



整数流与子图覆盖

范更华

福州大学离散数学研究中心, 福州 350116

E-mail: fan@fzu.edu.cn

收稿日期: 2016-10-08; 接受日期: 2016-12-31; 网络出版日期: 2017-02-27

国家自然科学基金 (批准号: 11331003) 资助项目

摘要 整数流和子图覆盖是当今图论领域的两个重要研究方向, 与著名的四色问题密切相关. 四色问题等价于平面图的整数 4-流问题. 一个图有整数 k -流, 当且仅当对该图的某个定向, 存在从边集到 k 阶交换群的一个函数, 使得对图中每个点, 进入该点的边函数值之和等于离开该点的边函数值之和. 整数流理论与数学其他领域一些著名问题有一定的关联, 如组合学的孤独跑步者、数论的丢番图逼近、几何学的视线阻碍和线性空间堆垒基等. 四色问题还等价于平面图的偶子图覆盖问题: 是否存在 3 个偶子图, 覆盖一个 2-边连通平面图的每条边恰好两次. 著名的 Fulkerson 猜想认为, 对每个 2-边连通图 (不必是平面图), 存在 6 个偶子图, 覆盖该图的每条边恰好 4 次. 本文对整数流和子图覆盖这两个研究方向及相关问题的历史和现状作一个综述.

关键词 整数流 子图覆盖 四色问题 Euler 图 圈路覆盖

MSC (2010) 主题分类 05C21, 05C38, 05C40, 05C45, 05C70

1 引言

图论中的四色问题是数学史上最著名的问题之一, 它不仅对图论的发展至关重要, 对整个数学的发展也影响深远. 四色问题源于 1852 年, Morgan 教授的一位学生向他提出一个问题, 为什么只需要 4 种颜色就可以给地图上的每个国家着色, 使得具有共同边界的国家得到不同的颜色? 这就是原始的四色问题. 四色问题的关键点是“为什么”, 而不是如何着色一个具体的地图. 把地图看作一个平面图, 国界看作边, 相交处作为点, 国家的区域称为面, 四色问题就可以转化为典型的图论问题: 对于任意的平面图, 最多只需 4 种颜色对该图的面进行着色, 使得任意两个有公共边的面得到不同的颜色, 这就是四色问题的严谨数学描述. 四色问题吸引了许多著名的数学家, 近代有微分拓扑学奠基人 Whitney (Wolf 奖得主), 他早年从事图论研究, 其博士论文^[1] 题目是“图的着色”. 他曾经与 Tutte (英国皇家学会会员) 合作研究四色问题, 共同发表多篇关于四色问题的文章. 后来, Whitney 专注于拓扑学研究, Tutte 仍坚持继续研究四色问题, 并将后半生基本上献给了四色问题的研究. 1976 年, Appel 和 Haken 借助计算机的帮助解决了四色问题, 证明的全文于 1977 年发表在文献 [2, 3]. 人们还在继续研究四色问题, 希望能找到一个纯推理的数学证明. 整数流、子图覆盖与四色问题密切相关, 是当今图论领域的两个重要研究方向. 本文对这两个研究方向及相关问题的历史和现状作一个综述.

英文引用格式: Fan G H. Integer flows and subgraph covers (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 457–466, doi: 10.1360/N012016-00177

2 基本概念、定义及预备知识

一个图 G 由点集和边集构成, $V(G)$ 代表 G 的点集, $E(G)$ 代表 G 的边集. 连接两个点 x 和 y 的边记为 xy , 称边 xy 与点 x 和 y 关联; 若 $x = y$, 则边 xy 称为环 (loop). 图中点的度数 (degree) 定义为与该点关联的边的数目, 环计算两次. 每个点的度数均为 k 的图称为 k -正则图. 若图中任意两点间至多只有一条边, 且图中无环, 则称该图为简单图 (simple graph). 给边 xy 一个定向, 是指确定 xy 的一个方向: 从 x 到 y (称该边离开 x) 或从 y 到 x (称该边进入 x). 对点 $v \in V(G)$, $E^+(v)$ 代表进入 v 的边的集合, $E^-(v)$ 代表离开 v 的边的集合. 若 G 的每条边都有一个定向, 则称 G 为定向图.

设 x 和 y 为图中两个点, 以 x 和 y 为端点的路 (path) 是一个连续的点、边序列, 其中 x 和 y 在此序列构成的图中的度数为 1, 其余各点度数皆为 2. 端点重合 ($x = y$) 的闭路称为圈 (circuit). 若图中任意两点间都存在一条路, 则称该图是连通的; 若图中任意两点间都存在 k 条内点不交的路, 则称该图为 k -连通; 若任意两点间都存在 k 条边不交的路, 则称为 k -边连通. 等价地, 一个图是 k -连通 (k -边连通) 当且仅当去掉任意 $k-1$ 个点 ($k-1$ 条边), 该图仍然连通, 但存在 k 个点 (k 条边), 去掉它们后该图不再连通.

定义图上的几个基本运算. 设 v 是图 G 中一个点, xy 是 G 中一条边. 删除点 v , 是指删去 v 及与 v 关联的所有边, 记为 $G-v$; 删除边 xy , 是指删去 xy , 但两端点 x 和 y 保持不变, 记为 $G-xy$; 收缩边 xy , 是指删去边 xy 后, 将两端点 x 和 y 合二为一, 记为 G/xy . 如果一个图 H 可以通过对图 G 进行删点、删边运算得到, 则称 H 为 G 的子图; 若可以通过对图 G 进行删点、删边和收缩边三种运算得到, 则称 H 为 G 的广义子图 (minor). 设 H 是 G 的一个子图, 如果 $V(H) = V(G)$, 则称 H 是 G 的生成子图 (spanning subgraph). 为方便起见, 常用边集 $E(G)$ 来代表图 G , 这样就可借用集合的运算. 令 A 和 B 是图 G 的两个子图, $A \oplus B$ 是由边集 $(E(A) \cup E(B)) \setminus (E(A) \cap E(B))$ 所构成的 G 的子图, 称为 A 与 B 的对称差.

不含圈的连通图称为树. 每个点的度数均为偶数的图称为偶图. 一个图的生成树与偶子图之间有下列关系.

引理 1 设 T 为图 G 的生成树, 则 G 中存在偶子图 H , 使得 $E(G) \setminus E(T) \subseteq E(H)$.

证明 令 $E(G) \setminus E(T) = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$. 令 $T+e_i$ 是由边集 $E(T) \cup \{e_i\}$ 所构成的子图, 则 $T+e_i$ 含一个唯一圈 C_i , 使得 $e_i \in E(C_i)$, $1 \leq i \leq s$. 令 $H = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_s$, 则 H 是 G 的偶子图, 且满足 $E(G) \setminus E(T) \subseteq E(H)$. $\square$

Nash-Williams 和 Tutte 分别独立研究了图中边不交生成树的个数, 给出了下述著名定理.

定理 1 ^[4,5] 每个 $2t$ -边连通图含有 t 个边不交的生成树.

3 整数流理论

Tutte 后半生的学术研究基本围绕四色问题, 他希望能在更大的框架下研究四色问题. 为此, 他创立了整数流理论. 给定图 G 和 k 阶交换群 A , 对 G 的每条边确定一个定向, 若存在函数 $f: E(G) \rightarrow A$, 使得对每个点 $v \in V(G)$, 进入该点的边函数值之和等于离开该点的边函数值之和, 即 f 满足

$$\sum_{e \in E^+(v)} f(e) = \sum_{e \in E^-(v)} f(e), \quad (3.1)$$

则称 f 为 G 的一个 A -流. f 的支撑定义为 $S(f) = \{e \in E(G) : f(e) \neq 0\}$, 若 $S(f) = E(G)$, 则称 f 处处非零. 整数流理论的核心是处处非零 A -流的存在性问题. Tutte 证明了处处非零 A -流的存在性与

交换群 A 的结构无关, 只与 A 的阶数有关, 即给定图 G , 若 G 对某个 k 阶交换群 A 有处处非零 A -流, 则对任意 k 阶交换群 B , 均有处处非零 B -流.

给定正整数 k 和定向图 G , f 为 $E(G)$ 上的一个整数值函数, 如果对每条边 $e \in E(G)$, $|f(e)| < k$, 且对每个点 $v \in V(G)$, 等式 (3.1) 成立, 则称 f 为 G 的一个整数 k -流. 类似地, 定义整数 k -流 f 的支撑及 f 处处非零. 不难证明下面的定理:

定理 2 一个图 G 有处处非零整数 k -流当且仅当对任意 k 阶交换群 A , G 有处处非零 A -流.

根据上述定理, 人们把 Tutte 通过群来定义的 A -流 (也称为群-流) 和整数 k -流统称为 k -流. 整数流问题与数学其他领域一些著名问题有一定的关联, 包括组合学的孤独跑步者 (lonely runner)、数论的丢番图逼近 (diophantine approximation)、几何学的视线阻碍 (view obstruction) 和有限域线性空间堆垒基 (additive basis) 等.

根据定义, 若图 G 有处处非零 k -流, 则对任意整数 $\ell > k$, G 有处处非零 ℓ -流; 若对 G 的某个定向, G 有处处非零 k -流, 则 G 对任意定向都有处处非零 k -流, 只需逆转某些边 e 的方向, 将 $f(e)$ 换成逆元 $-f(e)$ 即可. 因此, 讨论 k -流的存在性时, 可不必提及图的定向. 以 Petersen 图为例, 该图没有处处非零 4-流. 图 1 给出 Petersen 图的一个处处非零 5-流.

根据等式 (3.1), 一个连通图存在处处非零 k -流的必要条件是图 2-边连通. k -流是对一般图定义的, 面着色问题只是针对平面图, 对于一般的图, 不好讨论面着色. 人们研究一般图上的处处非零 k -流的存在性, 其成果应用到平面图, 则给出平面图的面着色.

定理 3 2-边连通平面图有处处非零 k -流当且仅当该平面图可 k -面着色.

所以, 平面图的 4-流存在性等价于四色问题, 整数流问题可以看作平面图的面着色问题对于一般图的推广. 是否存在正整数 k , 使得所有 2-边连通图都有处处非零 k -流? Tutte 未能确定 k 的存在性. 20 世纪 70 年代末, 法国数学家 Jaeger 证明了这个正整数存在. Jaeger 早年研究整数流问题, 后来转做纽结论, 为纽结论的发展做出了重要贡献, 可惜他英年早逝.

定理 4 [6] (8-流定理) 每个 2-边连通图有处处非零 8-流.

证明 设 G 为 2-边连通图, 对图的边数 $|E(G)|$ 进行归纳证明. 若 $|E(G)| = 2$, 则 G 显然有处处非零 8-流. 设 $|E(G)| \geq 3$, 则定理对所有 $|E(G')| < |E(G)|$ 的 2-边连通图 G' 成立.

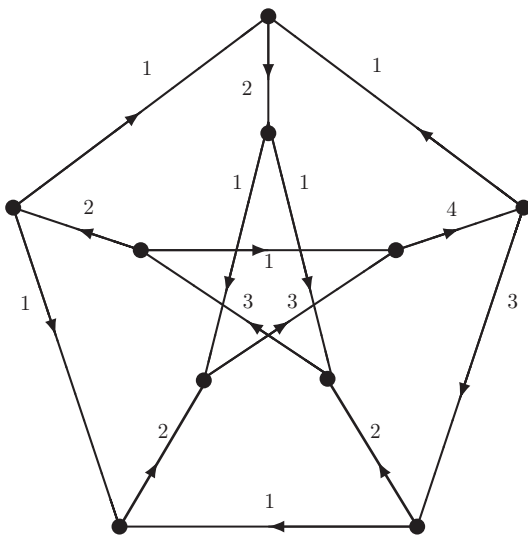


图 1 Petersen 图的处处非零 5-流

首先考虑下述情形: G 中有两条边 e_1 和 e_2 使得 $G - \{e_1, e_2\}$ 不连通. 令 G^* 是收缩边 e_1 后得到的图, 则 $|E(G^*)| = |E(G)| - 1$, 根据归纳假设, G^* 有一个处处非零的 8-流, 记作 f^* . 利用 f^* 构造 G 中的一个 8-流 f : $f(e) = f^*(e)$, 如果 $e \in E(G) \setminus \{e_1\}$; $f(e_1) = f(e_2)$ 或 $f(e_1) = -f(e_2)$, 根据 e_1 和 e_2 的定向. 由此, 我们可假定 G 是 3-边连通的.

将 G 中每条边换成两条平行边, 由此得到的图记作 G^+ , 则 G^+ 是 6-边连通图. 由定理 1 可知, G^+ 有三个边不交生成树 T_1 、 T_2 和 T_3 ; 根据引理 1, 每个 T_i 给出一个偶子图 H_i , 使得

$$E(G^+) \setminus E(T_i) \subseteq E(H_i), \quad 1 \leq i \leq 3.$$

因为 T_1 、 T_2 和 T_3 在 G^+ 中边不交, G 中每条边 e 一定不在某个 T_j 中出现, $j \in \{1, 2, 3\}$, 从而, e 被 H_j 包含. 因为每个 H_i 是偶图, 可以构造 G 中的一个 2-流 f_i , 其支撑 $S(f_i) = E(H_i)$, $1 \leq i \leq 3$. 具体构造如下: 对每条边 $e \in E(H_i)$, $f_i(e) = 1$ 或 $f_i(e) = -1$, 根据 e 的定向; 对每条边 $e \in E(G) \setminus E(H_i)$, $f_i(e) = 0$. 由此得到 G 的 3 个 2-流 f_1 、 f_2 和 f_3 . 令 $f = f_1 + 2f_2 + 4f_3$. 不难验证, f 是 G 的一个处处非零 8-流. $\square$

普林斯顿大学的 Seymour, 对整数流理论的发展做出了重要贡献, 他改进了 Jaeger 的 8-流定理, 证明了每个 2-边连通图有处处非零 6-流. Seymour^[7] 在 1994 年世界数学家大会一小时的邀请报告中重点介绍了整数流理论的研究进展.

定理 5 ^[8] (6-流定理) 每个 2-边连通图有处处非零 6-流.

设 f 是图 G 的一个处处非零的整数 k -流, 定义

$$E_{\text{odd}}(f) = \{e \in E(G) : f(e) \text{ 为奇数}\}.$$

根据整数 k -流的定义, $E_{\text{odd}}(f)$ 所构成的子图是个偶图. 下述两个引理在后面的偶图覆盖问题上有应用.

引理 2 ^[9] 每个 2-边连通图有一个处处非零的整数 8-流 f , 使得

$$|E_{\text{odd}}(f)| \geq \frac{2}{3}|E(G)|.$$

对于整数 6-流, 是不是也有同样结论? 至今未得解决.

猜想 1 每个 2-边连通图有一个处处非零的整数 6-流 f , 使得

$$|E_{\text{odd}}(f)| \geq \frac{2}{3}|E(G)|.$$

引理 3 ^[10] 如果 f 是图 G 的一个处处非零的整数 6-流, 则 $E_{\text{odd}}(f)$ 可分解成三个不交的子集 A_1 、 A_2 和 A_3 , 使得 $G - A_i$ ($1 \leq i \leq 3$) 有处处非零 3-流.

利用此引理, 不难证明下面的定理:

定理 6 一个 2-边连通图 G 有处处非零 6-流当且仅当 G 中存在一个偶子图 A , 其边集可分成三个不交的子集 A_1 、 A_2 和 A_3 , 使得 $G - A_i$ ($i = 1, 2, 3$) 有处处非零 3-流.

作为本节的结束, 我们给出整数流理论中三个著名的猜想, 都是由 Tutte^[11,12] 在 20 世纪 50 年代提出的, 至今仍未解决.

猜想 2 (5-流猜想) 每个 2-边连通图有处处非零 5-流.

猜想 3 (4-流猜想) 每个不含 Petersen 广义子图的 2-边连通图有处处非零 4-流.

猜想 4 (3-流猜想) 每个 4-边连通图有处处非零 3-流.

4-流猜想比四色定理要强, 证明了 4-流猜想就解决了四色问题, 因为平面图是不含 Petersen 广义子图的. 丹麦数学家 Thomassen^[13] 在 3-流猜想上取得了重要突破, 证明了每个 8-边连通图有 3-流, 这个成果被改进到: 每个 6-边连通图有 3-流 (参见文献 [14]).

4 子图覆盖

$H_1, H_2, \dots, H_t$ 是图 G 的 t 个子图, 若 $E(G) = E(H_1) \cup E(H_2) \cup \dots \cup E(H_t)$, 则称子图集合 $X = \{H_1, H_2, \dots, H_t\}$ 是 G 的一个覆盖, 或说 G 被 X 覆盖. 对 G 的任意一条边 e , 若 e 恰好被 X 中的 k 个子图包含, 则称 e 被 X 覆盖 k 次; 若 G 的每条边均被 X 覆盖 k 次, 则称 X 是 G 的一个 k -覆盖.

4.1 偶图覆盖

图的偶图覆盖问题与整数流问题及四色问题密切相关. 下述引理揭示了整数流与偶图覆盖的直接关系.

引理 4 一个图有处处非零 2^t -流当且仅当该图可被 t 个偶子图覆盖.

证明 设图 G 有处处非零 2^t -流. 令 $Z = Z_2 \times Z_2 \times \dots \times Z_2$ 是 t 个 2 阶群的乘积, 则 Z 是 2^t 阶交换群. 令 f 是 G 中的一个 Z -流, 则对每条边 $e \in E(G)$, $f(e) = (a_1, a_2, \dots, a_t)$, $a_i = 0$ 或 $a_i = 1$, 但至少有一个 $a_i \neq 0$, $1 \leq i \leq t$. 对每个 j ($1 \leq j \leq t$), 令 $H_j = \{e \in E(G) : f(e) = (a_1, a_2, \dots, a_t), a_j \neq 0\}$. 根据等式 (3.1), 不难验证, 每个 H_j ($1 \leq j \leq t$) 是 G 的偶子图, 且 $\{H_1, H_2, \dots, H_t\}$ 覆盖 G 的每条边至少 1 次.

反过来, 设 $\{H_1, H_2, \dots, H_t\}$ 是 G 的一个偶子图覆盖. 令 $Z = Z_2 \times Z_2 \times \dots \times Z_2$ 是 t 个 2 阶群的乘积. 确定 G 的一个定向, 定义函数 $f: E(G) \rightarrow Z$ 使得 $f(e) = (a_1, a_2, \dots, a_t)$: 如果 $e \in E(H_i)$, 则 $a_i = 1$; 否则, $a_i = 0$. 因为每个 H_i 都是 G 的偶子图, 且 G 中每条边 e 至少被某个 H_i 包含, 所以, f 是 G 的一个处处非零 Z -流. $\square$

在上述引理中取 $t = 2$, 可得图 G 有处处非零 4-流当且仅当 G 可被 2 个偶子图覆盖. 设 H_1 和 H_2 是构成这种覆盖的两个偶子图, 令 $H_3 = H_1 \oplus H_2$, 则 H_3 也是 G 的一个偶子图. 容易验证, $\{H_1, H_2, H_3\}$ 是 G 的一个 2-覆盖. 因此我们有下面的引理:

引理 5 一个图有处处非零 4-流当且仅当它有 3 个偶子图构成的 2-覆盖.

由定理 3 可知, 四色问题等价于平面图 4-流的存在, 因此, 引理 5 给出了四色问题的一个等价形式:

四色问题的等价形式 每个 2-边连通平面图有 3 个偶子图构成的 2-覆盖.

非平面图是不是也具有这种性质? 答案是否定的, Petersen 图就是一个例子. 事实上, 存在无限多 2-边连通非平面图, 它们没有 3 个偶子图构成的 2-覆盖. 虽然 Petersen 图没有 3 个偶子图构成的 2-覆盖, 但它有 6 个偶子图构成的 4-覆盖. 是不是所有 2-边连通的非平面图都有 6 个偶子图构成的 4-覆盖? 这就是著名的 Fulkerson 猜想.

猜想 5 (Fulkerson 猜想) 每个 2-边连通图都有 6 个偶子图构成的 4-覆盖.

将 Fulkerson 猜想中的由 6 个偶子图构成的 4-覆盖称为 Fulkerson 覆盖. 研究 Fulkerson 猜想的一个途径是研究哪些图类有 Fulkerson 覆盖. 下述定理是研究此问题的一个有用工具. 它的原始形式由文献 [15] 首先给出, 较为复杂. 下面的形式由文献 [16] 给出, 在形式上受到定理 6 的启发.

定理 7 一个 2- 边连通图 G 有 Fulkerson 覆盖当且仅当 G 中存在一个偶子图 A , 其边集可分成两个不交的子集 A_1 和 A_2 , 使得 $G - A_i$ ($i = 1, 2$) 有处处非零 4- 流.

Fulkerson 猜想的原始形式^[17] 是, 每个 2- 边连通的 3- 正则图, 存在 6 个完美匹配构成该图的一个 2- 覆盖. 我们也可以从另外一个角度来看 Fulkerson 猜想. 根据 Edmonds^[18] 的匹配多面体理论, 有下述结果:

定理 8 (Edmonds 定理) 给定一个 2- 边连通图 G , 存在 $3M$ 个偶子图构成 G 的一个 $2M$ - 覆盖.

上述定理只给出整数 M 的存在性, 但无法确定 M 的值, 根据该定理的证明, M 的值可能会非常大. 定理中的整数 M 取决于给定的图 G , 即对于不同的图 G , M 的取值不同. 那么, 是否存在一个常数 c , 适用于所有 2- 边连通图?

问题 1 (未解决问题) 是否存在常数 c , 使得所有 2- 边连通图都有 $3c$ 个偶子图构成的 $2c$ - 覆盖?

猜想 6 每个 2- 边连通图都存在由 12 个偶子图构成的 8- 覆盖.

Fulkerson 猜想认为这个常数 $c = 2$. Seymour^[19] 证明了, 对于 Petersen 图, c 不能取奇数值. c 是否可以取 4 呢?

Fulkerson 猜想及其弱化形式猜想 6 的难点在于对偶子图个数的限制. 若不限偶子图个数, 则一个自然的问题是, 存在哪些正整数 k , 使得每个 2- 边连通图都存在由偶子图构成的 k - 覆盖? 若 k 为奇数, 不难证明, 只有偶图本身存在由偶子图构成的 k - 覆盖; 若 k 为偶数, 此问题尚未完全解决. 欧洲三位数学家首先研究了 $k = 4$ 的情形:

定理 9^[9] (4- 覆盖定理) 每个 2- 边连通图都存在由偶子图构成的 4- 覆盖.

证明 设 G 为 2- 边连通图. 由 8- 流定理可知, G 有一个处处非零整数 8- 流, 记作 f . 设 A 是由 $E_{\text{odd}}(f)$ 构成的偶子图. 收缩 A 的所有边所得图记为 G^* . 由 $E_{\text{odd}}(f)$ 的定义, f 限制在 G^* 上取值为 2, 4 或 6, 所以, $\frac{1}{2}f$ 限制在 G^* 上是一个处处非零整数 4- 流. 根据引理 5, G^* 有 3 个偶子图构成的 2- 覆盖, 记作 $\{H_1^*, H_2^*, H_3^*\}$, 其中每个 H_i^* ($1 \leq i \leq 3$) 是 G^* 的偶子图. 通过加入 A 的某些边到 H_i^* , 我们可将每个 H_i^* 扩充成 G 的一个偶子图 H_i , 使得 $E(H_i^*) \subseteq E(H_i)$, $1 \leq i \leq 3$. 令 $H'_i = H_i \oplus A$, 则 $\{H_i, H'_i\}$ 覆盖 A 中的每条边恰好一次, $1 \leq i \leq 3$. 不难看出,

$$\{H_1, H'_1, H_2, H'_2, H_3, H'_3\} \quad (4.1)$$

覆盖 $E(G) \setminus E(A) = E(G^*)$ 中的每条边恰好 4 次, 覆盖 A 中的每条边恰好 3 次. 因此, $\{H_1, H'_1, H_2, H'_2, H_3, H'_3\} \cup A$ 是 G 的 7 个偶子图, 覆盖 G 中每条边恰好 4 次. $\square$

Goddyn¹⁾ 猜想每个 2- 边连通图应该存在由偶子图构成的 6- 覆盖, Fan 证实了此猜想.

定理 10^[10] (6- 覆盖定理) 每个 2- 边连通图都存在由偶子图构成的 6- 覆盖.

证明 设 G 为 2- 边连通图. 根据定理 6, G 中存在偶子图 A , 其边集可分为三个不交的子集 A_1 、 A_2 和 A_3 , 使得 $G - A_i$ ($1 \leq i \leq 3$) 有处处非零 3- 流. 根据整数流的定义, 3- 流也是 4- 流. 由引理 5, 令 B_1^i 、 B_2^i 和 B_3^i 是三个偶子图, 构成 $G - A_i$ ($1 \leq i \leq 3$) 的一个 2- 覆盖. 那么,

$$\{B_1^1, B_2^1, B_3^1; B_1^2, B_2^2, B_3^2; B_1^3, B_2^3, B_3^3\}$$

是 G 的 9 个偶子图, 它们覆盖 $E(G) \setminus E(A)$ 中的每条边恰好 6 次, 覆盖 $E(A)$ 中每条边恰好 4 次. 将偶图 A 与这 9 个偶子图分别作对称差, 则

$$\{B_1^i \oplus A, B_2^i \oplus A, B_3^i \oplus A, 1 \leq i \leq 3; A\}$$

¹⁾Goddyn L. Cycle covers in graphs. A talk in Workshop on Cycles and Rays, Montreal, 1987.

是 G 的 10 个偶子图, 覆盖 G 的每条边恰好 6 次. $\square$

由于任何大于 2 的偶数均可表为 4 的倍数和 6 的倍数的组合, 4- 覆盖和 6- 覆盖定理给出: 对任意大于 2 的偶数 k , 每个 2- 边连通图都存在由偶子图构成的 k - 覆盖. 唯独 $k = 2$ 的情形没有解决, 这就是图论领域著名的猜想:

猜想 7 ^[20, 21] (偶图 2- 覆盖猜想) 每个 2- 边连通图都存在由偶子图构成的 2- 覆盖.

偶图构成的 2- 覆盖也称为圈双覆盖, 这是因为每个偶图均有由圈构成的 1- 覆盖 (分解成边不交的圈). 因此, 偶图 2- 覆盖猜想也称为圈双覆盖猜想: 每个 2- 边连通图存在一组圈, 使得每条边恰好出现在两个圈上.

图中包含所有点的圈 (路) 称为 Hamilton 圈 (路). 显然, 如果一个图有 Hamilton 圈, 则一定有 Hamilton 路. 容易证明: 如果图 G 有 Hamilton 圈, 则 G 有 Fulkerson 覆盖. 对于偶图 2- 覆盖猜想, 我们下面的定理:

定理 11 ^[22] 设 G 为 2- 边连通图, 如果 G 有 Hamilton 路, 则 G 有偶图构成的 2- 覆盖.

也就是说, 圈双覆盖猜想对有 Hamilton 路的图成立. 而对于 Fulkerson 猜想, 下面的特殊情形至今无大进展.

猜想 8 设 G 为 2- 边连通图, 如果 G 有 Hamilton 路, 则 G 有 Fulkerson 覆盖.

4.2 最小偶图覆盖

$\{H_1, H_2, \dots, H_s\}$ 是图 G 的一个偶子图覆盖, 称 $\sum_{i=1}^s |E(H_i)|$ 为此覆盖的长度. 令 $cc(G)$ 代表 2- 边连通图 G 的所有偶子图覆盖长度的最小值. 最小偶图覆盖问题就是确定 $cc(G)$ 的最小上界, 它是偶图覆盖领域的重要研究课题. Alon 和 Tarsi 提出了下述猜想:

猜想 9 ^[23] 对所有 2- 边连通图 G , $cc(G) \leq \frac{7}{5}|E(G)|$.

Jamshy 和 Tarsi 给出了最小偶图覆盖与偶图 2- 覆盖之间的关系:

定理 12 ^[24] 若猜想 9 成立, 则偶图 2- 覆盖猜想成立.

下述定理分别由两组数学家独立完成.

定理 13 ^[9, 23] 对所有 2- 边连通图 G , $cc(G) \leq \frac{5}{3}|E(G)|$.

证明 设 G 为 2- 边连通图, f 是 G 的一个处处非零整数 8- 流, A 是由 $E_{\text{odd}}(f)$ 构成的偶子图. 第 4.1 小节 4- 覆盖定理的证明过程中, (4.1) 中的 6 个偶子图 $\{H_1, H'_1, H_2, H'_2, H_3, H'_3\}$ 覆盖 $E(G) \setminus E(A)$ 中的每条边恰好 4 次, 覆盖 $E(A)$ 中的每条边恰好 3 次. 所以,

$$\sum_{i=1}^3 (|E(H_i)| + |E(H'_i)|) = 4|E(G)| - |E(A)|.$$

根据 $\{H_i, H'_i\}$ ($1 \leq i \leq 3$) 的构造, $\{H_1, H'_1, H_2\}$ 和 $\{H'_2, H_3, H'_3\}$ 均是 G 的一个覆盖, 其中较小者的长度至多是上述等式中数值的一半, 即

$$cc(G) \leq \frac{1}{2}(4|E(G)| - |E(A)|) = 2|E(G)| - \frac{1}{2}|E(A)|.$$

根据引理 2, 选择 f 使得 $|E_{\text{odd}}(f)| \geq \frac{2}{3}|E(G)|$, 即 $|E(A)| \geq \frac{2}{3}|E(G)|$, 因此,

$$cc(G) \leq 2|E(G)| - \frac{1}{3}|E(G)| = \frac{5}{3}|E(G)|.$$

证毕. $\square$

已 30 多年了, 定理 13 中的上界 $\frac{5}{3}|E(G)|$ 仍未被改进, 只是在附加额外条件的情形下, 得到了更好的上界.

定理 14 ^[25] 如果 G 有处处非零 5- 流, 则

$$cc(G) \leq \frac{8}{5}|E(G)|.$$

定理 15 ^[26] 如果 3- 流猜想成立, 则

$$cc(G) \leq \frac{44}{27}|E(G)|.$$

定理 16 ^[27] 如果 G 有 Fulkerson 覆盖, 则

$$cc(G) \leq \frac{22}{15}|E(G)|.$$

Kaiser 等^[28] 证明了, 若 G 是一个无环的 2- 边连通图, 且每点的度数至少为 3, 则

$$cc(G) \leq \frac{44}{27}|E(G)|.$$

这个上界被 Fan^[29] 改进到 $\frac{218}{135}|E(G)|$. 在允许环出现的情形下, Fan^[29] 证明了, 若 G 是 2- 边连通图, 且每点的度数至少为 3, 则

$$cc(G) < \frac{278}{171}|E(G)|.$$

这个成果可以应用到存在度数为 2 的点的图: 对每个度数为 2 的点加一个环, 该点的度数变成 4.

作为本节的结束, 我们提出下述问题:

问题 2 如果 G 有 Fulkerson 覆盖, 能否推出 $cc(G) \leq \frac{7}{5}|E(G)|$?

4.3 圈、路覆盖

通过解决哥尼斯堡七桥问题, Euler 创立了图论这一数学新分支. Euler 1736 年提交的有关哥尼斯堡七桥问题的论文被认为是图论领域的开篇之作, 该文给出的定理被后人称为 Euler 定理, 即一个连通图存在一条从一点出发经过每条边恰好一次后回到该点的闭迹的充分必要条件是图每个点的度数均为偶数. 为纪念 Euler, 后人将这种闭迹称为 Euler 回路, 存在 Euler 回路的图称为 Euler 图. 显然, Euler 图就是连通偶图. Euler 图中的 Euler 回路给出了图的一种分解: 分解成边不交的圈, 即 Euler 图存在圈的 1- 覆盖, 但没能回答圈的个数问题. Euler 图的圈 1- 覆盖需要多少个圈? 两百多年来, 这个问题一直困扰着图论学家们. Hajós 提出了下述著名猜想:

猜想 10 (Hajós 猜想) n 个点的简单 Euler 图存在由至多 $\frac{n}{2}$ 个圈构成的 1- 覆盖.

许多著名数学家, 如 Erdős (Wolf 奖得主) 等都考虑过这个问题. 他们认为 Hajós 猜想中的系数 $\frac{1}{2}$ 太难了, 能否把猜想减弱, 寻找一个与点数 n 无关的常数 c , 使得 n 个点的简单 Euler 图存在由至多 cn 个圈构成的 1- 覆盖.

猜想 11 (Erdős-Goodman-Pósa 猜想) 存在常数 c , 使得 n 个点的简单 Euler 图存在由至多 cn 个圈构成的 1- 覆盖.

这个问题至今也没有解决. 匈牙利数学家 Pyber 早年的时候一直在研究这个猜想, 后来放弃了, 转去做有限群理论. 作为一种告别, Pyber^[30] 在 1991 年发表了一篇有关这个问题的综述文献, 认为 Hajós 猜想的解决目前是不可及的 (out of reach at present).

根据 Euler 定理, 只有偶图才存在圈的 1- 覆盖, 对于一般的图, 若有奇度数点, 则不存在圈的 1- 覆盖. 但任何一个图一定存在路的 1- 覆盖, 最简单的做法, 把每条边作为一条路, 则任意 m 条边的图存在由 m 条路构成的 1- 覆盖. 于是, 一个很自然的问题是, 若寻求数目尽可能少的路所构成的 1- 覆盖, 该覆盖含有多少条路? 这是图论领域的一个基本问题. 若以路的数目少为优, 将每条边作为路的 1- 覆盖显然不是最优的. Gallai 认为在最优的情形下, n 个点的连通简单图最多只需要 $\frac{n+1}{2}$ 条路.

猜想 12 (Gallai 猜想) n 个点的连通简单图存在由至多 $\frac{n+1}{2}$ 条路构成的 1- 覆盖.

Lovász^[31] 研究过这个著名猜想, 他证明了, 若同时使用圈和路, 则 n 个点的连通简单图存在由至多 $\frac{n}{2}$ 个圈和路构成的 1- 覆盖.

定理 17 (Lovász 定理) n 个点的连通简单图存在由至多 $\frac{n}{2}$ 个圈和路构成的 1- 覆盖.

Lovász 长期从事图论研究, 曾经担任国际数学联盟主席, 51 岁时获得 Wolf 奖. 他曾经在微软研究院任职多年, 致力于数学的应用研究. 为庆祝他的 60 岁生日, 国际上举办了一个大规模的学术会议, 会后出版了会议论文集 *Building Bridge*, 赞誉他在数学与计算机科学之间建立了一座桥梁.

前面提到的这些猜想是寻求圈或路最少的 1- 覆盖, 关键是这些圈或路须边不交. 因为难度太大, 人们退而求其次: 允许这些圈或路有公共边, 将 1- 覆盖问题减弱为一般的覆盖问题. 1980 年, Chung^[32] 提出了两个猜想: (1) n 个点的简单 Euler 图存在由至多 $\frac{n}{2}$ 个圈构成的覆盖; (2) n 个点的连通简单图存在由至多 $\frac{n+1}{2}$ 条路构成的覆盖. Fan^[33,34] 证明了这两个猜想成立.

致谢 湖南第一师范学院陈静博士对此文的写作给予了帮助, 谨此致谢.

参考文献

- Whitney H. A theorem on graphs. *Ann of Math* (2), 1931, 32: 378–390
- Appel K, Haken W. Every planar map is four colorable, I: Discharging. *Illinois J Math*, 1977, 21: 429–490
- Appel K, Haken W, Koch J. Every planar map is four colorable, II: Reducibility. *Illinois J Math*, 1977, 21: 491–567
- St Nash-Williams C J A. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. *J Lond Math Soc* (2), 1961, 36: 445–450
- Tutte W T. On the problem of decomposing a graph into n connected factors. *J Lond Math Soc* (2), 1961, 36: 221–230
- Jaeger F. Flows and generalized coloring theorems in graphs. *J Combin Theory Ser B*, 1979, 26: 205–216
- Seymour P D. Progress on the four-color problem. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Zürich. Basel: Birkhäuser-Verlag, 1994, 183–195
- Seymour P D. Nowhere-zero 6-flows. *J Combin Theory Ser B*, 1981, 30: 130–135
- Bermond J C, Jackson B, Jaeger F. Shortest coverings of graphs with cycles. *J Combin Theory Ser B*, 1983, 35: 297–308
- Fan G. Integer flows and cycle covers. *J Combin Theory Ser B*, 1992, 54: 113–122
- Tutte W T. A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canad J Math*, 1954, 6: 80–91
- Tutte W T. A class of abelian groups. *Canad J Math*, 1956, 8: 13–28
- Thomassen C. The weak 3-flow conjecture. *J Combin Theory Ser B*, 2012, 102: 521–529
- Lovász L M, Thomassen C, Wu Y Z, et al. Nowhere-zero 3-flows and modulo k -orientations. *J Combin Theory Ser B*, 2013, 103: 587–598
- Hao R, Niu J, Wang X, et al. A note on Berge-Fulkerson coloring. *Discrete Math*, 2009, 309: 4235–4240
- Chen F, Fan G. Fulkerson-covers of hypohamiltonian graphs. *Discrete Appl Math*, 2015, 186: 66–73
- Fulkerson D R. Blocking and antiblocking pairs of polyhedra. *Math Program*, 1971, 1: 168–194
- Edmonds J. Maximum matching and a polyhedron with 0, l -vertices. *J Res Nat Bur Standards Sect B*, 1965, 69B: 125–130
- Seymour P D. On multi-colourings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte. *Proc Lond Math Soc* (3), 1979, 38: 423–460
- Seymour P D. Sums of circuits. In: *Graph Theory and Related Topics*. New York: Academic Press, 1979, 341–355
- Szekeres G. Polyhedral decompositions of cubic graphs. *Bull Austral Math Soc*, 1973, 8: 367–387
- Tarsi M. Semi-duality and the cycle double cover conjecture. *J Combin Theory Ser B*, 1986, 41: 332–340

- 23 Alon N, Tarsi M. Covering multigraphs by simple circuits. *SIAM J Algebr Discrete Methods*, 1985, 6: 345–350
- 24 Jamshy U, Tarsi M. Short cycle covers and the cycle double cover conjecture. *J Combin Theory Ser B*, 1992, 56: 197–204
- 25 Jamshy U, Raspaud A, Tarsi M. Short circuit covers for regular matroids with a nowhere zero 5-flow. *J Combin Theory Ser B*, 1987, 42: 354–357
- 26 Fan G. Tutte's 3-flow conjecture and short cycle covers. *J Combin Theory Ser B*, 1993, 57: 36–43
- 27 Fan G, Raspaud A. Fulkerson's conjecture and circuit covers. *J Combin Theory Ser B*, 1994, 61: 133–138
- 28 Kaiser T, Král D, Lidický B, et al. Short cycle covers of graphs with minimum degree three. *SIAM J Discrete Math*, 2010, 24: 330–355
- 29 Fan G. Integer 4-flows and cycle covers. *Combinatorica*, doi: 10.1007/s00493-016-3379-9, 2016
- 30 Pyber L. Covering the edges of a graph. *Colloq Math Soc János Bolyai*, 1991, 60: 583–610
- 31 Lovász L. On covering of graphs. In: *Theory of Graphs*. New York: Academic Press, 1968, 231–236
- 32 Chung F R K. On the coverings of graphs. *Discrete Math*, 1980, 30: 89–93
- 33 Fan G. Subgraph coverings and edge switchings. *J Combin Theory Ser B*, 2002, 84: 54–83
- 34 Fan G. Covers of eulerian graphs. *J Combin Theory Ser B*, 2003, 89: 173–187

Integer flows and subgraph covers

FAN GengHua

Abstract Integer flows and subgraph covers are two important subjects in graph theory. They are closely related to the famous four color problem, which is equivalent to the integer 4-flow problem in planar graphs. A graph has an integer k -flow if for some orientation, there is a function from its edge set to an abelian group such that at each vertex the sum of the values on the edges into the vertex is equal to the sum of the values on the edges out of the vertex. Integer flows are related to several well-known problems in other fields of mathematics, such as lonely runner problem in combinatorics, diophantine approximation in number theory, view obstruction in geometry and additive basis in linear vector space. Four color problem is also equivalent to the problem of Eulerian subgraph covering of planar graphs: Every 2-edge-connected planar graph has three Eulerian subgraphs covering each edge precisely twice. The well-known Fulkerson conjecture claims that every 2-edge-connected graph (not necessary to be planar) has six Eulerian subgraphs covering each edge precisely four times. In this paper, we shall give a brief survey of the two subjects and other related problems.

Keywords integer flow, subgraph cover, four color problem, Eulerian graph, cycle and path cover

MSC(2010) 05C21, 05C38, 05C40, 05C45, 05C70

doi: 10.1360/N012016-00177