

一类平面二次系统的 Poincaré 分枝*

李继彬

(昆明工学院数学教研室)

陈孝秋

(汕头大学数学系)

如果二维单参数自治系统

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \alpha), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \alpha), \quad (1)_\alpha$$

当 $\alpha = 0$ 时, 存在一系充满某环域的周期环 $\{\Gamma^h\}$, 研究 $(1)_\alpha$ 的 Poincaré 分枝, 即由闭轨产生极限环的问题, 归结为研究函数

$$A_1(h) = \oint_{\Gamma^h} \left[(P_{\alpha 0} Q_0 - Q_{\alpha 0} P_0) \exp \left(- \int_0^t (P_{x0} + Q_{y0}) dt \right) \right] dt \quad (2)$$

的零点个数及 $A_1^{(k)}(h)$ 的性质(见文献 [1] § 4).

当 $(1)_\alpha$ 的散度非退化 (即 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \neq 0$) 时, 由于 (2) 式中积分的困难, 未见研究实例.

因此, 即便对于二次微分系统, 是否存在 Poincaré 分枝, 尚无定论. 本文将用下述系统 $(3)_\alpha$ 作为例子证明, 平面二次系统存在 Poincaré 分枝. 在确定的参数条件下, $(3)_{\alpha=0}$ 的闭轨能分枝出 $(1, 0)$, $(2, 0)$ 与 $(1, 1)$ 型分布的极限环. 极限环的位置可以较精确地估计, 它们一般是非局部的, 即未必集中于奇点的小邻域内, 可随参数改变扩张或收缩.

考虑二次系统

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xy + \alpha(l_1 x^2 + m_1 xy + n_1 y^2 + p_1 x + q_1 y) = P(x, y, \alpha), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^2 + 2y^2 + \alpha(l_2 x^2 + m_2 xy + n_2 y^2 + p_2 x + q_2 y) \\ &= Q(x, y, \alpha), \end{aligned} \quad (3)_\alpha$$

其中 $0 < \alpha \ll 1$, 下文不再重述.

系统 $(3)_{\alpha=0}$ 具有双中心 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, 且具有三对无穷远奇点. 积分 $(3)_{\alpha=0}$, 可求得围绕 $A(1, 0)$ 的闭轨族 $\{\Gamma_1^h\}$ 的参数方程:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1-h}{[(1-h)^2 + (2h-h^2)\cos t]^{\frac{1}{2}}}, \\ y_1(t) &= \frac{(2h-h^2)\sin t}{2[(1-h)^2 + (2h-h^2)\cos t]}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $h \in (0, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$. 围绕 $B(-1, 0)$ 的闭轨族 $\{\Gamma_2^h\}$ 则有参数方程 $x_2(t) = -x_1(t)$, $y_2(t) = y_1(t)$. 引入记号

本文 1985 年 8 月 27 日收到.

* 中国科学院科学基金资助的课题.

$$k^2 = 2(2h - h^2), (1 - h) = \left(\frac{2 - k^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta\phi = (1 - k^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}}, u = \frac{1}{2} t.$$

当 h 从 0 增加到 $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, k^2 从 0 增加到 1. 于是对于 (3)_a, (2) 式中的

$$\exp\left(-\int_0^t (P_{x0} + Q_{y0}) dt\right) = \exp\left(-\frac{5}{2} \int_0^t \frac{(2h - h^2) \sin t dt}{(1 - h)^2 + (2h - h^2) \cos t}\right) \\ = [(1 - h)^2 + (2h - h^2) \cos t]^{\frac{5}{2}} = (\Delta\phi)^5, \quad (5)$$

注意到函数 $y_i(t), x_i(t)$ 的奇偶性 ($i = 1, 2$), 我们有

$$A_1(h) = \int_0^{2\pi} (\Delta\phi)^5 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^2 + 2y^2 \right) (l_1 x^2 + m_1 xy + n_1 y^2 + p_1 x + q_1 y) \right. \\ \left. - xy(l_2 x^2 + m_2 xy + n_2 y^2 + p_2 x + q_2 y) \right] dt \\ = \int_0^\pi (\Delta\phi)^5 [-l_1 x^4 + 4n_1 y^4 + (4l_1 - n_1 - 2m_2)x^2 y^2 - p_1 x^3 \\ + (4p_1 - 2q_2)xy^2 + l_1 x^2 + n_1 y^2 + p_1 x] dt. \quad (6)$$

引入第一、二类完全椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\phi du, \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\Delta\phi},$$

经细致计算(6)式右端各项积分得

$$A_1(h) = \frac{1}{12} \left\{ [6(2 - k^2)^2 l_1 - 2(2 - k^2)^2 m_2 + (k^4 - 16k^2 + 16)n_1] E(k) \right. \\ \left. - 4(1 - k^2)(2 - k^2)(3l_1 - m_2 + 2n_1) K(k) \pm \frac{3\pi(4p_1 - q_2)}{4\sqrt{2}} \right. \\ \left. \times k^4 \sqrt{2 - k^2} \right\}, \quad (7)$$

显然, $A_1(h)$ 只与参数 l_1, n_1, m_2, p_1, q_2 有关, 为简化起见, 令 $\rho = k^2, l = 3l_1 - m_2, n = n_1, \lambda = 4p_1 - q_2$, 并略去常数因子 $\frac{1}{12}$, (7)式可化为

$$\Phi_{1,2}(\rho) = [(2l + n)\rho^2 - 8(l + 2n)\rho + 8(l + 2n)] E(\sqrt{\rho}) \\ - 4(l + 2n)(1 - \rho)(2 - \rho) K(\sqrt{\rho}) \pm \frac{3\pi\lambda\rho^2\sqrt{2 - \rho}}{4\sqrt{2}}, \quad (8)$$

(8)式中 $\Phi_1(\rho)$ 及右边末项的正号对应于沿 $\{\Gamma_1^+$ 的积分, $\Phi_2(\rho)$ 及负号对应于沿 $\{\Gamma_2^+$ 的积分. 以下分四种情况讨论.

1) $l + 2n = 0, \lambda \equiv 0$. 此时,

$$\Phi_{1,2}(\rho) = \frac{3}{2} l \rho^2 E(\sqrt{\rho}),$$

在 $0 < \rho < 1$ 时, $\Phi_{1,2}(\rho)$ 不存在实零点. 因此, 扰动系统 (3)_a 不存在极限环.

2) $l + 2n \neq 0, \lambda \equiv 0$. 记 $a = \frac{2l + n}{l + 2n}$, 由(8)式得

$$\Phi_{1,2}(\rho) = (l + 2n)[(a\rho^2 - 8\rho + 8)E(\sqrt{\rho}) - 4(1 - \rho)(2 - \rho)K(\sqrt{\rho})] \\ \stackrel{\text{def}}{=} (l + 2n)\phi(\rho). \quad (9)$$

对于 $\rho \in (0, 1)$ $\phi(\rho)$ 有级数展式

$$\phi(\rho) = \frac{\pi}{2} \rho^2 \left[\left(a - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \left(a - \frac{1}{2}\right) \rho - \frac{3}{64} \left(a - \frac{7}{4}\right) \rho^2 + \cdots \right], \quad (10)$$

并且

$$\phi'(\rho) = \frac{1}{2} [(5a\rho - 20)E(\sqrt{\rho}) + (20 - 12\rho - a\rho)K(\sqrt{\rho})] \\ = \pi\rho \left[\left(a - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{8} \left(a - \frac{1}{2}\right) \rho - \frac{3}{32} \left(a - \frac{7}{4}\right) \rho^2 + \cdots \right] \quad (0 < \rho < 1), \quad (11)$$

故

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, \phi(1) = a, \\ \lim_{\rho \rightarrow 1} \phi'(\rho) = \begin{cases} +\infty & \text{当 } a < 8 \text{ 时}, \\ 10 & \text{当 } a = 8 \text{ 时}, \\ -\infty & \text{当 } a > 8 \text{ 时}. \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

由(9)–(12)式即知, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $\phi(\rho)$ 在 $\rho \in (0, 1)$ 恰有一个简单零点 $\rho = \rho_z$,

$\phi(\rho)$ 随着 ρ 的增加先下降到一个极小值再单增. 当 $a \rightarrow \frac{1}{2}$ 时, $\rho_z \rightarrow 0$; 当 $a \rightarrow 0$ 时, $\rho_z \rightarrow$

1. 根据文献[1]定理 4.11 及推论得

命题 1 设 (3)_a 中参数满足关系 $l + 2n > 0$, $\lambda \equiv 0$, 则当 $0 < a < \frac{1}{2}$ (即 $l < 0$, $n > -2l$) 时, 系统 (3)_a 存在 (1, 1) 分布的极限环. 当 $a \rightarrow \frac{1}{2}$ 时, 两极限环分别收缩到奇点 A, B, 当 $a \rightarrow 0$ 时, 两极限环扩张到无穷远.

3) $l + 2n = 0$, $\lambda \neq 0$. 类似于文献[2]的处理, 令 $\Phi_{1,2}(\rho) = 0$, 引入判定函数

$$\lambda_{1,2}(\rho) = \mp \frac{2lE(\sqrt{\rho})}{\pi\sqrt{1-\rho/2}}. \quad (13)$$

显然, 若 $l > 0$, 则 $\lambda_1(\rho) < 0$, $\lambda_2(\rho) > 0$. 由于两函数的图形是对称的, 考虑 $\lambda_2(\rho)$. 因为

$$\lambda_2(0) = l, \quad \lambda_2(1) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} l, \\ \lambda_2'(\rho) = \frac{2E(\sqrt{\rho}) - (2-\rho)K(\sqrt{\rho})}{2\rho(2-\rho)^{3/2}} < 0,$$

故 $\lambda_2(\rho)$ 在 $(0, \rho)$ 内单调减, 且 $\lim_{\rho \rightarrow 1} \lambda_2(\rho) = -\infty$. 根据文献[2]定理 3.1, 我们有

命题 2 若 $l + 2n = 0$, 则当 $0 < \frac{2\sqrt{2}}{\pi} l + o(\alpha) < \lambda < l + o(\alpha)$ 时系统 (3)_a 存在在围绕奇点 B(-1, 0) 的唯一不稳定极限环, 随 λ 的减少, 该极限环扩大; 当

$$-l + o(\alpha) < \lambda < -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} l + o(\alpha)$$

时, (3)_a 存在围绕奇点 $A(1, 0)$ 的唯一稳定极限环, 该环随 λ 的减少而缩小.

4) $l + 2n \neq 0, \lambda \neq 0$. 考虑判定函数

$$\tilde{\lambda}_{1,2}(\rho) = \mp \frac{4\sqrt{2}(l+2n)[(a\rho^2 - 8\rho + 8)E(\sqrt{\rho}) - 4(1-\rho)(2-\rho)K(\sqrt{\rho})]}{3\pi\rho^2\sqrt{2-\rho}}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \mp \frac{4\sqrt{2}(l+2n)}{3\pi} \frac{\phi(\rho)}{\varphi(\rho)} = \frac{4\sqrt{2}(l+2n)}{3\pi} \lambda_{1,2}(\rho), \quad (14)$$

由于 $\lambda_1(\rho)$ 与 $\lambda_2(\rho)$ 的图形对称于 ρ 轴, 只需考虑 $l + 2n > 0$ 及 $a \geq 0$ 的情况. 由(14)式得

$$\lambda_2(\rho) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\left(a - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{64} \left(a - \frac{17}{4} \right) \rho^2 + \dots \right], \quad (15)$$

$$\psi'(\rho) = \frac{(8-5\rho)\rho}{2\sqrt{2-\rho}}, \quad \lambda_2'(\rho) = \frac{1}{\varphi(\rho)} [\psi'(\rho) - \lambda_2(\rho)\varphi'(\rho)], \quad (16)$$

因此, 由(14)–(16)式得

$$\lambda_2(0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(a - \frac{1}{2} \right), \quad \lambda_2(1) = a, \quad (17)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \lambda(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 1} \left[\psi'(\rho) - \frac{3}{2}a \right]$$

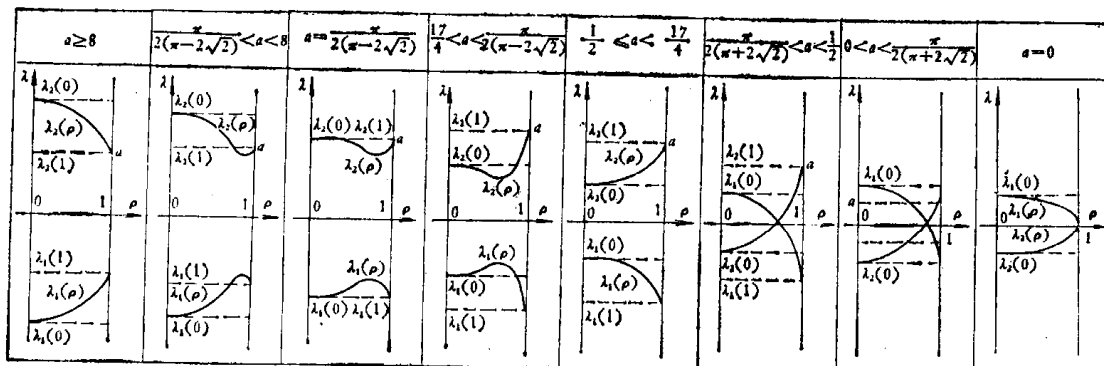
$$= \begin{cases} +\infty & a < 8 \\ -2 & \text{当 } a = 8 \text{ 时} \\ -\infty & a > 8 \end{cases} \quad (18)$$

从(17)式可见, 当 $a \geq \frac{\pi}{2(\pi - 2\sqrt{2})} \approx 5.01586$ 时, $\lambda_2(0) \geq \lambda_2(1)$; 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 若

$a \geq \frac{\pi}{2(\pi + 2\sqrt{2})} \approx 0.2631$, $|\lambda_2(0)| \leq \lambda_2(1)$. 利用上面的结果进行详细分析, 我们得到表

1 所列判定曲线示意图. 注意, 对于固定的 a 值, 只要查完全椭圆积分表, 就可以精确地绘出这些图形.

表 1



根据上面的判定曲线图与文献[2]定理 3.1 得

命题 3 设 $l + 2n > 0$, 对于使得 ρ - λ 平面上直线 $\lambda = \lambda_0$ 与判定曲线有交点的参

数值 λ_0 , 有结论:

(i) 当 a 满足条件 ① $a \geq 8$, 或 ② $\frac{1}{2} \leq a < \frac{17}{4}$, 或 ③ $a = 0$ 时, 系统 $(3)_a$ 存在 $(1, 0)$ 分布的极限环;

(ii) 当 a 满足条件 ① $\frac{\pi}{2(\pi - 2\sqrt{2})} < a < 8$ 或 ② $\frac{17}{4} < a < \frac{\pi}{2(\pi - 2\sqrt{2})}$ 时, 系统 $(3)_a$ 存在 $(2, 0)$ 分布或 $(1, 0)$ 分布的极限环;

(iii) 当 $a = \frac{\pi}{2(\pi - 2\sqrt{2})}$ 时, 系统 $(3)_a$ 存在 $(2, 0)$ 分布的极限环;

(iv) 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 系统 $(3)_a$ 存在 $(1, 1)$ 分布或 $(1, 0)$ 分布的极限环;

(v) 当 $a = \frac{\pi}{2(\pi + 2\sqrt{2})}$ 时, 系统 $(3)_a$ 只存在 $(1, 1)$ 分布的极限环, 且随 λ 的减少,

包围 A 的不稳定环扩大, 包围 B 的稳定环缩小.

综合上述各命题, 我们得到

定理 平面二次系统存在 Poincaré 分枝. 系统 $(3)_a$ 的 Poincaré 分枝可能以 $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ 三种分布的极限环而存在.

参 考 文 献

- [1] 叶彦谦, 极限环论, 上海科技出版社, 1984.
- [2] 李继彬等, 数学学报, 28(1985), 4: 509—521.