

广义 Cantor 集的自相似性

孔德荣

扬州大学数学科学学院, 扬州 225002
E-mail: derongkong@126.com

收稿日期: 2013-07-13; 接受日期: 2014-05-04

国家自然科学基金 (批准号: 11326207 和 10971069)、教育部留学回国人员科研启动基金 (批准号: 202100019)、江苏省青年科学基金 (批准号: BK20130433) 和扬州大学创新培育基金 (批准号: 2013CNJ004) 资助项目

摘要 本文考虑一类广义 Cantor 集

$$\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} d_n \beta^n : d_n \in D_n, n \geq 1 \right\}$$

的自相似性, 其中 $0 < \beta < 1$ 且对任意的 $n \geq 1$, D_n 为整数集 $\mathbb{Z}$ 的非空有限子集; 并且给出 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 为齐次生成自相似集的充分必要条件. 作为应用, 本文考虑一类广义 Cantor 集交的自相似性, 部分推广了 Li, Yao 和 Zhang (2011) 关于自相似性的结果.

关键词 广义 Cantor 集 自相似集 强最终周期 迭代函数系统

MSC (2010) 主题分类 28A78, 37B10

1 引言

给定整数 d , 我们定义压缩映射 ϕ_d 如下:

$$\phi_d(x) = \beta(x + d), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

其中 $0 < \beta < 1$. 令 $\mathbb{Z}^\infty$ 表示由所有无穷序列 $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ 构成的集合, 其中 $d_n \in \mathbb{Z}$. 我们定义编码映射 $\pi: \mathbb{Z}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$\pi(\{d_n\}_{n=1}^\infty) := \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_{d_1} \circ \cdots \circ \phi_{d_m}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \beta^n. \quad (1.2)$$

对任意的 $n \geq 1$, 我们令 D_n 为 $\mathbb{Z}$ 的非空有限子集, 并令 $\mathcal{D} = \bigotimes_{n=1}^\infty D_n$ 表示所有无穷序列 $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ 构成的集合, 其中 $d_n \in D_n$ 对所有的 $n \geq 1$ 都成立. 下面定义 $\mathcal{D}$ -型广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 为 $\mathcal{D}$ 在编码映射 π 下的像集, 即

$$\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} := \pi(\mathcal{D}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} d_n \beta^n : d_n \in D_n \text{ 对所有的 } n \geq 1 \text{ 成立} \right\}. \quad (1.3)$$

我们假定符号集 D_n ($n \geq 1$) 一致有界, 即

$$\sup\{|d| : d \in D_n, n \geq 1\} < +\infty. \quad (1.4)$$

我们同样可以通过几何的方法来解释 $\mathcal{D} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D_n$ -型广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$. 为了说明其几何构造, 我们令

$$\gamma_{\mathcal{D}} := \inf\{d : d \in D_n, n \geq 1\}, \quad \lambda_{\mathcal{D}} := \sup\{d : d \in D_n, n \geq 1\}.$$

根据 (1.4), 我们有 $\gamma_{\mathcal{D}} > -\infty, \lambda_{\mathcal{D}} < \infty$. 从而所有的符号集 $D_n \subseteq \{\gamma_{\mathcal{D}}, \gamma_{\mathcal{D}} + 1, \dots, \lambda_{\mathcal{D}}\}, n \geq 1$. 首先, 我们定义基本区间 $F_0 = [\gamma_{\mathcal{D}}\beta/(1-\beta), \lambda_{\mathcal{D}}\beta/(1-\beta)]$. 然后, 归纳地定义

$$F_n = \bigcup_{d \in D_n} \phi_d(F_{n-1}),$$

其中 ϕ_d 是 (1.1) 中定义的压缩映射. 显然, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个单调递减的紧集序列. 此时, 广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 可表示为

$$\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n.$$

例如, 令 $\beta = 1/5, D_1 = \{0, 2\}, D_2 = \{1, 2\}$, 且当 $n \geq 3$ 时 $D_n = \{0, 1, 2\}$, 则 $\gamma_{\mathcal{D}} = 0, \lambda_{\mathcal{D}} = 2$. 图 1 中描绘了广义 Cantor 集 $\Gamma_{1/5, \mathcal{D}}$ 构造过程中的前四层 $F_0, \dots, F_3$.

映射 $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 称为自相似映射, 如果存在 $r, 0 < |r| < 1, b \in \mathbb{R}$ 使得 $S(x) = rx + b$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}$ 都成立, 这里 r 称为 S 的压缩比. 若 $\{S_j(x) = r_jx + b_j : j \in J\}$ 是一组自相似压缩映射, 其中 J 为有限指标集, 则存在唯一的紧集 Λ 满足

$$\Lambda = \bigcup_{j \in J} S_j(\Lambda).$$

该紧集 Λ 称为由迭代函数系统 (IFS) $\{S_j : j \in J\}$ 生成的自相似集. 特别地, 若对所有的 $i, j \in J$ 都有 $r_i = r_j$, 则称 Λ 为齐次生成的自相似集.

对 Cantor 集平移的研究一直以来受到数学很多领域的科研工作者的关注^[1-7]. 最近, 邓国泰等人^[8]研究了经典三分 Cantor 集平移的自相似. 事实上, 他们给出了 $\mathcal{D} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D_n$ -型广义 Cantor 集 $\Gamma_{1/3, \mathcal{D}}$ 为自相似集的刻画, 其中 D_n 为集合 $\{0, 2\}$ 的非空子集. 后来, 这一结果被文献 [9, 10] 推广到齐次 Cantor 集平移 $\Gamma_{\beta, \{0, 1, \dots, N-1\}^{\infty}} \cap (\Gamma_{\beta, \{0, 1, \dots, N-1\}^{\infty}} + t)$ 的情形, 其中 $N \geq 2$ 为整数, $0 < \beta < 1/N$ 且 $t \in [-1, 1]$ 具有唯一的 $\{0, \pm 1, \dots, \pm(N-1)\}$ -编码. 本质上, 他们给出了广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 为自

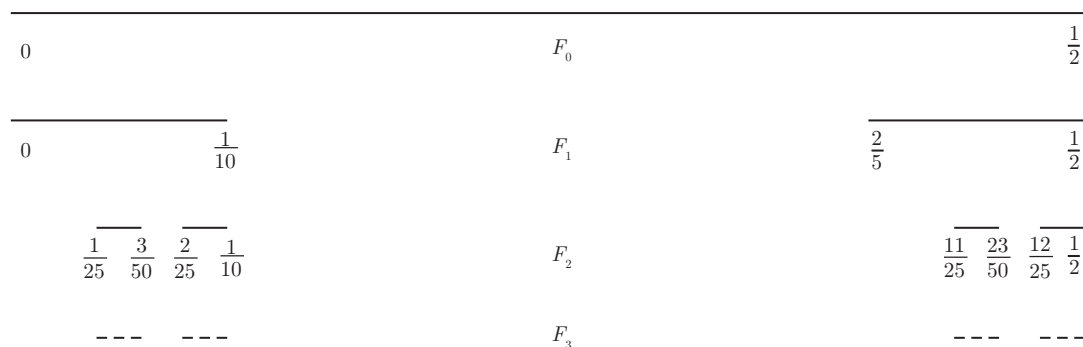


图 1 $\mathcal{D} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D_n$ -型广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 构造过程中的前四层 F_0, F_1, F_2, F_3 , 其中 $\beta = 1/5, D_1 = \{0, 2\}, D_2 = \{1, 2\}$ 且当 $n \geq 3$ 时都有 $D_n = \{0, 1, 2\}$

相似集的充分必要条件, 其中 $0 < \beta < 1/N$ 且所有的符号集 $D_n \subseteq \{0, 1, \dots, N-1\}$, $n \geq 1$ 均为连续的, 即存在 $\tau_n \geq 0$ 使得

$$D_n = \{\gamma_n, \gamma_n + 1, \dots, \gamma_n + \tau_n\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

然而, 当其中某个符号集 D_n 不连续时, 对于广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 的自相似性我们尚不清楚.

本文的结构如下: 第 2 节的定理 2.2 陈述本文的主要结果, 其证明将在第 3 节中给出. 最后在第 4 节将应用定理 2.2 考虑广义 Cantor 集交的自相似性, 给出其交集为齐次生成自相似集的充分必要条件.

2 预备知识及主要结果

给定 $0 < \beta < 1$, 令 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 为 $\mathcal{D} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D_n$ -型广义 Cantor 集. 回顾 (1.2) 和 (1.3), π 是一个从 $\mathcal{D}$ 到 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 的满射, 且

$$\pi(\{d_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \beta^i,$$

此时, 无穷序列 $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}$ 称为 $\pi(\{d_n\}_{n=1}^{\infty}) \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 的一个 $\mathcal{D}$ -编码. 我们指出 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 中的点可能具有多个 $\mathcal{D}$ -编码. 但是, 当 $0 < \beta < 1/N_{\mathcal{D}}$ 时, 从 $\mathcal{D}$ 到 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 的映射 π 是一个双射, 故而 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 中的每一个点都具有唯一的 $\mathcal{D}$ -编码, 这里 $N_{\mathcal{D}}$ 称为 $\mathcal{D}$ 的跨度, 其定义如下:

$$N_{\mathcal{D}} := \sup_{n \geq 1} \max_{d, d' \in D_n} (1 + d - d'). \quad (2.1)$$

很明显, $N_{\mathcal{D}} \geq 1$. 如果 $N_{\mathcal{D}} = 1$, 则 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 是一个单点集. 排除这种简单的情形并利用 (1.4) 中的一致有界假设, 我们有 $2 \leq N_{\mathcal{D}} < \infty$. 在对 $\mathcal{D}$ 不引起混淆的情形下, 我们将用 N 代替 $N_{\mathcal{D}}$.

定义 2.1 [8] 一个无穷序列 $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{0, 1, \dots, N-1\}^{\infty}$ 称为强最终 $p \in \mathbb{Z}^+$ 周期的, 如果存在两个有限序列 $\{a_{\ell}\}_{\ell=1}^p, \{b_{\ell}\}_{\ell=1}^p \in \{0, 1, \dots, N-1\}^p$ 使得

$$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{\ell}\}_{\ell=1}^p \overline{\{a_{\ell} + b_{\ell}\}_{\ell=1}^p},$$

其中 $\overline{\{c_{\ell}\}_{\ell=1}^p} \in \{0, 1, \dots, N-1\}^{\infty}$ 表示有限序列 $\{c_{\ell}\}_{\ell=1}^p$ 的无穷周期重复.

显然, 一个周期序列 $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是强最终周期的, 一个强最终周期序列 $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是最终周期的. 类似地, 我们定义一个集合序列的强最终周期性.

定义 2.2 一个集合序列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ (其中 $\emptyset \neq D_n \subseteq \mathbb{Z}$) 称为强最终 $p \in \mathbb{Z}^+$ 周期的, 如果存在两个有限集合序列 $\{A_{\ell}\}_{\ell=1}^p$ 和 $\{B_{\ell}\}_{\ell=1}^p$ 使得

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty} = \{A_{\ell}\}_{\ell=1}^p \overline{\{A_{\ell} + B_{\ell}\}_{\ell=1}^p},$$

其中 $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ 且 $\overline{\{C_{\ell}\}_{\ell=1}^p}$ 表示有限集合序列 $\{C_{\ell}\}_{\ell=1}^p$ 的无穷周期重复.

当一个集合序列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是强最终 p 周期的, 很容易验证序列 $\{|D_n| - 1\}_{n=1}^{\infty}$ 也是强最终 p 周期的, 其中 $|A|$ 表示集合 A 的基数. 一般来说, 其逆命题并不成立. 但是, 当所有的符号集 D_n ($n \geq 1$) 都连续时, 序列 $\{|D_n| - 1\}_{n=1}^{\infty}$ 的强最终周期性与集合序列 $\{D_n - \gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的强最终周期性是等价的, 这里 $\gamma_n = \min\{d : d \in D_n\}$, 且对集合 A 和实数 b 我们定义 $A - b := A + \{-b\} = \{a - b : a \in A\}$.

当所有的符号集 D_n ($n \geq 1$) 都连续时, 文献 [9, 10] 给出了广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 为自相似集的刻画.

定理 2.1 ^[9, 10] 令 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 为 (1.3) 中定义的 $\mathcal{D} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D_n$ -型广义 Cantor 集, 其中 $0 < \beta < 1/N$ 且所有的符号集 D_n ($n \geq 1$) 都连续, 则 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 为自相似集, 当且仅当序列 $\{|D_n| - 1\}_{n=1}^{\infty}$ 是强最终周期的.

当 D_n 不全是连续的时候, 我们在下面的定理 (本文的主要结果) 中给出 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 为齐次生成自相似集的刻画.

定理 2.2 令 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 为 (1.3) 中定义的 $\mathcal{D} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D_n$ -型广义 Cantor 集, 其中跨度 $N = N_{\mathcal{D}} \geq 2$. 假设 $0 < \beta \leq 1/[(3N-1)/2]$, 则 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 为齐次生成自相似集, 当且仅当集合序列 $\{D_n - \gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是强最终周期的, 其中 $\gamma_n = \min\{d : d \in D_n\}$.

在这里我们特别指出, 当 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 是一个齐次生成的自相似集时, 文献 [11] 讨论了其生成迭代函数系统的形式. 我们还要指出, 定理 2.2 推广了文献 [12, 定理 1.2] (文献 [12] 只证明了定理 2.2 中当 $0 < \beta < 1/(2N-1)$ 的部分. 当 β 变大时, 证明要复杂得多).

最后给出一个例子说明定理 2.2 中 β 的上界 $1/[(3N-1)/2]$ 不能像定理 2.1 一样推广到 $1/N$. 为了方便, 我们引进下面一些记号. 对于给定的集合序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 记

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n : a_n \in A_n, n \geq 1 \right\}.$$

对于任意的实数 x 和集合 A , 我们记 $xA := \{xa : a \in A\} = Ax$. 根据 (1.3), $\mathcal{D} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D_n$ -型广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 可以表示为

$$\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \beta^n.$$

下面给出的一个例子说明, 当 $\beta \in (1/[(3N-1)/2], 1/N)$ 时, 定理 2.2 的充要条件不再成立.

例 2.1 令 $D_1 = \{0\}$, $D_2 = \{0, 4\}$. 当 $m \geq 1$ 时, 令 $D_{2m+1} = \{0, 1\}$, $D_{2m+2} = \{0, 2, 4\}$. 很明显, $\mathcal{D} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D_n$ 的跨度 $N = 5$, 且集合序列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是强最终周期的 (注意到集合 $\{0, 2, 4\}$ 不能写成集合 $\{0, 4\}$ 与其他集合的和). 令 $\beta = 1/6$, 则

$$\frac{1}{[(3N-1)/2]} = \frac{1}{7} < \beta < \frac{1}{5} = \frac{1}{N}.$$

由此得到的广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 不满足定理 2.2 的假设, 且集合序列 $\{D_n - \gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是强最终周期的. 接下来将证明该集合 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 是一个齐次生成的自相似集.

回顾 π 是一个从 $\mathcal{D}$ 到 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 的编码映射, 其定义如下:

$$\pi(\{d_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \beta^n, \quad \text{其中 } \{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}.$$

我们令 $\{g_j(x) = \beta^2 x + b_j\}_{j=1}^8$ 为一组自相似压缩映射, 其中

$$\begin{aligned} b_1 &= \pi(0000\bar{0}), & b_2 &= \pi(0002\bar{0}), & b_3 &= \pi(0004\bar{0}), & b_4 &= \pi(0010\bar{0}), \\ b_5 &= \pi(0400\bar{0}), & b_6 &= \pi(0402\bar{0}), & b_7 &= \pi(0404\bar{0}), & b_8 &= \pi(0410\bar{0}). \end{aligned}$$

考虑到当 $n \geq 3$ 时, $D_n = D_{n+2}$, 我们有

$$\begin{aligned} g_1(\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}) &= g_1\left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \beta^n\right) = D_1 \beta^3 + D_2 \beta^4 + \sum_{n=3}^{\infty} D_n \beta^{n+2} \\ &= D_1 \beta^3 + D_2 \beta^4 + \sum_{n=5}^{\infty} D_n \beta^n. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} g_2(\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}) &= D_1\beta^3 + (D_2 + 2)\beta^4 + \sum_{n=5}^{\infty} D_n\beta^n, \\ g_3(\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}) &= D_1\beta^3 + (D_2 + 4)\beta^4 + \sum_{n=5}^{\infty} D_n\beta^n, \\ g_4(\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}) &= (D_1 + 1)\beta^3 + D_2\beta^4 + \sum_{n=5}^{\infty} D_n\beta^n. \end{aligned}$$

考虑到 $\beta = 1/6$, 我们可以验证

$$(D_1 + D_2\beta) \cup (D_1 + (D_2 + 2)\beta) \cup (D_1 + (D_2 + 4)\beta) \cup (D_1 + 1 + D_2\beta) = D_3 + D_4\beta.$$

从而,

$$\bigcup_{j=1}^4 g_j(\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}) = \sum_{n=3}^{\infty} D_n\beta^n.$$

进一步, 我们可以推出

$$\bigcup_{j=5}^8 g_j(\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}) = 4\beta^2 + \sum_{n=3}^{\infty} D_n\beta^n.$$

因此, $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 是一个由 $\text{IFS}\{g_j(x) : 1 \leq j \leq 8\}$ 生成的自相似集, 即

$$\bigcup_{j=1}^8 g_j(\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\beta^n = \Gamma_{\beta, \mathcal{D}}.$$

最后, 我们指出该 $\text{IFS}\{g_j(x) : 1 \leq j \leq 8\}$ 并不满足开集条件.

3 定理 2.2 的证明

为了证明定理 2.2 的方便, 我们平移广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 使得 0 为其左端点. 具体来说, 令 $D'_n := D_n - \gamma_n$, 其中 $\gamma_n = \min\{d : d \in D_n\}$, 则对所有的 $n \geq 1$ 均有 $0 \in D'_n \subseteq \{0, 1, \dots, N-1\}$. 相应地, 令

$$\mathcal{D}' := \bigotimes_{n=1}^{\infty} D'_n = \bigotimes_{n=1}^{\infty} (D_n - \gamma_n),$$

则 $\mathcal{D}' = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D'_n$ -型广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 是 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 的一个平移, 即

$$\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'} = \sum_{n=1}^{\infty} D'_n\beta^n = \sum_{n=1}^{\infty} (D_n - \gamma_n)\beta^n = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\beta^n - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n\beta^n = \Gamma_{\beta, \mathcal{D}} - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n\beta^n. \quad (3.1)$$

因此, 我们只需要对广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 证明定理 2.2. 由于对任意的 $n \geq 1$ 都有 $0 \in D'_n$, 故而,

$$\sum_{n=1}^m d_n\beta^n = \pi(d_1 \cdots d_m \bar{0}) \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$$

对任意的 $m \geq 1$ 以及 $d_\ell \in D'_\ell$, $\ell = 1, \dots, m$ 都成立. 特别地, $0 = \pi(\bar{0}) \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$.

定理 2.2 的充分性部分将由下面的性质给出, 其证明方法类似于文献 [10, 定理 1.2].

性质 3.1 令 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 为 (3.1) 中定义的 $\mathcal{D}' = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D'_n$ -型广义 Cantor 集, 其中 $0 < \beta < 1$. 如果集合序列 $\{D'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是强最终周期的, 则 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 是一个齐次生成的自相似集.

证明 根据定义 2.2, 我们假定存在某个 $q \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\{D'_n\}_{n=1}^{\infty} = \{A_\ell\}_{\ell=1}^q \overline{\{A_\ell + B_\ell\}_{\ell=1}^q}$. 通过类似于文献 [10, 定理 1.2] 的证明, 我们可以验证, $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 是一个由 IFS $\{g_e(x) = \beta^q x + e : e \in \mathcal{E}\}$ 生成的自相似集, 其中

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{\ell=1}^{2q} d_\ell \beta^\ell : d_\ell \in A_\ell, d_{\ell+q} \in B_\ell \text{ 对所有的 } 1 \leq \ell \leq q \text{ 成立} \right\}.$$

证毕. $\square$

定理 2.2 中必要性的证明相对复杂得多. 根据 (3.1), $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 是一个 $\mathcal{D}' = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D'_n$ -型广义 Cantor 集, 其跨度 $N = N_{\mathcal{D}'} \geq 2$. 如果 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 是一个齐次生成的自相似集, 在下面引理中我们将证明集合序列 $\{D'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是最终周期的.

引理 3.1 假定 $0 < \beta < 1/N$. 如果 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 是一个齐次生成的自相似集, 则存在某个 $p \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\{D'_n\}_{n=1}^{\infty} = \{D'_\ell\}_{\ell=1}^p \overline{\{D'_{p+\ell}\}_{\ell=1}^p}$, 其中 $D'_\ell \subseteq D'_{p+\ell}$ 对所有的 $\ell = 1, \dots, p$ 成立.

证明 假定 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 是一个由 IFS $\{f_i(x) = rx + a_i : i \in I\}$ 生成的自相似集, 其中 $0 < |r| < 1$, 即

$$\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'} = \bigcup_{i \in I} f_i(\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}).$$

我们可以假定 $0 < r < 1$, 否则我们可以考虑用 IFS $\{f_i \circ f_{i'}(x) : i, i' \in I\}$ 代替原先的 IFS $\{f_i(x) : i \in I\}$. 因为 $0 < \beta < 1$, 故存在某个实数 $\alpha > 0$ 使得 $r = \beta^\alpha$. 类似于文献 [9, 定理 3.2], 我们将证明 α 是一个有理数.

若 α 是一个无理数, 则集合 $\{n\alpha - [n\alpha] : n \in \mathbb{Z}^+\}$ 在区间 $(0, 1)$ 上稠密. 又因为 $0 < \beta < 1$, 我们一定可以选取 $n \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$0 < 1 - \beta^{n\alpha - [n\alpha]} < \frac{1 - N\beta}{N(1 - \beta)}. \quad (3.2)$$

因为 $0 \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$, 故存在 $i \in I$ 使得 $f_i(x) = rx = \beta^\alpha x$. 因为跨度 $N \geq 2$, 可以选取 ℓ 使得 $0 < d \in D'_\ell$, 所以, $d\beta^\ell = \pi(0^{\ell-1}d\bar{0}) \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$, 其中 0^m 表示符号 0 的 m 次重复. 从而,

$$f_i^n(d\beta^\ell) = r^n d\beta^\ell = d\beta^{n\alpha + \ell} < d\beta^{[n\alpha] + \ell} =: \bar{\eta}.$$

根据 (3.2) 和 $d < N$, 我们计算可得

$$f_i^n(d\beta^\ell) > (d-1)\beta^{[n\alpha] + \ell} + \sum_{k=[n\alpha] + \ell + 1}^{\infty} (N-1)\beta^k =: \underline{\eta}.$$

从而,

$$f_i^n(d\beta^\ell) \in (\underline{\eta}, \bar{\eta}) \cap f_i^n(\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}) \subseteq (\underline{\eta}, \bar{\eta}) \cap \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}. \quad (3.3)$$

但另一方面, 因为 $0 < \beta < 1/N$, 编码映射 π 从 $\{0, 1, \dots, N-1\}^\infty$ 到 $\Gamma_{\beta, \{0, 1, \dots, N-1\}^\infty} = \pi(\{0, 1, \dots, N-1\}^\infty)$ 是一个双射, 所以,

$$\bar{\eta} = \pi(0^{[n\alpha] + \ell - 1}d\bar{0}), \quad \underline{\eta} = \pi(0^{[n\alpha] + \ell - 1}(d-1)\overline{(N-1)}).$$

这意味着 $(\underline{\eta}, \bar{\eta}) \cap \Gamma_{\beta, \{0, 1, \dots, N-1\}^\infty} = \emptyset$. 由于 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'} \subseteq \Gamma_{\beta, \{0, 1, \dots, N-1\}^\infty}$, 从而, $(\underline{\eta}, \bar{\eta}) \cap \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'} = \emptyset$. 这与 (3.3) 矛盾. 因此, α 是一个有理数.

取 $m \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $q := m\alpha \in \mathbb{Z}^+$, 则 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 同样能够被 $\text{IFS}\{g_j : j \in J\} = \{f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_m}(x) : i_n \in I, n = 1, \dots, m\}$ 所生成, 此时, g_j 的压缩比均为 $r^m = \beta^q$. 注意到 $0 \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$, 则存在 $j_0 \in J$ 使得 $g_{j_0}(x) = \beta^q x$. 对于 $\ell \geq 1$, 取 $d \in D'_\ell$ 并相应地取 $d\beta^\ell = \pi(0^{\ell-1}d\bar{0}) \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$, 则

$$g_{j_0}(d\beta^\ell) = d\beta^{q+\ell} \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$$

由于 $0 < \beta < 1/N$, 我们知道 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 中每一个点都具有唯一的 $\mathcal{D}'$ -型编码, 从而, 上式意味着 $d \in D'_{q+\ell}$. 进而我们有 $D'_\ell \subseteq D'_{q+\ell}$. 通过迭代, 我们得到对于任意的 $1 \leq \ell \leq q$ 和 $m \geq 1$,

$$D'_\ell \subseteq D'_{q+\ell} \subseteq \cdots \subseteq D'_{mq+\ell} \subseteq \cdots$$

因为对所有的 $n \geq 1$ 都有 $D'_n \subseteq \{0, 1, \dots, N-1\}$, 故存在某个充分大的且独立于 ℓ 的整数 $m_* \geq 1$, 使得对所有的 $1 \leq \ell \leq q$ 和 $m \geq m_*$ 都有 $D'_{m_*q+\ell} = D'_{mq+\ell}$. 令 $p = m_*q$, 则

$$\{D'_n\}_{n=1}^\infty = \{D'_\ell\}_{\ell=1}^p \overline{\{D'_{p+\ell}\}_{\ell=1}^p},$$

且 $D'_\ell \subseteq D'_{p+\ell}$ 对所有的 $\ell = 1, \dots, p$ 成立. 证毕. $\square$

回顾第 2 节, 一个无穷序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}'$ 称为 $x \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 的一个 $\mathcal{D}'$ -编码, 如果 $x = \sum_{n=1}^\infty x_n \beta^n$, 其中 $x_n \in D'_n, n \geq 1$. 因为 $0 < \beta < 1/N$, 我们有 $N \leq [1/\beta]$, 则 $\mathcal{D}' \subseteq \{0, 1, \dots, N-1\}^\infty \subseteq \{0, 1, \dots, [1/\beta]-1\}^\infty$. 从而, $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'} \subseteq \Gamma_{\beta, \{0, 1, \dots, [1/\beta]-1\}^\infty}$. 此时, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 也称为 x 的一个 $\{0, 1, \dots, [1/\beta]-1\}^\infty$ -编码.

引理 3.2 假设 $0 < \beta < 1/N$. 如果 $x \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'} \subseteq \Gamma_{\beta, \{0, 1, \dots, [1/\beta]-1\}^\infty}$ 具有 $\{0, 1, \dots, [1/\beta]-1\}^\infty$ -编码 $\{x_n\}_{n=1}^\infty (\neq d_1 \cdots d_k \overline{([1/\beta]-1)})$, 则 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 x 唯一的 $\mathcal{D}'$ -编码.

证明 该引理可由如下事实直接推出. 当 $1/\beta \notin \mathbb{Z}^+$ 时, 编码映射 π 从 $\{0, 1, \dots, [1/\beta]-1\}^\infty$ 到集合 $\Gamma_{\beta, \{0, 1, \dots, [1/\beta]-1\}^\infty}$ 是一个双射, 从而, $\Gamma_{\beta, \{0, 1, \dots, [1/\beta]-1\}^\infty}$ 中的任意一个点都具有唯一的 $\{0, 1, \dots, [1/\beta]-1\}^\infty$ -编码.

当 $1/\beta \in \mathbb{Z}^+$ 时, 我们有 $N < [1/\beta]$. 此时, π 基本上是一个双射, 即除了 $\Gamma_{\beta, \{0, 1, \dots, [1/\beta]-1\}^\infty}$ 中可数多个点具有两个 $\{0, 1, \dots, [1/\beta]-1\}^\infty$ -编码外 (具有 $d_1 \cdots d_{k-1} d_k \overline{([1/\beta]-1)}$ 和 $d_1 \cdots d_{k-1} (d_k + 1) \bar{0}$ 的形式), 其他所有的点都具有唯一的 $\{0, 1, \dots, [1/\beta]-1\}^\infty$ -编码. $\square$

必要性证明 如果 $N = 2$, 则所有的符号集 D_n 均连续, 且此时必要性证明可由文献 [9, 10] 直接给出. 下面假定 $N \geq 3$, 则 $0 < \beta \leq 1/[(3N-1)/2] < 1/N$. 根据引理 3.1, 存在 $p \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$\{D_n\}_{n=1}^\infty = \{D'_\ell\}_{\ell=1}^p \overline{\{D'_{p+\ell}\}_{\ell=1}^p}, \quad \text{其中 } D'_\ell \subseteq D'_{p+\ell} \text{ 对所有的 } 1 \leq \ell \leq p \text{ 成立.} \quad (3.4)$$

进一步, 我们可以要求 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 是由 $\text{IFS}\{g_j(x) = \beta^p x + b_j : j \in J\}$ 生成的自相似集. 注意到 $0 \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$, 则对任意的 $j \in J$ 都有 $b_j = g_j(0) \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$. 因为 $0 < \beta < 1/N$, $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$ 中的每一个点都具有唯一的 $\mathcal{D}'$ -编码. 令 $\{b_{j,n}\}_{n=1}^\infty$ 为 b_j 的 $\mathcal{D}'$ -编码, 即

$$b_j = \pi(\{b_{j,n}\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty b_{j,n} \beta^n, \quad \text{其中 } b_{j,n} \in D'_n \text{ 对所有的 } n \geq 1 \text{ 成立.}$$

给定 $1 \leq \ell \leq p$, 我们令 $B_\ell := \{b \in \mathbb{Z} : b + D'_\ell \subseteq D'_{p+\ell}\}$. 根据 (3.4), 要证明必要性, 我们只需要证明 $D'_{p+\ell} = B_\ell + D'_\ell$ 对所有的 $1 \leq \ell \leq p$ 都成立. 很明显, 因为 $D'_\ell \subseteq D'_{p+\ell}$, 所以, $0 \in B_\ell$. 从集合代数和的定义我们可以直接得到

$$B_\ell + D'_\ell = \bigcup_{b \in B_\ell} (b + D'_\ell) \subseteq D'_{p+\ell}.$$

另一方面, 对给定的 $1 \leq \ell \leq p$, 任取 $d \in D'_{p+\ell}$. 接下来分两种情形来证明 $d \in B_\ell + D'_\ell$:

情形 I $d \leq [(N-1)/2]$. 取

$$x = d\beta^{p+\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p+\ell+n} \beta^{p+\ell+n} \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'},$$

其中 $\lambda_n := \max\{d : d \in D'_n\}$, $n \geq 1$. 因为 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'} = \bigcup_{j \in J} g_j(\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'})$, 故存在 $j_x \in J$,

$$x' = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \beta^n = \pi(\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}) \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$$

使得 $x = g_{j_x}(x')$, 即

$$\begin{aligned} d\beta^{p+\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p+\ell+n} \beta^{p+\ell+n} &= \sum_{n=1}^p b_{j_x, n} \beta^n + \sum_{n=1}^{\ell-1} (b_{j_x, p+n} + x'_n) \beta^{p+n} + (b_{j_x, p+\ell} + x'_\ell) \beta^{p+\ell} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (b_{j_x, p+\ell+n} + x'_{\ell+n}) \beta^{p+\ell+n}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

因为 $0 < \beta < 1/N$, 我们有 $x < \beta^{p+\ell-1}$, 从而, $b_{j_x, n} = 0$ 对所有的 $1 \leq n < p+\ell$ 成立, 以及 $x'_n = 0$ 对所有的 $1 \leq n < \ell$ 成立. 重新整理 (3.5) 可得

$$d = (b_{j_x, p+\ell} + x'_\ell) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_{j_x, p+\ell+n} + x'_{\ell+n} - \lambda_{p+\ell+n}) \beta^n. \quad (3.6)$$

由于 $0 < \beta < 1/N$, 以及对所有的 $n \geq 1$ 符号 $b_{j_x, n} \leq \lambda_n$, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (b_{j_x, p+\ell+n} + x'_{\ell+n} - \lambda_{p+\ell+n}) \beta^n \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x'_{\ell+n} - (\lambda_{p+\ell+n} - b_{j_x, p+\ell+n})| \beta^n \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (N-1) \beta^n < 1. \end{aligned}$$

结合 (3.6) 我们可以得到

$$d = b_{j_x, p+\ell} + x'_\ell \in b_{j_x, p+\ell} + D'_\ell. \quad (3.7)$$

因为 $d \leq [(N-1)/2]$, 根据 (3.7), 我们得到 $b_{j_x, p+\ell} \leq [(N-1)/2]$. 又因为 $\lambda_\ell \leq N-1$ 以及 $0 < \beta \leq 1/[(3N-1)/2]$, 我们有

$$b_{j_x, p+\ell} + \lambda_\ell \leq \left\lceil \frac{3N-1}{2} \right\rceil - 1 \leq \left\lceil \frac{1}{\beta} \right\rceil - 1,$$

即 $b_{j_x, p+\ell} + D'_\ell \subseteq \{0, 1, \dots, [1/\beta] - 1\}$. 注意到

$$g_{j_x}(D'_\ell \beta^\ell) = \sum_{n \neq p+\ell} b_{j_x, n} \beta^n + (b_{j_x, p+\ell} + D'_\ell) \beta^{p+\ell} \subseteq \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'} = \sum_{n=1}^{\infty} D'_n \beta^n. \quad (3.8)$$

因为 $0 < \beta \leq 1/[(3N-1)/2]$, $N \geq 3$, 所以, 对任意的 $n \geq 1$, 我们有 $b_{j_x, n} \leq N-1 < [1/\beta] - 1$. 将引理 3.2 应用到 (3.8) 中, 我们得到 $b_{j_x, p+\ell} + D'_\ell \subseteq D'_{p+\ell}$, 即 $b_{j_x, p+\ell} \in B_\ell$. 根据 (3.7), 我们有 $d \in B_\ell + D'_\ell$.

情形 II $d > [(N-1)/2]$. 取

$$y = \lambda_{p+\ell-1}\beta^{p+\ell-1} + d\beta^{p+\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p+\ell+n}\beta^{p+\ell+n} \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$$

类似于情形 I, 因为 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'} = \bigcup_{j \in J} g_j(\Gamma_{\beta, \mathcal{D}'})$, 存在 $j_y \in J$ 以及

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} y'_n \beta^n = \pi(\{y'_n\}_{n=1}^{\infty}) \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$$

使得 $y = g_{j_y}(y')$, 即

$$\begin{aligned} & \lambda_{p+\ell-1}\beta^{p+\ell-1} + d\beta^{p+\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p+\ell+n}\beta^{p+\ell+n} \\ &= \sum_{n=1}^p b_{j_y, n} \beta^n + \sum_{n=1}^{\ell-2} (b_{j_y, p+n} + y'_n) \beta^{p+n} + (b_{j_y, p+\ell-1} + y'_{\ell-1}) \beta^{p+\ell-1} \\ & \quad + (b_{j_y, p+\ell} + y'_{\ell}) \beta^{p+\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_{j_y, p+\ell+n} + y'_{\ell+n}) \beta^{p+\ell+n}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

由于 $0 < \beta < 1/N$, 我们有 $y < \beta^{p+\ell-2}$. 从而可得

$$b_{j_y, n} = 0, \quad \text{对所有的 } 1 \leq n < p + \ell - 1 \text{ 成立}, \quad (3.10)$$

以及 $y'_n = 0$ 对所有的 $1 \leq n < \ell - 1$ 成立. 重新整理 (3.9) 可得

$$\begin{aligned} \lambda_{p+\ell-1} &= (b_{j_y, p+\ell-1} + y'_{\ell-1}) + (b_{j_y, p+\ell} + y'_{\ell} - d)\beta \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} (b_{j_y, p+\ell+n} + y'_{\ell+n} - \lambda_{p+\ell+n}) \beta^{n+1}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中我们补充定义 $y'_0 = 0$. 因为 $0 < \beta \leq 1/[(3N-1)/2]$ 及 $d > [(N-1)/2]$, 所以,

$$-\left(\left[\frac{1}{\beta}\right] - 1\right) \leq b_{j_y, p+\ell} + y'_{\ell} - d \leq \left[\frac{3N-1}{2}\right] - 1 \leq \left[\frac{1}{\beta}\right] - 1. \quad (3.12)$$

类似于情形 I, 可以证明

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (b_{j_y, p+\ell+n} + y'_{\ell+n} - \lambda_{p+\ell+n}) \beta^{n+1} \right| < \beta. \quad (3.13)$$

从而, 根据 (3.12) 和 (3.13), 我们可得

$$\left| (b_{j_y, p+\ell} + y'_{\ell} - d)\beta + \sum_{n=1}^{\infty} (b_{j_y, p+\ell+n} + y'_{\ell+n} - \lambda_{p+\ell+n}) \beta^{n+1} \right| < 1.$$

结合 (3.11), 这意味着

$$\lambda_{p+\ell-1} = b_{j_y, p+\ell-1} + y'_{\ell-1}. \quad (3.14)$$

将 (3.14) 代入 (3.11) 中, 我们得到

$$d = (b_{j_y, p+\ell} + y'_{\ell}) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_{j_y, p+\ell+n} + y'_{\ell+n} - \lambda_{p+\ell+n}) \beta^n.$$

再次利用 (3.13), 我们得到

$$d = b_{j_y, p+\ell} + y'_\ell \in b_{j_y, p+\ell} + D'_\ell. \quad (3.15)$$

如果 $b_{j_y, p+\ell} + \lambda_\ell < [1/\beta]$, 则 $b_{j_y, p+\ell} + D'_\ell \subseteq \{0, 1, \dots, [1/\beta] - 1\}$. 类似于 (3.8), 我们可以证明 $b_{j_y, p+\ell} + D'_\ell \subseteq D'_{p+\ell}$, 即 $b_{j_y, p+\ell} \in B_\ell$. 从而, 根据 (3.15), 我们有 $d \in B_\ell + D'_\ell$.

接下来证明 $b_{j_y, p+\ell} + \lambda_\ell \geq [1/\beta]$ 将导出矛盾, 从而完成情形 II 的证明. 取 $z = y'_{\ell-1}\beta^{\ell-1} + \lambda_\ell\beta^\ell \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}$. 根据 (3.10) 和 (3.14), 我们有

$$\begin{aligned} g_{j_y}(z) &= (b_{j_y, p+\ell-1} + y'_{\ell-1})\beta^{p+\ell-1} + (b_{j_y, p+\ell} + \lambda_\ell)\beta^{p+\ell} + \sum_{n>p+\ell} b_{j_y, n}\beta^n \\ &= \lambda_{p+\ell-1}\beta^{p+\ell-1} + (b_{j_y, p+\ell} + \lambda_\ell)\beta^{p+\ell} + \sum_{n>p+\ell} b_{j_y, n}\beta^n. \end{aligned}$$

由 $0 < \beta < 1/N$ 和 $b_{j_y, p+\ell} + \lambda_\ell \geq [1/\beta]$, 我们可得

$$\begin{aligned} g_{j_y}(z) &> \lambda_{p+\ell-1}\beta^{p+\ell-1} + \sum_{n=p+\ell}^{\infty} (N-1)\beta^n, \\ g_{j_y}(z) &< (\lambda_{p+\ell-1} + 1)\beta^{p+\ell-1} + \sum_{n=p+\ell}^{\infty} (N-1)\beta^n. \end{aligned}$$

因为 $g_{j_y}(z) \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'} \subseteq \Gamma_{\beta, \{0, 1, \dots, N-1\}^\infty}$, 这意味着存在 $c_n \in D'_n$, $n \geq p+\ell$ 使得

$$g_{j_y}(z) = (\lambda_{p+\ell-1} + 1)\beta^{p+\ell-1} + \sum_{n=p+\ell}^{\infty} c_n\beta^n \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}'}. \quad (3.16)$$

因为 $N \geq 3$, 所以, $0 < \beta \leq 1/[(3N-1)/2] \leq 1/(N+1)$. 从而, $\lambda_{p+\ell-1} + 1 \leq N \leq [1/\beta] - 1$. 将引理 3.2 应用到 (3.16) 中, 我们得到 $\lambda_{p+\ell-1} + 1 \in D'_{p+\ell-1}$, 这与 $\lambda_{p+\ell-1}$ 的定义矛盾. $\square$

4 广义 Cantor 集之交

令 $\Gamma_{\beta, \mathcal{C}}$ 和 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 分别为 $\mathcal{C} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} C_n$ -型和 $\mathcal{D} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D_n$ -型广义 Cantor 集. 根据 (1.3), 读者很容易将这两个广义 Cantor 集之交 $\Gamma_{\beta, \mathcal{C}} \cap \Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 写成

$$\Gamma_{\beta, \mathcal{C}} \cap \Gamma_{\beta, \mathcal{D}} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} d_n\beta^n : d_n \in C_n \cap D_n \right\} = \pi(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}),$$

其中 $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} := \bigotimes_{n=1}^{\infty} (C_n \cap D_n)$. 如果 $\Gamma_{\beta, \mathcal{C}} \cap \Gamma_{\beta, \mathcal{D}} \neq \emptyset$, 则交集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{C}} \cap \Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 也是一个广义 Cantor 集. 根据定理 2.2, 我们给出广义 Cantor 集之交为齐次生成自相似集的刻画.

性质 4.1 假设 $\Gamma_{\beta, \mathcal{C}}$ 和 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 分别为 $\mathcal{C} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} C_n$ -型和 $\mathcal{D} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D_n$ -型广义 Cantor 集. 令 $N = N_{\mathcal{C} \cap \mathcal{D}} \geq 2$ 表示 $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} := \bigotimes_{n=1}^{\infty} (C_n \cap D_n)$ 的跨度. 假设 $0 < \beta \leq 1/[(3N-1)/2]$, 则 $\Gamma_{\beta, \mathcal{C}} \cap \Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 是一个齐次生成自相似集, 当且仅当集合序列 $\{C_n \cap D_n - \gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是强最终周期的, 其中 $\gamma_n = \min\{d : d \in C_n \cap D_n\}$.

特别地, 我们考虑广义 Cantor 集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 与其自身的平移交 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} \cap (\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} + t)$, 其中 $t \in \mathbb{R}$. 容易验证

$$\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} \cap (\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} + t) \neq \emptyset \quad \text{当且仅当} \quad t \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}} - \Gamma_{\beta, \mathcal{D}}.$$

根据 (1.3), 差集 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} - \Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 可写成

$$\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} - \Gamma_{\beta, \mathcal{D}} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n \beta^n : t_n \in D_n - D_n \right\} = \pi(\mathcal{D} - \mathcal{D}),$$

其中 $\mathcal{D} - \mathcal{D} := \bigotimes_{n=1}^{\infty} (D_n - D_n)$. 类似于文献 [10], 我们可以证明当 $t \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}} - \Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$,

$$\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} \cap (\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} + t) = \bigcup_{\{t_n\}_{n=1}^{\infty}} \pi \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} (D_n \cap (D_n + t_n)) \right),$$

这里的并取遍 t 的所有 $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ - 编码 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. 如果 $t \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}} - \Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 具有唯一 $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ - 编码 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则

$$\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} \cap (\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} + t) = \pi \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} (D_n \cap (D_n + t_n)) \right)$$

是一个 $\bigotimes_{n=1}^{\infty} (D_n \cap (D_n + t_n))$ - 型的广义 Cantor 集.

根据定理 2.2, 关于广义 Cantor 集平移交的自相似性我们有如下性质.

性质 4.2 令 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 为 (1.3) 中定义的 $\mathcal{D} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} D_n$ - 型广义 Cantor 集, 其跨度 $N_{\mathcal{D}} \geq 2$. 假定 $0 < \beta \leq 1/[(3N_{\mathcal{D}} - 1)/2]$ 且 $t \in \Gamma_{\beta, \mathcal{D}} - \Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ 具有唯一 $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ - 编码 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则 $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} \cap (\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} + t)$ 是一个齐次生成的自相似集, 当且仅当集合序列 $\{D_n \cap (D_n + t_n) - \gamma_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是强最终周期的, 其中 $\gamma_n(t) = \min\{d : d \in D_n \cap (D_n + t_n)\}$.

致谢 作者感谢审稿人对本文提出了许多宝贵的意见. 作者还要感谢李文侠教授认真阅读了本文的初稿, 以及与 Michel Dekking 教授富有成效的讨论.

参考文献

- 1 Moreira C G. Stable intersections of Cantor sets and homoclinic bifurcations. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 1996, 13: 741–781
- 2 Elekes M, Keleti T, Máthé A. Self-similar and self-affine sets: Measure of the intersection of two copies. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2010, 30: 399–440
- 3 Furstenberg H. *Intersections of Cantor Sets and Transversality of Semigroups*. Princeton: Princeton University Press, 1970, 41–59
- 4 Kenyon R, Peres Y. Intersecting random translates of invariant Cantor sets. *Invent Math*, 1991, 104: 601–629
- 5 Kraft R. *Intersections of Thick Cantor Sets*. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 468. Providence, RI: Amer Math Soc, 1992
- 6 Peres Y, Solomyak B. Self-similar measures and intersections of Cantor sets. *Trans Amer Math Soc*, 1998, 350: 4065–4087
- 7 Yao Y, Li W. Self-similar structure on intersection of Cartesian product of Cantor triadic sets with their translations. *Monatsh Math*, 2012, 166: 591–600
- 8 Deng G T, He X G, Wen Z X. Self-similar structure on intersections of triadic Cantor sets. *J Math Anal Appl*, 2008, 337: 617–631
- 9 Kong D, Li W, Dekking F M. Intersections of homogeneous Cantor sets and beta-expansions. *Nonlinearity*, 2010, 23: 2815–2834
- 10 Li W, Yao Y, Zhang Y. Self-similar structure on intersection of homogeneous symmetric Cantor sets. *Math Nachr*, 2011, 284: 298–316
- 11 Feng D J, Wang Y. On the structures of generating iterated function systems of Cantor sets. *Adv Math*, 2009, 222: 1964–1981
- 12 Pedersen S, Phillips J D. On intersections of Cantor sets: Self-similarity. *Commun Math Anal*, 2014, 16: 1–101

On the self similarity of generalized Cantor sets

KONG DeRong

Abstract In this note, we consider the self similarity of a class of generalized Cantor sets

$$\Gamma_{\beta, \mathcal{D}} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} d_n \beta^n : d_n \in D_n, n \geq 1 \right\},$$

where $0 < \beta < 1$ and $D_n, n \geq 1$, are nonempty and finite subsets of $\mathbb{Z}$. We give a necessary and sufficient condition for $\Gamma_{\beta, \mathcal{D}}$ to be a homogeneously generated self similar set. An application to the self similarity of intersections of generalized Cantor sets is given. This partially generalizes the result on the self similarity of Li, Yao and Zhang (2011).

Keywords generalized Cantor sets, self similar sets, strongly eventually periodicity, iterated function systems

MSC(2010) 28A78, 37B10

doi: 10.1360/N012013-00114