \cap R)$, 其中 R 遍历 K 的所有子环, 受约束于 $\mathrm{q.f.}(R) = K$, 记为 $\mathrm{ht}v$. 并且有定理: 令 K 为一个域, v 为 K 的一个非平凡赋值. 如果 R 是 K 的一个子环, 受约束于 $\mathrm{q.f.}(R) = K$ 且 $\dim R = n < +\infty$, 则 $\mathrm{rank}v \leqslant \mathrm{ht}v \leqslant n$.

其次我们给出大域 $\mathbb{C}_{p,G}$ 的定义.

$$\mathbb{C}_{p,G} = \left\{ \text{良好支撑的形式和} \sum_{r\in G,\ a_r\in T} a_r p^r \right\},$$

其中 p 是一个素数, $G \subset \mathbb{R}$ 是包含 1 的加法子群, T 是 Teichmüller 提升 $\mathbb{F}_p \to W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 的像, 并且 $\sum_{r\in G,\ a_r\in T} a_r p^r$ 是良好支撑的, 也就是说 $\{r \in \mathbb{R} \mid a_r \neq 0\}$ 在 Archimedes 序 “$<$” 下是一个良序子集. 我们得到 $\mathbb{C}_{p,G}$ 是一个域并且 $\mathbb{C}_{p,Q}$ 是代数闭的.

本文中研究了算术曲面上的赋值.

令 K 为一个算术曲面的函数域, 即 K 是 $\mathbb{Q}$ 的超越度为 1 的有限生成域扩张. 令 v 为 K 的一个赋值, R_v 为赋值环, 并且 G_v 为全序群. 我们可以简化为 K 是 $\mathbb{Q}$ 的一维纯超越扩张的情形.

我们得到赋值的完整分类如下:

定理 1.1 函数域为 K 的算术曲面上的所有非平凡赋值可以分为 7 种类型:

(i) 水平除子类型. v 是 K 的一个 $\mathbb{Q}$- 赋值, 令 F 为 $\mathbb{Q}$ 在 K 中的代数闭包, 存在 F 上的一个光滑仿射曲线 C, 以及一个同构 $\varphi: F(C) \to K$. v 由 C 的一个素除子给出.

在以下的 6 种情形中, 存在一个素数 p, 受约束于 v 在 $\mathbb{Q}$ 上的限制是 $\mathbb{Q}$ 的一个 p 进赋值且 $v(p) = s$.

(ii) 垂直除子类型. 存在 K 的一个子环 R 受约束于 $R \supseteq (p)$ 且 $\text{q.f.}(R) = K$. 令 $P = P_v \cap R = \{f \in R \mid v(f) > 0\}$, 则 $R_v = R_P$ 是一个离散赋值环.

(iii) Witt 类型. 存在一个超越数

$$\varphi = a_1 p^{1/s} + a_2 p^{2/s} + \cdots, \ a_i \in T, \ \forall\, i,$$

受约束于对任意 $f(x) \in \mathbb{Q}(x)$, $v(f(x))$ 等于 $f(\varphi)$ 的 p 进赋值.

(iv) 有理非离散类型. 存在一个超越数

$$\varphi = \sum_{r \in \mathbb{Q},\ a_r \in T} a_r p^r \in \mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}},$$

受约束于对任意 $f(x) \in \mathbb{Q}(x)$, $v(f(x))$ 等于 $f(\varphi)$ 的 p 进赋值.

(v) 非有理类型. 存在一个正无理数 r, 受约束于对任意 $f(x) \in \mathbb{Q}(x)$, $v(f(x))$ 等于 $f(p^r)$ 的 p 进赋值.

(vi) 无穷大类型. 对适当选取的 x, 如果 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$,

$$f(x) = \sum_{i,j} a_{ij} p^i x^j, \ a_{ij} = \frac{m_{ij}}{n_{ij}}, \ m_{ij}, n_{ij} \in \mathbb{Z}, \ p \nmid m_{ij}, n_{ij}, \ (m_{ij}, n_{ij}) = 1,$$

则

$$v(f) = \min_{a_{ij} \neq 0} (j, is),$$

其中 (j, is) 的序由字典序给出.

(vii) 无穷小类型. 对适当选取的 x, 如果 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$,

$$f(x) = \sum_{i,j} a_{ij} p^i x^j, \ a_{ij} = \frac{m_{ij}}{n_{ij}}, \ m_{ij}, n_{ij} \in \mathbb{Z}, \ p \nmid m_{ij}, n_{ij}, \ (m_{ij}, n_{ij}) = 1,$$

则

$$v(f) = \min_{a_{ij} \neq 0} (is, j),$$

其中 (is, j) 的序由字典序给出.

猜想 1.1 令 $K = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_r)$. 所有在 $\mathbb{Q}$ 上的限制是 $\mathbb{Q}$ 的 p 进赋值且秩为 1 的 K 的非平凡赋值 v, 都可以由在 $\mathbb{Q}$ 上代数独立的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}_{p,\mathbb{R}}$ 给出, 也即对任意 $f(x_1, \ldots, x_r) \in K$, $v(f)$ 等于 $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ 的 p 进赋值.

在第 4 节中, 对任意的 $m \leqslant n \in \mathbb{Z}$, 令 $V_{m,n}$ 为一个 $n - m + 1$ 维 $\mathbb{R}$-向量空间, 坐标指数从 m 到 n. 我们推广 $\mathbb{C}_{p,G}$ 的定义,

$$\mathbb{C}_{p,G} = \left\{ \text{良好支撑的形式和} \sum_{v \in G,\ a_v \in T} a_v p^v \right\},$$

其中 p 为素数, $G \subset V_{m,n}$ 为包含 1 的加法子群, T 是 Teichmüller 提升 $\mathbb{F}_p \to W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 的像且 $\sum_{v\in G,\ a_v\in T} a_v p^v$ 是良好支撑的, 即 $\{v \in V_{m,n} \mid a_v \neq 0\}$ 在字典序 "$\prec$" 下为 $V_{m,n}$ 的良序子集.

猜想 1.2 (i) 令 $K = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_r)$. 所有在 $\mathbb{Q}$ 上的限制是 $\mathbb{Q}$ 的 p 进赋值且秩为 n 的 K 的非平凡赋值 v, 都可以由在 $\mathbb{Q}$ 上代数独立的 $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}_{p,V_{0,n-1}}$ 给出, 也即对任意 $f(x_1, \dots, x_r) \in K$, $v(f)$ 等于 $f(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 的 p 进赋值.

(ii) $\mathbb{C}_{p,V_{m,n}}$ 是代数闭的.

2 一些基本定义及结果

关于赋值的一些已知结果可以参见 [6–8]. 首先给出赋值的高度的定义.

定义 2.1 令 K 为一个域, 如果 v 是 K 的一个赋值, 定义 v 的高度为 $\min_R \mathrm{ht}(P_v \cap R)$, 其中 R 遍历所有使得 $\mathrm{q.f.}(R) = K$ 的 K 的子环, 记它为 $\mathrm{ht}v$.

注 2.1 $P_v \cap R$ 的高度与 R 的选取有关.

例如, 令 $K = k(x, y)$, v 为一个 k- 赋值, 受约束于 $v(x) > 0$, $v(y) = 0$ 且

$$R = k[x, y] \supset R' = k[x, z],\ z = xy,$$

则

$$P_v \cap R = \{f \in R \mid v(f) > 0\} = (x), \quad \mathrm{ht}((x)) = 1,$$

但

$$P_v \cap R' = (x) \cap R' = (x, z), \quad \mathrm{ht}((x, z)) = 2.$$

定理 2.1 令 K 为一个域, v 是 K 的一个非平凡赋值. 如果 R 是 K 的一个子环, 使得 $\mathrm{q.f.}(R) = K$ 且 $\dim R = n < +\infty$, 则 $\mathrm{rank}v \leqslant \mathrm{ht}v \leqslant n$.

证明 可以从 R_v 的一个素理想的升链得到 $P_v \cap R$ 的一个素理想的升链, 从而结论易证.

令 K 为 k 的有限生成扩域, v 是 K 的一个 k-赋值. 如果 $\mathrm{tr.deg}(K/k) = 1$, 即 K 是 k 上曲线 C 的函数域, 则对于任意 v, $\mathrm{ht}v = 1$ 且 v 是由 C 的一个素除子定义, 称它为除子类型. 我们可以将它进行推广, 使得 $\mathrm{ht}v = 1$ 的赋值称为除子类型. 每个除子类型的赋值都是离散的.

其次我们给出大域 $\mathbb{C}_{p,G}$ 的定义. 以下将用到在 Archimedean 序 "$<$" 下的 $\mathbb{R}$ 的良序子集. 为方便起见, 称这些集合为 "$\mathbb{R}$ 的良序子集". 以下是这些集合的一些基本性质.

引理 2.1 令 Ω 为 $\mathbb{R}$ 的所有良序子集的集合.

(i) 如果 $\omega \in \Omega$ 且 $S \subset \mathbb{R}$ 是 ω 的所有极限点的集合, 则 $(\omega \cup S) \in \Omega$.

(ii) 如果 $\omega \in \Omega$, 则 ω 是一个可数集合.

(iii) 如果 $\omega, \omega' \in \Omega$, 则 $\omega \cup \omega' \in \Omega$.

(iv) 如果 $\omega, \omega' \in \Omega$, 则 $\omega + \omega' = \{r + r' \mid r \in \omega, r' \in \omega'\} \in \Omega$. 进一步, 对任意 $s \in \omega + \omega'$, $\{(r, r') \mid r \in \omega, r' \in \omega', r + r' = s\}$ 为有限集.

(v) 令 $\omega_n \in \Omega$ $(n = 1, 2, \dots)$ 且 $r_n = \min_{r\in\omega_n}(r), \forall n$. 如果 $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n \in \Omega$.

记 T 为 Teichmüller 提升 $\mathbb{F}_p \to W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 的像. 方便起见, 我们用以下的术语: 对形式和

$$a = \sum_{r\in\mathbb{R},\ a_r\in T} a_r p^r, \tag{1}$$

记 $\mathrm{Supp}(a) = \{r \in \mathbb{R} \mid a_r \neq 0\}$, 称为 a 的支撑; 如果 $S \subset \mathbb{R}$ 包含 $\mathrm{Supp}(a)$, 则 a 在 S 上具有支撑; 如果 $\mathrm{Supp}(a)$ 在 Archimedean 序 "$<$" 下为良序集, 说 a 是良好支撑的.

对任意加法子群 $G \subset \mathbb{R}$ 包含 1, 记

$$\mathbb{C}_{p,G} = \left\{\text{良好支撑的形式和} \sum_{r\in G,\ a_r\in T} a_r p^r\right\}, \tag{2}$$

对任意 $a = \sum_{r\in G,\ a_r\in T} a_r p^r, b = \sum_{r\in G,\ b_r\in T} b_r p^r \in \mathbb{C}_{p,G}$, 由引理 2.1, 容易看出以下和以及乘积的定义有意义:

$$a + b = \sum_{r\in G}(a_r + b_r)p^r, \tag{3}$$

$$ab = \sum_{r\in G}\ \sum_{s,t\in G,\ s+t=r}(a_s b_t)p^r. \tag{4}$$

事实上, 对 (3) 式, 令 $\omega = \mathrm{Supp}(a) \cup \mathrm{Supp}(b)$, 则右边可以看成一个和, 遍历所有 $r \in \omega$. 注意到 $a_r + b_r \in W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 可以表达成一个和 $\sum_{n=0}^{\infty} c_{rn}p^n$ $(c_{rn} \in T)$, 它由 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 来支撑. 因为 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{R}$ 的良序子集 (在 Archimedean 序下), 由引理 2.1, $\omega' = \omega + \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 是一个良序集. 对每个 $r \in \omega$, 受约束于 $r - i \notin \omega', \forall i \in \mathbb{Z}_{>0}$, 有 $\sum_{i\in\mathbb{Z}}(a_{r+i} + b_{r+i})p^i \in W(\overline{\mathbb{F}}_p)$, 因此 $a + b$ 可以唯一的表达成形式和

$$\sum_{r\in\omega',\ c_r\in T} c_r p^r. \tag{5}$$

对 (4) 式, 取 $\omega = \mathrm{Supp}(a) + \mathrm{Supp}(b)$ 来代替. 由引理 2.1, ω 和 $\omega' = \omega + \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 为良序集, 且每个 $\sum_{s,t\in G,\ s+t=r}(a_s b_t)$ 是一个有限和, 因此也可以唯一表达成 $\mathbb{C}_{p,G}$ 中的一个形式和. 容易看出以上和以及乘积的定义赋予 $\mathbb{C}_{p,G}$ 一个交换环的结构.

例 2.1 考虑 $G = \mathbb{Z}$ 的情形. 显然有典范同构

$$\mathbb{C}_{p,\mathbb{Z}} \cong W(\overline{\mathbb{F}}_p) \otimes \mathbb{Q}. \tag{6}$$

对于一般的 G, 因为 $\mathbb{Z} \subset G$, $\mathbb{C}_{p,G}$ 可以看成 $W(\overline{\mathbb{F}}_p) \otimes \mathbb{Q}$ 的一个扩环. 进一步, 容易看出 p 进赋值可以扩张到 $\mathbb{C}_{p,G}$ 上, 并且由引理 2.1(v), $\mathbb{C}_{p,G}$ 是 p 进完备的.

命题 2.1 对任意加法子群 $G \subset \mathbb{R}$ 包含 1, $\mathbb{C}_{p,G}$ 是一个域.

证明 对任意 $a \neq 0 \in \mathbb{C}_{p,G}$, 令 $a_r p^r$ 为 a 的具有最低 p 进赋值的项. 为证明 a 在 $\mathbb{C}_{p,G}$ 中有逆, 可以假定 $a_r p^r = 1$, 否则可以用 $a_r^{-1}p^{-r}a$ 来代替 a. 也可以假定 $a \neq 1$. 令 $b = 1 - a$ 且 $r = v_p(b)$ (b 的 p 进赋值). 令 $\omega = \mathrm{Supp}(b) + \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 由引理 2.1, 它为良序集. 注意到

$$\overbrace{\omega + \cdots + \omega}^{n}$$

的极小元是 nr, 因此由引理 2.1(v),

$$\omega' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overbrace{\omega + \cdots + \omega}^{n} \tag{7}$$

为良序集. 从而可以看出 $c_n = 1 + b + \cdots + b^n \in \mathbb{C}_{p,G}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 在 p 进拓扑下收敛到 $c \in \mathbb{C}_{p,G}$, 它由 ω' 来支撑. 容易看出 $ac = 1$.

定理 2.2 $\mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}$ 是代数闭的.

证明 只需证明任意非常值首一多项式 $f(x) \in O_{\mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}}[x]$ 在 $O_{\mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}}$ 中有零点.

我们记 $f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$. 令 $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_n$ 为 f 的 Newton 斜率. 如果 $r_n \neq \infty$(也即 $f(0) \neq 0$), 取 m 为使得 $r_m = r_n$ 的最小整数. 令 a_mp^s 为 c_m 的主项, 也即具有最小赋值 s 的非零项. 对任意 $i > m$, 令 a_i 为 $p^{s+r_n(i-m)}$ 在 c_i 中的系数 (注意到 c_i 没有赋值小于 $s + r_n(i-m)$ 的非零项). 取 $a_mx^{n-m} + a_{m+1}x^{n-m+1} + \cdots + a_n$ 在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 中的一个零点 α 且令 $a = T(\alpha)$. 令 $g(x) = f(x - ap^{r_n})$, $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n$ 为 g 的 Newton 斜率, 则 $r_i \leqslant s_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 且 $r_n < s_n$.

现在用超限归纳法, 对于每个基数小于 $\aleph$ 的序数 λ 来构造一个元 $a_\lambda \in O_{\mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}}$, 使得:

(i) 对每个 λ, a_λ 的每个非零项的赋值小于 $f(-a_\lambda)$ 的最大 Newton 斜率;

(ii) 对任意两个序数 $\lambda \prec \mu$, $a_\mu - a_\lambda$ 的每个非零项的赋值小于 a_λ 的每个非零项的赋值;

(iii) 对任意两个序数 $\lambda \prec \mu$, $f(x - a_\lambda)$ 的每个 Newton 斜率不大于对应的 $f(x - a_\mu)$ 的 Newton 斜率, 并且如果 $f(a_\lambda) \neq 0$, 则 $f(x - a_\lambda)$ 的最大 Newton 斜率小于 $f(x - a_\mu)$ 的最大 Newton 斜率.

(iv) 对任意两个序数 $\lambda \prec \mu$, $a_\mu = a_\lambda$ 当且仅当 $f(a_\lambda) = 0$.

如果 μ 是一个后继, 令 μ 是 λ 的一个后继且 $f(a_\lambda) \neq 0$. 令 r 为 $f(x - a_\lambda)$ 的最大 Newton 斜率, 则由上, 可以取 $b \in T$, 使得 $f(x - a_\lambda - bp^r)$ 的最大 Newton 斜率大于 r. 取 $a_\mu = a_\lambda + bp^r$, 容易看出以上 (i)–(iv) 仍然成立.

如果 μ 是一个极限, 令 S 是所有使得 $\lambda \prec \mu$ 的 a_λ 的集合, 且令 a 为 S 的所有项的形式和. 不难看出 $a \in O_{\mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}}$. 如果 $f(a) = 0$, 取 $a_\mu = a$; 否则取 $a_\mu = a + bp^r$, 其中 r 为 $f(x - a)$ 的最大 Newton 斜率, $b \in T$ 使得 $f(x - a - bp^r)$ 的最大 Newton 斜率大于 r. 容易看出以上 (i)–(iv) 仍然成立.

令 α_0 为基数大于 $\aleph_0$ 的最小序数, 则存在 $\alpha \prec \alpha_0$, 使得 $a_\lambda = a_{\lambda_0}$, 否则 a_{λ_0} 有非可数多个项, 和引理 2.1 矛盾. 这证明了 a_{λ_0} 是 f 在 $O_{\mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}}$ 中的一个零点.

因为 $\mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}$ 是 p 进完备且代数闭的, 故有

推论 2.1 $\mathbb{C}_p$ 可以典范的看成 $\mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}$ 的一个子域, 其中 $\mathbb{C}_p$ 为 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 的完备化.

注 2.2 $\mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}$ 比 $\mathbb{C}_p$ 大得多. 事实上, 如果 $a \in \mathbb{C}_p$, 则 $\mathrm{Supp}(a)$ 的每个极限在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 中.

例 2.2 令 K 为 $\mathbb{Q}$ 的有限生成扩域. $K \hookrightarrow \mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}$ 给出 K 的一个赋值 v 满足:

(i) v 取值在 $\mathbb{Q}$ 中,

(ii) $\mathrm{ht}v$ 极大, 也即 $\mathrm{ht}v = \mathrm{tr.deg}(K/\mathbb{Q}) + 1$.

3 算术曲面上的非平凡赋值

令 K 为 $\mathbb{Q}$ 的有限生成扩域, $\mathrm{tr.deg}(K/\mathbb{Q}) = 1$. 令 R 为 1 维整闭整环, $\mathrm{q.f.}(R) = K$. 令 C 为 $\mathrm{Spec}R$ 上的光滑平坦仿射概型, 具有相对维数 1 且几何整纤维, 也即 C 是函数域为 K 的算术曲面.

在本节中, 我们对 K 的所有赋值进行分类. 令 v 为 K 的一个非平凡赋值, R_v 为赋值环, G_v 为全序群. 对任意超越的 $x \in K$, K 在 $\mathbb{Q}(x)$ 上是代数闭的, 则 v 是 $\mathbb{Q}(x)$ 上某个赋值 w 的扩张, 因此一般情形可以约化为 K 是 $\mathbb{Q}$ 的 1 维纯超越扩张的情形.

单射 $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}$ 诱导 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的一个取值在 $\mathbb{Q}$ 中的赋值. $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 可迁的作用在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的所有 p 进赋值上, 也即 $\mathbb{Q}$ 的 p 进赋值的扩张, 因此 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的所有 p 进赋值可以由单射 $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}$ 来诱导. $\mathbb{Q}(x)$ 上的任一赋值是 $\overline{\mathbb{Q}}(x)$ 上某个赋值的限制.

如果

$$m_v \cap \mathbb{Z} = 0,$$

则有 $\mathbb{Q} \subseteq R_v$, 因此它是 K 的一个 $\mathbb{Q}$- 赋值, 并且可以约化为 1 维除子类型 (水平除子类型), 存在 K 的一个子环 R, 使得 $\mathrm{q.f.}(R) = K$. 令 $P = P_v \cap R = \{f \in R \mid v(f) > 0\}$, 则 $\mathrm{ht}P = 1$ 且 $R_v = R_P$ 为离散赋值环. 换句话说, 令 F 为 $\mathbb{Q}$ 在 K 中的代数闭包, 存在 F 上的一个光滑仿射曲线 C 以及一个同构 $\varphi : F(C) \to K$, 使得 v 由 C 的一个素除子给出.

如果

$$m_v \cap \mathbb{Z} = (p),$$

其中 p 是一个素数, $v(p) = s$, 则 v 在 $\mathbb{Q}$ 上的限制是 $\mathbb{Q}$ 的一个 p 进赋值. 此时赋值的完整分类如下:

1. $\mathrm{ht}v = 1$ (垂直除子类型)

在这种情形中, 存在 K 的一个子环 R, 使得 $R \supseteq (p)$ 且 $\mathrm{q.f.}(R) = K$. 令 $P = P_v \cap R = \{f \in R \mid v(f) > 0\}$, 则 $\mathrm{ht}P = 1$ 且 $R_v = R_P$ 为离散赋值环.

2. $\mathrm{ht}v = 2$ 且 $G_v \cong \mathbb{Z}$ (Witt 类型)

存在 $x \in K$, 使得 $K = \mathbb{Q}(x)$ 且 $v(x) \in \mathbb{N}$. 令 U 为所有次数不被 p 整除的单位根的集合, 且 K' 为 K 和 U 生成的域, 则存在 K' 的一个子环 W, 使得 $K' = \mathrm{q.f.}(W[x])$. W 在 $\mathbb{Z}$ 上整且包含 U, 因为 $\mathbb{Z}$ 在 K' 中的闭包包含 U. 令 P 为 $W[x]$ 的极大理想, 使得 $P \supseteq (p, x)$. 因为 $\mathbb{Z}[x]/(p, x) \supseteq \mathbb{F}_p$ 且 $W[x]/P$ 是 $\mathbb{F}_p$ 的有限扩张, 所以 $W[x]/P \cong \overline{\mathbb{F}}_p$.

令 $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 为 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 的 Witt 环, 则 $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 是一个离散赋值环且 $W(\overline{\mathbb{F}}_p)/(p) \cong \overline{\mathbb{F}}_p$. 我们仍记 $T : \overline{\mathbb{F}}_p \to W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 为 Teichmüller 提升.

如果 R 是 K' 的一个子环, 则对于 R 的任意极大理想 P, R/P 是 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 的代数扩张, 因此 $R/P \cong \overline{\mathbb{F}}_p$.

令

$$R_1 = W\left[\frac{x}{p^{1/s}}\right] \supset W[x], \quad P_1 = \{f \in R_1 \mid v(f) > 0\},$$

可以取 $a_1' \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $T(a_1') = a_1 \in T$, 使得

$$\frac{x}{p^{1/s}} - a_1 = \frac{x - a_1 p^{1/s}}{p^{1/s}} \in P_1,$$

则

$$v\left(\frac{x - a_1 p^{1/s}}{p^{1/s}}\right) > 0, \quad v\left(\frac{x - a_1 p^{1/s}}{p^{2/s}}\right) \geqslant 0.$$

令

$$R_2 = W\left[\frac{x - a_1 p^{1/s}}{p^{2/s}}\right] \supset R_1, \quad P_2 = \{f \in R_2 \mid v(f) > 0\},$$

则可以取 $a_2' \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $T(a_2') = a_2 \in T$, 使得

$$\frac{x - a_1 p^{1/s}}{p^{2/s}} - a_2 = \frac{x - a_1 p^{1/s} - a_2 p^{2/s}}{p^{2/s}} \in P_2,$$

则

$$v\left(\frac{x-a_1p^{1/s}-a_2p^{2/s}}{p^{2/s}}\right)>0,\quad v\left(\frac{x-a_1p^{1/s}-a_2p^{2/s}}{p^{3/s}}\right)\geqslant 0.$$

按照同样的方式继续下去, 得到数

$$\varphi=a_1p^{1/s}+a_2p^{2/s}+\cdots. \tag{8}$$

命题 3.1 φ 在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的.

证明 假设存在 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$, $f\neq 0$, 使得 $f(\varphi)=0$. 令 $v(f)=n$,

$$\varphi_n=\sum_{i=1}^{n}a_ip^{i/s}$$

且 $g\in\mathbb{Q}[x]$, 使得

$$f(x)-f(\varphi_n)=(x-\varphi_n)g(x),$$

$$f(\varphi)-f(\varphi_n)=(\varphi-\varphi_n)g(\varphi).$$

我们有

$$v(f(x)-f(\varphi_n))\geqslant v(x-\varphi_n)>n,$$

$$v(f(\varphi_n))\geqslant v(\varphi-\varphi_n)>n,$$

则 $v(f(x))\geqslant\min\{v(f(\varphi_n)),v(f(x)-f(\varphi_n))\}>n$, 矛盾.

定义 3.1 对任意 $f(x)\in\mathbb{Q}(x)$, 可以定义赋值 v_φ, 使得 $v_\varphi(f)$ 为 $f(\varphi)$ 的 p 进赋值.

命题 3.2 v_φ 和 v 等价.

证明 只需证明对任意 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 如果

$$f(\varphi)=\sum_{i=r}^{+\infty}c_ip^i,\quad c_r\neq 0,$$

则 $v(f)=r$. 令

$$\varphi_n=\sum_{i=1}^{n}a_ip^{i/s}$$

且 $n\gg 0$, 使得

$$v(f(x)-f(\varphi_n))>r,$$

$$v(f(\varphi_n))=v(f(\varphi))=r.$$

我们有

$$v(f(x))=\min\{v(f(\varphi_n)),v(f(x)-f(\varphi_n))\}=r.$$

3. $\mathrm{ht}v=2$, 且 $G_v\ncong\mathbb{Z}$ (有理非离散类型)

存在 $x\in K$, 使得 $K=\mathbb{Q}(x)$ 且 $v(x)=r_1\in(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})_+$, 也即 $r_1\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ 且 $r_1>0$. 令

$$r=\sup_{a\in\overline{\mathbb{Q}}}(v(x-a)),$$

$$\varphi=\lim_{a\in\overline{\mathbb{Q}},v(x-a)\to r}a,$$

则 φ 在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的, 且 $\varphi\in\mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}$.

定义 3.2 对任意 $f(x)\in\mathbb{Q}(x)$, 可以定义赋值 v_φ, 使得 $v_\varphi(f)$ 为 $f(\varphi)$ 的 p 进赋值.

命题 3.3 v_φ 和 v 等价.

证明 只需证明对任意首一多项式 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$, $v=v_\varphi$. 令

$$f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n).$$

对任意 i, $v(x-a_i)<r$, 则存在 $\beta\in\overline{\mathbb{Q}}$, 使得 $v(x-a_i)<v(x-\beta)$ 且 $v(\beta-a_i)=v(\varphi-a_i)$, 因此 $v(\beta-a_i)=v(x-a_i)$ 且 $v(f)=v(f(\beta))=v(f(\varphi))$.

4. $\mathrm{ht}v=2$, $G_v\nsubseteq\mathbb{Q}$ 且 $G_v\subseteq\mathbb{R}$ (非有理类型)

存在 $x\in K$, 使得 $K=\mathbb{Q}(x)$, $v(x)=rs\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})_+$. 令

$$\varphi=p^r. \tag{9}$$

命题 3.4 φ 在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的.

证明 假设存在 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$,

$$f(x)=\sum_{i,j}a_{ij}p^ix^j,\ a_{ij}=\frac{m_{ij}}{n_{ij}},\ m_{ij},n_{ij}\in\mathbb{Z},\ (m_{ij},n_{ij})=1,\ p\nmid m_{ij},n_{ij},$$

使得 $f(p^r)=0$.

如果 $i_1+j_1r=i_2+j_2r$ 且 $j_1\neq j_2$, 则

$$r=\frac{i_2-i_1}{j_1-j_2}\in\mathbb{Q}.$$

由

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}a_{ij}p^{i+jr}=0&\Longrightarrow a_{ij}p^{i+jr}=0,\ \forall\, i,j\\&\Longrightarrow a_{ij}=0,\ \forall\, i,j\Longrightarrow f=0.\end{aligned}$$

因此 φ 在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的.

定义 3.3 对任意 $f(x)\in\mathbb{Q}(x)$, 我们可以定义赋值 v_φ, 使得 $v_\varphi(f)$ 为 $f(\varphi)$ 的 p 进赋值.

命题 3.5 v_φ 和 v 等价.

证明 $v_\varphi(p)=1$, $v_\varphi(x)=r$, 因此 v 可以由 φ 来定义.

5. $\mathrm{rank}v=2$

存在 $x\in K$, 使得 $K=\mathbb{Q}(x)$, $v(x)>0$. $G_v\cong\mathbb{Z}\bigoplus\mathbb{Z}$, 它的序由字典序给出. 对适当选取的 x, 如果 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$,

$$f(x)=\sum_{i,j}a_{ij}p^ix^j,\ a_{ij}=\frac{m_{ij}}{n_{ij}},\ m_{ij},n_{ij}\in\mathbb{Z},\ p\nmid m_{ij},n_{ij},\ (m_{ij},n_{ij})=1,$$

我们有两种情形:

(i) 无穷大类型. $v(x)\gg v(p)$, 则

$$v(f)=\min_{a_{ij}\neq0}(j,is).$$

(ii) 无穷小类型. $v(x)\ll v(p)$, 则

$$v(f)=\min_{a_{ij}\neq0}(is,j).$$

定理 3.1 函数域为 K 的算术曲面上的所有非平凡赋值可以分为 7 种类型:

(i) 水平除子类型. v 是 K 的一个 $\mathbb{Q}$- 赋值, 则存在 K 的一个子环 R, 使得 $\mathrm{q.f.}(R)=K$. 令 $P=P_v\cap R=\{f\in R\mid v(f)>0\}$, 则 $\mathrm{ht}P=1$ 且 $R_v=R_P$ 为离散赋值环. 换句话说, 令 F

为 $\mathbb{Q}$ 在 K 中的代数闭包, 存在 F 上的一个光滑仿射曲线 C, 以及一个同构 $\varphi: F(C)\to K$. v 由 C 的一个素除子给出.

在以下的 6 种情形中, 存在一个素数 p, s.t. v 在 $\mathbb{Q}$ 上的限制是 $\mathbb{Q}$ 的一个 p 进赋值且 $v(p)=s$.

(ii) 垂直除子类型. $\mathrm{ht}v=1$, 则存在 K 的一个子环 R s.t. $R\supseteq(p)$ 且 $\mathrm{q.f.}(R)=K$. 令 $P=P_v\cap R=\{f\in R\mid v(f)>0\}$, 则 $\mathrm{ht}P=1$ 且 $R_v=R_P$ 是一个离散赋值环.

(iii) Witt 类型. $\mathrm{ht}v=2$ 且 $G_v\cong\mathbb{Z}$, 则存在 $x\in K$, 使得 $[K:\mathbb{Q}(x)]<+\infty$ 且 $v(x)\in\mathbb{N}$. v 可以由一个超越数

$$\varphi=a_1p^{1/s}+a_2p^{2/s}+\cdots,\ a_i\in T,\ \forall i$$

来决定, 也即对任意 $f(x)\in\mathbb{Q}(x)$, $v(f(x))$ 等于 $f(\varphi)$ 的 p 进赋值.

(iv) 有理非离散类型. $\mathrm{ht}v=2$, $G_v\subseteq\mathbb{Q}$ 且 $G_v\ncong\mathbb{Z}$, 则存在 $x\in K$ s.t. $[K:\mathbb{Q}(x)]<+\infty$ 且 $v(x)=r_1\in(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})_+$. v 可以由一个超越数

$$\varphi=\sum_{r\in\mathbb{Q},\ a_r\in T}a_rp^r\in\mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}$$

来决定, 也即对任意 $f(x)\in\mathbb{Q}(x)$, $v(f(x))$ 等于 $f(\varphi)$ 的 p 进赋值.

(v) 非有理类型. $\mathrm{ht}v=2$, $G_v\subseteq\mathbb{R}$ 且 $G_v\not\subseteq\mathbb{Q}$, 则存在 $x\in K$, s.t. $[K:\mathbb{Q}(x)]<+\infty$ 且 $v(x)=rs\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})_+$. v 可以由一个正无理数 r 来决定, 也即对任意 $f(x)\in\mathbb{Q}(x)$, $v(f(x))$ 等于 $f(p^r)$ 的 p 进赋值.

(vi) 无穷大类型. $\mathrm{rank}v=2$ 且存在 $x\in K$ s.t. $[K:\mathbb{Q}(x)]<+\infty$, $v(x)\gg v(p)$, 则 $G_v\cong\mathbb{Z}\bigoplus\mathbb{Z}$, 它的序由字典序给出. 对适当选取的 x, 如果 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$,

$$f(x)=\sum_{i,j}a_{ij}p^ix^j,\ a_{ij}=\frac{m_{ij}}{n_{ij}},\ m_{ij},n_{ij}\in\mathbb{Z},\ p\nmid m_{ij},n_{ij},\ (m_{ij},n_{ij})=1,$$

则

$$v(f)=\min_{a_{ij}\neq0}(j,is).$$

(vii) 无穷小类型. $\mathrm{rank}v=2$ 且存在 $x\in K$ s.t. $[K:\mathbb{Q}(x)]<+\infty$, $0<v(x)\ll v(p)$, 则 $G_v\cong\mathbb{Z}\bigoplus\mathbb{Z}$, 它的序由字典序给出. 对适当选取的 x, 如果 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$,

$$f(x)=\sum_{i,j}a_{ij}p^ix^j,\ a_{ij}=\frac{m_{ij}}{n_{ij}},\ m_{ij},n_{ij}\in\mathbb{Z},\ p\nmid m_{ij},n_{ij},\ (m_{ij},n_{ij})=1,$$

则

$$v(f)=\min_{a_{ij}\neq0}(is,j).$$

证明 根据 $\mathrm{ht}v$, $\mathrm{rank}v$ 以及全序群 G_v 对 K 的所有非平凡赋值 v 进行分类. 因为 v 是非平凡的, 故有

$$1\leqslant\mathrm{rank}v\leqslant\mathrm{ht}v\leqslant2.$$

(i) 水平除子类型. 如果 v 是 K 的一个 $\mathbb{Q}$- 赋值, 则存在 K 的一个子环 R, 使得 $\mathrm{q.f.}(R)=K$. 令 $P=P_v\cap R=\{f\in R\mid v(f)>0\}$, 则 $\mathrm{ht}P=1$ 且 $R_v=R_P$ 为离散赋值环. 换句话说, 令 F 为 $\mathbb{Q}$ 在 K 中的代数闭包, 存在 F 上的一个光滑仿射曲线 C 以及一个同构 $\varphi: F(C)\to K$, 使得 v 由 C 的一个素除子给出.

在以下的 6 种情形中, v 在 $\mathbb{Q}$ 上的限制是 $\mathbb{Q}$ 的一个 p 进赋值, 其中 p 为素数, 且 $v(p)=s$.

(ii) 垂直除子类型. 如果 $\mathrm{ht}v=1$, 则存在 K 的一个子环 R s.t. $R\supseteq(p)$ 且 $\mathrm{q.f.}(R)=K$. 令 $P=P_v\cap R=\{f\in R\mid v(f)>0\}$, 则 $\mathrm{ht}P=1$ 且 $R_v=R_P$ 是一个离散赋值环.

以下假定 $\mathrm{ht}v=2$.

(iii) 无穷大类型. 如果 $\mathrm{rank}v=2$ 且存在 $x\in K$ s.t. $[K:\mathbb{Q}(x)]<+\infty$, $v(x)\gg v(p)$, 则 $G_v\cong\mathbb{Z}\bigoplus\mathbb{Z}$, 它的序由字典序给出. 对适当选取的 x, 如果 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$,

$$f(x)=\sum_{i,j}a_{ij}p^ix^j,\ a_{ij}=\frac{m_{ij}}{n_{ij}},\ m_{ij},n_{ij}\in\mathbb{Z},\ p\nmid m_{ij},n_{ij},\ (m_{ij},n_{ij})=1,$$

则

$$v(f)=\min_{a_{ij}\neq0}(j,is).$$

(iv) 无穷小类型. 如果 $\mathrm{rank}v=2$ 且存在 $x\in K$ s.t. $[K:\mathbb{Q}(x)]<+\infty$, $0<v(x)\ll v(p)$, 则 $G_v\cong\mathbb{Z}\bigoplus\mathbb{Z}$, 它的序由字典序给出. 对适当选取的 x, 如果 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$,

$$f(x)=\sum_{i,j}a_{ij}p^ix^j,\ a_{ij}=\frac{m_{ij}}{n_{ij}},\ m_{ij},n_{ij}\in\mathbb{Z},\ p\nmid m_{ij},n_{ij},\ (m_{ij},n_{ij})=1,$$

则

$$v(f)=\min_{a_{ij}\neq0}(is,j).$$

以下假定 $\mathrm{rank}v=1$, 也即 G_v 可以嵌入 $\mathbb{R}$ 作为一个有序加法子群. 简单起见, 我们可以假定 $G_v\subseteq\mathbb{R}$.

(v) 非有理类型. 如果 $G_v\nsubseteq\mathbb{Q}$, 则存在 $x\in K$, s.t. $[K:\mathbb{Q}(x)]<+\infty$ 且 $v(x)=rs\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})_+$. 由命题 3.5, v 可以由一个正无理数 r 来决定, 也即对任意 $f(x)\in\mathbb{Q}(x)$, $v(f(x))$ 等于 $f(p^r)$ 的 p 进展开式中最低次项的次数. 换句话说, $v(f(x))$ 等于 $f(p^r)$ 的 p 进赋值.

以下假定 $G_v\subseteq\mathbb{Q}$.

(vi) Witt 类型. 如果 $G_v\cong\mathbb{Z}$, 则存在 $x\in K$, 使得 $[K:\mathbb{Q}(x)]<+\infty$ 且 $v(x)\in\mathbb{N}$. 由命题 3.2, v 可以由一个超越数

$$\varphi=a_1p^{1/s}+a_2p^{2/s}+\cdots\ (a_i\in T,\ \forall\ i)$$

来决定, 也即对任意 $f(x)\in\mathbb{Q}(x)$, $v(f(x))$ 等于 $f(\varphi)$ 的 p 进展开式中最低次项的次数. 换句话说, $v(f(x))$ 等于 $f(\varphi)$ 的 p 进赋值.

我们现在只剩情形

(vii) 有理非离散类型. 如果 $G_v\subseteq\mathbb{Q}$ 但 $G_v\ncong\mathbb{Z}$, 则存在 $x\in K$ s.t. $[K:\mathbb{Q}(x)]<+\infty$ 且 $v(x)=r_1\in(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})_+$. 由命题 3.3, v 可以由一个超越数

$$\varphi=\sum_{r\in\mathbb{Q},\ a_r\in T}a_rp^r\in\mathbb{C}_{p,\mathbb{Q}}$$

来决定, 也即对任意 $f(x)\in\mathbb{Q}(x)$, $v(f(x))$ 等于 $f(\varphi)$ 的 p 进展开式中最低次项的次数. 换句话说, $v(f(x))$ 等于 $f(\varphi)$ 的 p 进赋值.

因此算术曲面上的所有非平凡赋值可以分为 7 种不同类型.

注 3.1 令 $K=\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_r)$. 如果取 $\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{C}_{p,\mathbb{R}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上代数独立, 则可以定义 K 的一个赋值 v, 使得对任意 $f(x_1,\dots,x_r)\in K$, $v(f)$ 等于 $f(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ 的 p 进赋值.

猜想 3.1 令 $K=\mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_r)$. 所有在 $\mathbb{Q}$ 上的限制是 $\mathbb{Q}$ 的 p 进赋值且秩为 1 的 K 的非平凡赋值 v 都可以由以上方式给出.

注 3.2 当 $r=1$ 时, 所有的 3 种类型: (i) $G_v\cong\mathbb{Z}$, (ii) $G_v\subseteq\mathbb{Q}$ 但 $G_v\ncong\mathbb{Z}$, (iii) $G_v\subseteq\mathbb{R}$ 但 $G_v\nsubseteq\mathbb{Q}$, 都可以由某个 $\alpha\in\mathbb{C}_{p,\mathbb{R}}$ 给出, 因此当 $r=1$ 时猜想成立.

4 一些推广

我们将以上关于 $\mathbb{C}_{p,G}$ 的定义进行推广. 对任意 $m\leqslant n\in\mathbb{Z}$, 令 $V_{m,n}$ 为 $n-m+1$ 维 $\mathbb{R}$-向量空间, 坐标指数从 m 到 n. 如果 $m\leqslant m'\leqslant n'\leqslant n$, 则将 $V_{m',n'}$ 等同于 $V_{m,n}$ 的子空间 $\{(a_m,\ldots,a_n)\in V_{m,n}\mid a_i=0$ 若 $i<m'$ 或 $i>n'\}$. 进一步地, 如果 $m\leqslant 0\leqslant n$, 则将 $\mathbb{R}$ 等同于 $V_{0,0}\subset V_{m,n}$. 我们定义 $V_{m,n}$ 的序 "$\prec$" 为字典序, 也即对任意 $(a_m,\ldots,a_n),(b_m,\ldots,b_n)\in V_{m,n}$, 如果对某个 i, $a_i<b_i$ 且对任意 $j>i$, $a_j=b_j$, 则 $(a_m,\ldots,a_n)\prec(b_m,\ldots,b_n)$. 这给出了 $V_{m,n}$ 一个有序加法 Abel 群的结构.

引理 4.1 令 Ω 为 $V_{m,n}$ 的在 $\prec$ 下的所有良序子集的集合.

(i) 如果 $\omega\in\Omega$ 且 $S\subset V_{m,n}$ 是 ω 的所有极限点的集合, 则 $(\omega\cup S)\in\Omega$.

(ii) 如果 $\omega\in\Omega$, 则 ω 是一个可数集合.

(iii) 如果 $\omega,\omega'\in\Omega$, 则 $\omega\cup\omega'\in\Omega$.

(iv) 如果 $\omega,\omega'\in\Omega$, 则 $\omega+\omega'=\{v+v'\mid v\in\omega,v'\in\omega'\}\in\Omega$. 进一步, 对任意 $w\in\omega+\omega'$, $\{(v,v')\mid v\in\omega,v'\in\omega',v+v'=w\}$ 为有限集.

(v) 令 $\{\omega_i\mid i\in I\}\subset\Omega$ 且 $v_i=\min_{v\in\omega_i}(v),\forall i\in I$. 令 $\omega=\bigcup_{i\in I}\omega_i$. 如果对任意 $v\in\omega$, 只有有限多个 $i\in I$ 使得 $v_i\prec v$, 则 $\omega\in\Omega$. 特别地, 对任意 $\omega_n\in\Omega$ $(n=1,2,\ldots)$, 记 $v_n=\min_{v\in\omega_n}(v),\forall n$. 如果 $\lim_{n\to\infty}v_n=(+\infty,\ldots,+\infty)$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n\in\Omega$.

我们容易把形式和的概念推广到 $\sum_{v\in V_{m,n},a_v\in T}a_vp^v$, 以及把支撑、具有支撑的、和良好支撑的概念进行推广. 假定 $m\leqslant 0\leqslant n$. 对任意包含 1 的加法子群 $G\subset V_{m,n}$, 记

$$\mathbb{C}_{p,G}=\left\{\text{良好支撑的形式和}\sum_{v\in G,\ a_v\in T}a_vp^v\right\}.\tag{10}$$

注意到, 在 $\mathbb{C}_{p,G}$ 中有一个赋值 ν 取值在 G 中, 且由引理 4.1(v), $\mathbb{C}_{p,G}$ 是 ν 进完备的. 从引理 4.1 我们得到

命题 4.1 假定 $m\leqslant 0\leqslant n$. 对任意包含 1 的加法子群 $G\subset V_{m,n}$, $\mathbb{C}_{p,G}$ 有一个自然的交换环的结构, 并且是一个域.

证明 对第 1 个断言, 我们可以简单的仿照 $V_{m,n}=\mathbb{R}$ 的情形. 我们现在证明第 2 个断言.

和命题 2.1 的证明一样, 我们可以约化为证明 $a=1-b$ 在 $\mathbb{C}_{p,G}$ 中有逆, 其中 b 的赋值 $\nu(b)>0$. 令 b_vp^v 为 b 的项, 受约束于 $v=\nu(b)$. 记 $v=(a_m,\ldots,a_n)$, 则存在 $i\in[m,n]$, s.t. $a_i>0$ 且 $a_j=0,\forall j>i$, 也即 $v\in V_{m,i}$. 令 b' 为 b 的所有指标在 $V_{m,i}$ 中的项的和, 则由引理 4.1(v), 我们看出 $1+b'+\ldots+b'^n\in\mathbb{C}_{p,G}$ $(n=1,2,\ldots)$ 收敛到 $c'\in\mathbb{C}_{p,G}$, 且 $(1-b')c'=1$. $1-ac'$ 没有指标在 $V_{m,i}$ 中的项. 用 ac' 来代替 a 并且重复以上讨论. 由归纳法, 经过有限步得到 a 的一个在 $\mathbb{C}_{p,G}$ 中的逆.

注 4.1 令 $K=\mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_r)$. 如果取 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in\mathbb{C}_{p,V_{0,n-1}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上代数独立, 则可以定义 K 的一个赋值 v, 使得对任意 $f(x_1,\ldots,x_r)\in K$, $v(f)$ 等于 $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ 的 p 进赋值.

猜想 4.1 (i) 令 $K=\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_r)$. 所有在 $\mathbb{Q}$ 上的限制是 $\mathbb{Q}$ 的 p 进赋值且秩为 n 的 K 的非平凡赋值 v 都可以由以上方式给出.

(ii) $\mathbb{C}_{p,V_{m,n}}$是代数闭的.

致谢 诚挚地感谢李克正教授对我的鼓励以及与我进行的有益讨论.

参考文献

1 Roquette P. History of valuation theory Part I. Fields Institute Communication Series. http://2002-rzuser.uni-heidelberg.de

2 Herrera F J, Olalla-Acosta M A, Vicente J L. Valuations in fields of power series. *Rev Mat Iberoamericana*, **19**: 467–482 (2003)

3 Olalla-Acosta M A. On the dimension of discrete valuations of $k((X_1,\dots,X_n))$. *CR Acad Sci Paris Serie I*, **333**(1): 27–32 (2001); arXiv: math.AC/001109601

4 Herrera F J, Olalla-Acosta M A, Vicente J L. Rank one discrete valuations of $k((X_1,\dots,X_n))$. *Comm Algebra*, **35**: 2533–2551 (2001); arXiv: math/060522503

5 Green B. Automorphisms of formal power series rings over a valuation ring. Fields Institute Communications, International Conference and Workshop on Valuation Theory, July 26-August 11, 1999

6 Endler O. Valuation Theory. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1972, 81–82

7 莫宗坚, 蓝以中, 赵春来等. 代数学下册. 北京: 北京大学出版社, 1986, 92–107

8 李克正. 交换代数和同调代数. 北京: 科学出版社, 1998