Finsler 度量测度空间上的容量

王巍翰, 赵唯*

华东理工大学数学学院, 上海 200237

E-mail: y30190199@mail.ecust.edu.cn, szhao_wei@yahoo.com

收稿日期: 2021-08-30; 接受日期: 2022-01-30; 网络出版日期: 2022-03-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11761058) 和上海市自然科学基金 (批准号: 19ZR1411700 和 21ZR1418300) 资助项目

摘要 本文在 Finsler 度量测度空间上推广容量 (capacity) 理论, 并研究对应的 Sobolev 空间. 特别地, 通过容量, 本文给出 Finsler 度量测度空间上零边值 Sobolev 空间的完整刻画, 并由此建立闭 Finsler 度量测度空间上的一个最优 Hardy 型不等式.

关键词 Finsler 度量测度空间 容量 Sobolev 空间 Hardy 型不等式

MSC (2020) 主题分类 46E36, 26D10, 53C21

1 引言

众所周知, Sobolev 容量 (capacity) (以下将 Sobolev 容量简称为容量) 是 Sobolev 空间上的一个重要概念, 它不但在零边值 Sobolev 空间的研究中起着至关重要的作用, 而且被广泛用于拟线性椭圆微分方程、非线性势理论和极值问题等研究中 (参见文献 [1–5]). 在 Euclid 情形下, 给定 $p \in (1, +\infty)$, 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的 p -容量定义为

$$\text{Cap}_p(E) := \inf_{u \in \mathcal{A}(E)} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \inf_{u \in \mathcal{A}(E)} \int_{\mathbb{R}^n} (|u|^p + |Du|^p) dx,$$

其中 $\mathcal{A}(E) = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) : u \text{ 在 } E \text{ 的某个邻域上满足 } u \geq 1\}$. 若 $\mathcal{A}(E) = \emptyset$, 则设 $\text{Cap}_p(E) := +\infty$. 特别地, 对于零边值 Sobolev 空间, 通过 p -容量, 可以证明以下结果.

定理 1.1 ^[1] 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, 而 E 是 Ω 的闭子集. 则

$$W_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega \setminus E) \Leftrightarrow \text{Cap}_p(E) = 0.$$

上述定理表明, 如果 $\text{Cap}_p(E) = 0$, 则 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上的函数可以用 $C_0^\infty(\Omega \setminus E)$ 上的函数来逼近. 通过这个性质, 许多重要的不等式或估计可以推广到更大的函数空间上 [6]. 此外, 由于函数空间理论和微分方程理论的发展, 容量已被推广并应用于研究权重 Sobolev 空间 [7] 和变换指数的 Sobolev 空间上 [8].

英文引用格式: Wang W H, Zhao W. On the capacity of Finsler metric measure spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 481–498, doi: 10.1360/SSM-2021-0170

随着几何分析的迅猛发展, 数学家已经在 Riemann 几何的框架下定义了容量, 并做了大量深入的研究. 其中一个重要的工作是对曲面容量的估计, 并由此将特殊的曲面进行分类 (参见文献 [9, 10]); 另一个有趣的工作是借助容量研究 Riemann 流形上的 Hardy 不等式, 特别地, 现在已经在闭 Riemann 流形上建立了多个最优 Hardy 型不等式 [11, 12]. 此外, 容量还是将等周不等式与 Sobolev 不等式联系起来的一座桥梁 [13]. 参见文献 [14–16] 可了解更多关于 Riemann 几何中容量的工作.

陈省身先生说过, Finsler 几何是没有二次型限制的 Riemann 几何 [17]. 鉴于在 Riemann 情形下容量的研究已取得了丰硕的成果, 因此在 Finsler 几何的范畴下探索容量是自然的, 也是有意义的. 然而据我们所知, 除了一些零星的工作外, 目前在 Finsler 情形下还没有关于容量的系统工作. 这是因为 Finsler 几何与 Riemann 几何之间还是有着本质的不同. 首先, Finsler 度量可以是不可反的 (nonreversible), 由此定义的 Sobolev 空间可能不是一个向量空间 [18]. 其次, Finsler 流形上没有典范测度, 不同的测度往往会给出不同的几何性质. 例如, 分别装备 Busemann-Hausdorff 测度和 Holmes-Thompson 测度的 Finsler 流形的极小子流形是不同的 [19]. 最后, 由于 Finsler 度量的基本张量与方向有关, 这使得梯度算子是非线性的 [20], 因而 Sobolev 模就不适合用梯度来定义.

由此可见, 在 Finsler 几何范畴下研究容量是非常具有挑战性的, 而本文的目的正是要在 Finsler 度量测度空间上发展对应的容量理论. 为了叙述文中的主要结果, 首先引入一些记号. 一个可反 Finsler 度量测度空间 $(M, F, d\mathbf{m})$ 是一个装备光滑正测度 $d\mathbf{m}$ 的可反 Finsler 流形 (M, F) . 给定 $p \in (1, +\infty)$, 对任意开集 $\Omega \subset M$, 定义其上的 Sobolev 空间 $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 相对以下模的完备化:

$$\|u\|_{p,\mathbf{m}} := \left[\int_{\Omega} (|u|^p + F^{*p}(du)) d\mathbf{m} \right]^{\frac{1}{p}},$$

其中 F^* 是 F 在 T^*M 上的对偶 Finsler 度量. 鉴于 F 是可反的, 易见 $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$ 是一个 Banach 空间. 尽管此空间是通过紧支函数定义的, 但是与 Riemann 几何的情形类似 (参见文献 [21]), 全空间 M 上的 Sobolev 空间也可以通过非紧支函数空间给出.

定理 1.2 对任意完备可反 Finsler 度量测度空间 $(M, F, d\mathbf{m})$, 总成立

$$W_0^{1,p}(M, \mathbf{m}) = W^{1,p}(M, \mathbf{m}) := \overline{\{u \in C^\infty(M) : \|u\|_{p,\mathbf{m}} < \infty\}}^{\|\cdot\|_{p,\mathbf{m}}}.$$

有了 Sobolev 空间后, 进而可以定义对应的容量. 具体而言, 对任意集合 $E \subset M$, 其 p -容量定义为

$$\text{Cap}_{p,\mathbf{m}}(E) := \inf_{u \in \mathcal{A}(E)} \|u\|_{p,\mathbf{m}}^p,$$

其中 $\mathcal{A}(E) = \{u \in W^{1,p}(M, \mathbf{m}) : \text{在 } E \text{ 的某个邻域上 } u \geq 1\}$. 如果 $\mathcal{A}(E) = \emptyset$, 则记 $\text{Cap}_p(E) := +\infty$. 可以证明 $\text{Cap}_{p,\mathbf{m}}$ 不但是 M 上的一个正则外测度, 而且定理 1.1 在 Finsler 情形下仍成立, 即有以下结果.

定理 1.3 设 $(M, F, d\mathbf{m})$ 是完备可反 Finsler 度量测度空间, 并设 $\Omega \subset M$ 是开集, 而 E 是 Ω 的闭子集. 则

$$W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m}) = W_0^{1,p}(\Omega \setminus E, \mathbf{m}) \Leftrightarrow \text{Cap}_{p,\mathbf{m}}(E) = 0.$$

该结果表明, 通过除去一个零 p -容量的闭子集, $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$ 可以用比它更小的空间来刻画. 另一方面, 通过 $\text{Cap}_{p,\mathbf{m}}$, 还可以用更大的空间 $W^{1,p}(M, \mathbf{m})$ 中的函数来描述 $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$. 为此, 先引入两个

概念 (参见定义 4.4): 如果函数 u 在一个 p -容量任意小的集合外总是连续的, 则称 u 是 p -拟连续的; 如果函数 u 在一个 p -容量为 0 的集合外总成立某个性质, 则称 u 是 p -拟处处成立该性质. 于是有以下结果.

定理 1.4 设 (M, F, dm) 是完备可反 Finsler 度量测度空间, 并且设 $\Omega \subset M$ 是开集. 则函数 $u \in W_0^{1,p}(\Omega, m)$ 的充要条件是存在一个 p -拟连续函数 $u^* \in W^{1,p}(M, m)$, 使得

$$u^* = u \text{ 在 } \Omega \text{ 上 } m\text{-几乎处处成立, } u^* = 0 \text{ 在 } M \setminus \Omega \text{ 上 } p\text{-拟处处成立.}$$

定理 1.4 详细地描述了零边值 Sobolev 空间 $W_0^{1,p}(\Omega, m)$ 的结构. 下面给出定理 1.4 的一个有趣的应用. 到目前为止, Hardy 不等式已被推广到非紧的带有非正旗曲率的 Finsler 度量测度空间上 [22–25], 但在闭 (即紧无边) 的情形尚无任何结果. 然而通过定理 1.4, 可得到以下 Hardy 型不等式.

定理 1.5 设 (M, F, dm) 是一个 n 维闭可反 Finsler 度量测度空间. 任取一个固定点 $o \in M$, 定义

$$r(x) := d_F(o, x), \quad C^\infty(M, o) := \{u \in C^\infty(M) : u(o) = 0\}.$$

假设对某个 $N \in [n, +\infty)$, 有 $\text{Ric}_N \geq 0$. 则对任意 $1 < p \neq N$ 和 $\beta < -N$, 若 $p + \beta > -n$, 则成立

$$\int_M F^p(\nabla u) r^{p+\beta} dm \geq \left(\frac{|N + \beta|}{p} \right)^p \int_M |u|^p r^\beta dm, \quad \forall u \in C^\infty(M, o). \quad (1.1)$$

特别地, 当 $N = n$ 时, 不等式 (1.1) 是最优的, 即

$$\left(\frac{|n + \beta|}{p} \right)^p = \inf_{u \in C^\infty(M, o) \setminus \{0\}} \frac{\int_M F^p(\nabla u) r^{p+\beta} dm}{\int_M |u|^p r^\beta dm}. \quad (1.2)$$

值得注意的是, 根据 Myers 紧定理 [26, 27], N -Ricci 曲率有正下界的 Finsler 流形一定是闭的, 因此定理 1.5 的假设是自然的. 另外, 尽管在非紧的情形下 Hardy 不等式都是对于 $C_0^\infty(M)$ 建立的 (参见文献 [22–25]), 但在闭的情形下并非如此. 事实上, 由于流形是闭的, 我们有 $C_0^\infty(M) = C^\infty(M)$, 所以常值函数也属于 $C_0^\infty(M)$. 然而众所周知 Hardy 不等式无法对常值函数成立. 为了克服这个拓扑障碍, 我们引入了函数空间 $C^\infty(M, o)$. 从 (1.2) 来看, 这种引入是合适的.

此外, 尽管本文都假设 Finsler 度量是可反的, 但这只是为了方便起见. 事实上, 本文中的绝大多数结果以及讨论对于可反系数 (reversibility) 有限的 Finsler 度量测度空间仍有效. 特别地, 定理 1.2–1.4 在这样情形下依然成立 (参见定理 5.2). 值得注意的是, “可反系数有限”这一条件是必要的, 否则对应的 Sobolev 空间未必是向量空间 (参见文献 [18]), 这将导致前面的结果失效.

本文余下内容的安排如下: 第 2 节回顾 Finsler 度量测度空间的背景知识. 第 3 节研究 Finsler 度量测度空间上的 Sobolev 空间, 并证明定理 1.2. 第 4 节探索 Sobolev 容量的性质. 第 5 节证明定理 1.3–1.5, 并讨论不可反的情形.

2 Finsler 度量测度空间

本节简单回顾 Finsler 几何的背景知识, 更多的细节可参见文献 [20, 26].

设 M 是 n 维光滑连通流形, 且设 $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ 是对应的切丛. 如果一个二元组 (M, F) 满足以下条件, 则称其为 Finsler 流形:

- (1) $F \in C^\infty(TM \setminus \{0\})$;
- (2) 对任意 $k \in \mathbb{R}_+$ 以及 $(x, y) \in TM$, 成立 $F(x, ky) = kF(x, y)$;
- (3) 对所有 $(x, y) \in TM \setminus \{0\}$, 矩阵 $g_{ij}(x, y) := [\frac{1}{2}F^2]_{y^i y^j}(x, y)$ 是正定的.

特别地, Euler 定理给出 $F(x, y) = \sqrt{g_{ij}(x, y)y^i y^j}$. 如果 $g_{ij}(x, y)$ 与 y 无关, 则 F 是一个 Riemann 度量模.

一个 Finsler 流形 (M, F) 的可反系数定义为

$$\lambda_F(M) := \sup_{x \in M} \lambda_F(x), \quad \text{其中 } \lambda_F(x) = \sup_{y \in T_x M \setminus \{0\}} \frac{F(x, -y)}{F(x, y)}.$$

如果 $\lambda_F(M) = 1$, 则称 F 是可反的, 此时对任意 $k \in \mathbb{R}$, 成立 $F(x, ky) = |k|F(x, y)$.

由于本文主要研究可反的 Finsler 流形, 所以当无特殊说明时, 下文中的“Finsler 流形”或“Finsler 度量测度空间”都是指可反 Finsler 流形或可反 Finsler 度量测度空间.

定义测地系数为

$$G^i(y) := \frac{1}{4}g^{il}(y)\left\{2\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(y) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(y)\right\}y^j y^k.$$

所谓的 Riemann 曲率 R_y 是一族切空间上的线性变换. 具体而言, $R_y := R_k^i(y) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k$, 其中

$$R_k^i(y) := 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial x^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k},$$

对于非零向量 y , 它的 Ricci 曲率定义为 $\text{Ric}(y) := \frac{R_k^i(y)}{F^2(y)}$.

M 上的对偶 Finsler 度量 F^* 定义为

$$F^*(\eta) := \sup_{X \in T_x M \setminus \{0\}} \frac{\eta(X)}{F(X)}, \quad \forall \eta \in T_x^* M.$$

不难看出, F^* 是 T^*M 上的 Finsler 度量. 特别地, 对于任意 $X \in T_x M$, $\eta \in T_x^* M$, 有

$$\langle X, \eta \rangle \leq F(X)F^*(\eta), \quad (2.1)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_x M \times T_x^* M \rightarrow \mathbb{R}$ 表示对合, 即 $\langle X, df \rangle = X(f)$.

另外, Legendre 变换 $\mathfrak{L} : TM \rightarrow T^*M$ 定义为

$$\mathfrak{L}(X) := \begin{cases} g_X(X, \cdot), & \text{若 } X \neq 0, \\ 0, & \text{若 } X = 0. \end{cases}$$

特别地,

$$F^*(\mathfrak{L}(X)) = F(X).$$

给定 $f \in C^1(M)$, 其梯度定义为 $\nabla f = \mathfrak{L}^{-1}(df)$. 因此, $\langle X, df \rangle = g_{\nabla f}(\nabla f, X)$. 需要注意的是, ∇ 一般是非线性的, 也即 $\nabla(f+h) \neq \nabla f + \nabla h$.

设 $\zeta : [0, 1] \rightarrow M$ 为局部 Lipschitz 连续曲线. 则 ζ 的长度定义为

$$L_F(\zeta) := \int_0^1 F(\dot{\zeta}(t))dt.$$

距离函数 $d_F: M \times M \rightarrow [0, +\infty)$ 定义为 $d_F(x_1, x_2) := \inf L_F(\zeta)$, 其中下确界取遍所有起点为 x_1 终点为 x_2 的局部 Lipschitz 连续曲线 $\zeta: [a, b] \rightarrow M$. 给定 $R > 0$, 以 p 为圆心、以 R 为半径的度量球定义为 $B_p(R) := \{x \in M : d_F(p, x) < R\}$.

如果 M 中一条曲线 $t \mapsto \gamma(t)$ 满足方程

$$\frac{d^2 \gamma^i}{dt^2} + 2G^i \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0,$$

则称之为 (常速率) 测地线. 下文常用 $\gamma_y(t)$ 表示满足 $\dot{\gamma}_y(0) = y$ 的测地线.

如果 Finsler 流形 (M, F) 的每条测地线 $\gamma(t)$ ($0 < t < 1$) 都可以扩张为一条定义在 $-\infty < t < +\infty$ 上的测地线, 则称 (M, F) 是完备的. 用三元组 $(M, F, d\mathbf{m})$ 表示装备了光滑测度 $d\mathbf{m}$ 的完备 Finsler 流形 (M, F) , 并称此三元组 $(M, F, d\mathbf{m})$ 为一个 Finsler 度量测度空间. 在局部坐标 (x^i) 下, 用 $\sigma(x)$ 表示 $d\mathbf{m}$ 的密度函数, 也即

$$d\mathbf{m} := \sigma(x) dx^1 \cdots dx^n.$$

由此可见, $d\mathbf{m}$ 是局部有限的 Borel 测度. 特别地, Busemann-Hausdorff 测度 $d\mathbf{m}_{BH}$ 和 Holmes-Thompson 测度 $d\mathbf{m}_{HT}$ 分别定义为 (参见文献 [19, 20])

$$\begin{aligned} d\mathbf{m}_{BH} &:= \frac{\text{vol}(\mathbb{B}^n)}{\text{vol}(B_x M)} dx^1 \cdots dx^n, \\ d\mathbf{m}_{HT} &:= \left(\frac{1}{\text{vol}(\mathbb{B}^n)} \int_{B_x M} \det g_{ij}(x, y) dy^1 \cdots dy^n \right) dx^1 \cdots dx^n, \end{aligned}$$

其中, $\mathbb{B}^n$ 是 n 维 Euclid 单位球, $B_x M := \{y \in T_x M : F(x, y) < 1\}$ 是 $T_x M$ 中的 Finsler 单位球.

给定光滑向量场 X , 它相对于 $d\mathbf{m}$ 的散度定义为

$$\text{div}_{\mathbf{m}} X d\mathbf{m} := d(X \lrcorner d\mathbf{m}),$$

其中 $\lrcorner$ 表示内乘 (interior product). 特别地, 若 M 是紧的, 则成立散度定理

$$\int_M \text{div}_{\mathbf{m}}(X) d\mathbf{m} = \int_{\partial M} g_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X) dA, \quad (2.2)$$

其中, $dA = \mathbf{n} \lrcorner d\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ 是 ∂M 上的单位外法向量场.

Finsler 度量测度空间 $(M, F, d\mathbf{m})$ 的畸变 τ 和 S-曲率 $\mathbf{S}$ 分别定义为

$$\tau(y) := \log \frac{\sqrt{\det g_{ij}(x, y)}}{\sigma(x)}, \quad \mathbf{S}(y) := \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} [\tau(\dot{\gamma}_y(t))], \quad \text{当 } y \in T_x M \setminus \{0\},$$

其中 $\gamma_y(t)$ 为一条满足 $\dot{\gamma}_y(0) = y$ 的测地线.

定义球丛 $SM := \bigcup_{x \in M} S_x M := \bigcup_{x \in M} \{y \in T_x M : F(x, y) = 1\}$. 根据文献 [27] 可知, Finsler 度量测度空间 $(M, F, d\mathbf{m})$ 上可以定义权重 Ricci 曲率 Ric_N . 具体而言, 给定 $y \in SM$, 定义

$$\text{Ric}_N(y) := \begin{cases} \text{Ric}(y) + \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \mathbf{S}(\dot{\gamma}_y(t)) - \frac{\mathbf{S}^2(y)}{N-n}, & \text{若 } N \in (n, +\infty), \\ \lim_{L \downarrow n} \text{Ric}_L(y), & \text{若 } N = n, \\ \text{Ric}(y) + \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \mathbf{S}(\dot{\gamma}_y(t)), & \text{若 } N = +\infty. \end{cases}$$

特别地, 只有当 $\mathbf{S} = 0$ 时, 才可以定义 Ric_n 的下界.

3 Finsler 度量测度空间上的 Sobolev 空间

本节研究 Finsler 度量测度空间上的 Sobolev 空间. 首先, 引入 Sobolev 空间的定义.

定义 3.1 设 $(M, F, d\mathbf{m})$ 是 Finsler 度量测度空间, 且设 $\Omega \subset M$ 为开集. 给定 $p \in (1, +\infty)$, 在 $C^\infty(\Omega)$ 上定义如下的范数:

$$\|u\|_p := \|u\|_{p, \mathbf{m}} := \left(\int_{\Omega} |u|^p d\mathbf{m} + \int_{\Omega} F^{*p}(du) d\mathbf{m} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

记 $C_p^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_p < +\infty\}$. 则 Sobolev 空间 $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$ 和 $W^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$ 分别定义为

$$W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m}) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_p}, \quad W^{1,p}(\Omega, \mathbf{m}) := \overline{C_p^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_p}.$$

再记 $\Gamma_0^\infty(T^*\Omega)$ 为 Ω 上具有紧支集的光滑余切向量场的集合. 定义范数 $[u]_p$ 和 $[\varpi]_p$ 如下:

$$\begin{aligned} [u]_p &:= \left(\int_{\Omega} |u|^p d\mathbf{m} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \\ [\varpi]_p &:= \left(\int_{\Omega} F^{*p}(\varpi) d\mathbf{m} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \varpi \in \Gamma_0^\infty(T^*\Omega). \end{aligned}$$

类似地, 定义 L^p -空间 $L^p(\Omega, \mathbf{m})$ 和 $L^p(T^*\Omega, \mathbf{m})$ 分别为

$$L^p(\Omega, \mathbf{m}) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{[\cdot]_p}, \quad L^p(T^*\Omega, \mathbf{m}) := \overline{\Gamma_0^\infty(T^*\Omega)}^{[\cdot]_p}.$$

通过标准的 L^p -空间理论不难证明以下结果.

定理 3.2 L^p -空间 $L^p(\Omega, \mathbf{m})$ 和 $L^p(T^*\Omega, \mathbf{m})$ 都是自反的 (reflexive). 因此, 若 $\{u_i\}$ 和 $\{du_i\}$ 分别是 $L^p(\Omega, \mathbf{m})$ 和 $L^p(T^*\Omega, \mathbf{m})$ 中的有界列, 则存在相应的子列 $\{u_{i_k}\}$ 和 $\{\varpi_{i_k}\}$ 以及 $u \in L^p(\Omega, \mathbf{m})$ 和 $\varpi \in L^p(T^*\Omega, \mathbf{m})$, 使得 $\{u_{i_k}\}$ 在 $L^p(\Omega, \mathbf{m})$ 中弱收敛于 u , $\{\varpi_{i_k}\}$ 在 $L^p(T^*\Omega, \mathbf{m})$ 中弱收敛于 ϖ .

现在研究 $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$ 的“弱微分”. 通过类似文献 [25, 引理 B.1] 的讨论, 我们有以下结果.

命题 3.3 给定 $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$, 用 ϖ 表示 u 在 $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$ 中的弱微分. 则对于 Ω 上任意具有紧支集的光滑向量场 X , 成立以下散度引理:

$$\int_{\Omega} \langle X, \varpi \rangle d\mathbf{m} = - \int_{\Omega} u \operatorname{div}_{\mathbf{m}} X d\mathbf{m}. \quad (3.1)$$

由 (3.1) 可见, 弱微分 ϖ 正好对应于标准散度定理中的 du . 因此, 下面用 du 表示 u 的弱微分. 特别地, 成立

$$d(\lambda u + \zeta v) = \lambda du + \zeta dv, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m}) \text{ 以及 } \lambda, \zeta \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

另外, 对 Lipschitz 函数, 类似 Riemann 情形的讨论 (参见文献 [21, 引理 2.5]), 我们有以下结果.

引理 3.4 如果 u 是 Ω 上带有紧致支集的 (整体) Lipschitz 函数, 则 $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$.

定理 1.2 的证明 由于 $W^{1,p}(M, \mathbf{m}) = \overline{C_p^\infty(M)}^{\|\cdot\|_p}$, 因此只需证 $C_p^\infty(M) \subset W_0^{1,p}(M, \mathbf{m})$. 为此, 对任意 $u \in C_p^\infty(M)$, 定义一列函数

$$u_j(x) := u(x) f(d_F(o, x) - j), \quad j \in \mathbb{N},$$

其中 $o \in M$ 为一个固定点, 而 $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ 定义为

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } t \leq 0, \\ 1-t, & \text{当 } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{当 } t \geq 1. \end{cases}$$

一方面, 由于 $\text{supp}(u_j) \subset \overline{B_o(j+1)}$, 不难验证 u_j 是有紧支集的 Lipschitz 函数. 因此, 引理 3.4 给出 $u_j \in W_0^{1,p}(M, \mathfrak{m})$. 另一方面, 类似于文献 [21, 定理 2.7] 中的计算, 有

$$[u_j - u]_p \rightarrow 0, \quad [du_j - du]_p \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

因此 $u \in W_0^{1,p}(M, \mathfrak{m})$. 由于 $u \in C_p^\infty(M)$ 是任意的, 所以有 $C_p^\infty(M) \subset W_0^{1,p}(M, \mathfrak{m})$. $\square$

结合定理 1.2 和文献 [25, 引理 B.4] 的证明, 容易验证以下结果.

推论 3.5 如果 $u \in W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$ 在 Ω 中有紧支集, 则 $u|_\Omega \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathfrak{m})$.

为了证明 $W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$ 的自反性, 我们先回顾 Mazur 引理 (参见文献 [28, 引理 10.19]).

引理 3.6 (Mazur 引理) 给定 Banach 空间 X , 如果列 $\{x_i\}$ 在 X 中弱收敛到 x , 则存在强收敛到 x 的凸组合列 $\{\tilde{x}_i\}$, 其中

$$\tilde{x}_i := \sum_{j=i}^{m_i} a_{i,j} x_j, \quad a_{i,j} \geq 0, \quad \sum_{j=i}^{m_i} a_{i,j} = 1.$$

定理 3.7 Sobolev 空间 $W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$ 是自反的. 因此, 对任意有界列 $\{u_i\} \subset W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$, 存在子列 $\{u_{i_k}\}$ 以及 $u \in W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$, 同时满足以下两个条件:

- (i) $\{u_{i_k}\}$ 在 $L^p(M, \mathfrak{m})$ 中弱收敛于 u ;
- (ii) $\{du_{i_k}\}$ 在 $L^p(T^*M, \mathfrak{m})$ 中弱收敛于 du .

证明 由于 $\{u_i\}$ 是 $W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$ 中的有界序列, 由定理 3.2 知, 存在子列 $\{u_{i_k}\}$ 及 $u \in L^p(M, \mathfrak{m})$ 和一个 1- 形式 $\varpi \in L^p(T^*M, \mathfrak{m})$, 使得 $\{u_{i_k}\}$ 在 $L^p(M, \mathfrak{m})$ 中弱收敛于 u , 且 $\{du_{i_k}\}$ 在 $L^p(T^*M, \mathfrak{m})$ 中弱收敛于 ϖ .

考虑装备乘积度量的 Banach 空间 $L^p(M, \mathfrak{m}) \times L^p(T^*M, \mathfrak{m})$. 显然, 在 $L^p(M, \mathfrak{m}) \times L^p(T^*M, \mathfrak{m})$ 中有 (u_{i_k}, du_{i_k}) 弱收敛于 (u, ϖ) . 于是, 通过引理 3.6, 在 $L^p(M, \mathfrak{m}) \times L^p(T^*M, \mathfrak{m})$ 中有如下凸组合列:

$$\sum_{k=l}^{m_l} a_{l,k} (u_{i_k}, du_{i_k}) \rightarrow (u, \varpi), \quad l \rightarrow \infty.$$

令 $v_l := \sum_{k=l}^{m_l} a_{l,k} u_{i_k} \in W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$. 于是在 $L^p(M, \mathfrak{m})$ 中有 $v_l \rightarrow u$, 而在 $L^p(T^*M, \mathfrak{m})$ 中有 $dv_l \rightarrow \varpi$. 因此, $\{v_l\}$ 是 $W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$ 中的 Cauchy 列, 这也同时说明了 $\varpi = du$ 以及 $u \in W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$. $\square$

通过定理 3.7 和控制收敛定理, 可以得到以下两个推论. 这里省略了证明, 因为它们只是标准的讨论但却很冗长.

推论 3.8 如果 $u \in W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$, 则 $u_+ := \max\{u, 0\}$, $u_- := -\min\{u, 0\}$ 以及 $|u| = u_+ + u_-$ 都属于 $W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$. 特别地, $d|u| = \text{sgn}(u)du$.

推论 3.9 给定 $u, v \in W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$, 我们有 $\max\{0, \min\{u, 1\}\} \in W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$. 此外, 对任意的 $\lambda > 0$, 令 $u_\lambda := \max\{-\lambda, \min\{u, \lambda\}\}$. 则 $u_\lambda \in W^{1,p}(M, \mathfrak{m})$ 且 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|u_\lambda - u\|_p = 0$.

给定 $(M, F, \mathbf{m})$ 上的两个函数 f 和 g , 如果 $f = g$ 在 M 上 $\mathbf{m}$ - 几乎处处成立, 则称 f 和 g 是等价的. 按照 L^p - 空间的标准理论, 定义 $L^\infty(M, \mathbf{m})$ 为 M 上有界 $\mathbf{m}$ - 可测函数的等价类构成的空间, 其上范数为

$$[f]_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |f(x)| := \inf_{\Omega: \mathbf{m}(M \setminus \Omega) = 0} \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, \quad f \in L^\infty(M, \mathbf{m}).$$

则 $(L^\infty(M, \mathbf{m}), [\cdot]_\infty)$ 为 Banach 空间 (参见文献 [29, 第四章]).

命题 3.10 给定 $u, v \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 有以下事实成立:

- (i) $\max\{u, v\} \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 且 $F^*(d[\max\{u, v\}]) \leq \max\{F^*(du), F^*(dv)\}$;
- (ii) 如果 $[u]_\infty + [v]_\infty < +\infty$, 则 $uv \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 且 $d(uv) = u dv + v du$.

证明 注意到 $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$, 则利用推论 3.8 和 (3.2), 不难证明 (i). 以下证明 (ii). 通过定理 1.2, 可以在 $C_0^\infty(M)$ 中找到两个列 $\{u_i\}$ 和 $\{v_i\}$, 在范数 $\|\cdot\|_p$ 下分别收敛到 u 和 v . 设 $u_i^* := \max\{-\lambda, \min\{u_i, \lambda\}\}$ 以及 $v_i^* := \max\{-\lambda, \min\{v_i, \lambda\}\}$, 其中 λ 是常数且满足 $[u]_\infty + [v]_\infty \leq \lambda$. 由于 $u_i^* v_i^*$ 是有紧支集的 Lipschitz 函数, 引理 3.4 给出 $u_i^* v_i^* \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$. 此外, 由推论 3.9 可知, $u_i^*, v_i^* \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$ 且在范数 $\|\cdot\|_p$ 下有 $u_i^* \rightarrow u_\lambda = u$, $v_i^* \rightarrow v_\lambda = v$. 因为 $[u]_\infty + [v]_\infty \leq \lambda$, 所以在范数 $[\cdot]_p$ 下有 $u_i^* v_i^* \rightarrow uv$ 和 $d(u_i^* v_i^*) \rightarrow v du + u dv$. 于是, $\{u_i^* v_i^*\}$ 在 $W^{1,p}(M, \mathbf{m})$ 中是一个 Cauchy 列, 且依范数收敛到 uv . $\square$

定理 3.11 假设 $\{u_i\}$ 是 $W^{1,p}(M, \mathbf{m})$ 中的有界列, 且在 M 上 $\mathbf{m}$ - 几乎处处逐点收敛到 u . 则有 $u \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 且 $\{u_i\}$ 在 $L^p(M, \mathbf{m})$ 中弱收敛于 u , 而 $\{du_i\}$ 在 $L^p(T^*M, \mathbf{m})$ 中弱收敛于 du .

证明 在序列 $\{u_i\}$ 中选择任意子列 $\{u_{i_k}\}$. 由定理 3.7 可知, 存在 $\{u_{i_k}\}$ 的子列 (仍记作 $\{u_{i_k}\}$) 以及函数 $v \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 使得 $\{u_{i_k}\}$ 在 $L^p(M, \mathbf{m})$ 中弱收敛到 v , 且 $\{du_{i_k}\}$ 在 $L^p(T^*M, \mathbf{m})$ 中弱收敛到 dv . 下面证明 $u = v$ 在 M 上 $\mathbf{m}$ - 几乎处处成立.

结合引理 3.6 和定理 3.7 的证明过程, 可以找到一个凸组合列 $\{u_k^*\}$, 使得在对应的范数 $[\cdot]_p$ 下有

$$u_k^* := \sum_{j=k}^{m_k} a_{k,j} u_{i_j} \rightarrow v, \quad du_k^* = \sum_{j=k}^{m_k} a_{k,j} du_{i_j} \rightarrow dv, \quad k \rightarrow \infty.$$

通过标准的 L^p - 空间理论知, 存在 $\{u_{i_k}^*\}$ 的一个子列在 M 上 $\mathbf{m}$ - 几乎处处逐点收敛于 v . 由于 $\{u_i\}$ 在 M 上 $\mathbf{m}$ - 几乎处处逐点收敛于 u , 则 $\{u_{i_k}^*\}$ 也在 M 上 $\mathbf{m}$ - 几乎处处逐点收敛于 u . 由此, $v = u$ 在 M 上 $\mathbf{m}$ - 几乎处处成立, 于是 $du = dv$ 在 M 上 $\mathbf{m}$ - 几乎处处成立.

综上, 我们证明了对于 $\{u_i\}$ 的每个子列, 都存在该子列的一个子列 $\{u_{i_k}\}$, 使得 $\{u_{i_k}\}$ 在 $L^p(M, \mathbf{m})$ 中弱收敛于 u , 且 $\{du_{i_k}\}$ 在 $L^p(T^*M, \mathbf{m})$ 中弱收敛于 du . 则通过一个简单的反证法, 不难证明最初的函数列 $\{u_i\}$ 也满足如上性质. $\square$

4 Sobolev 容量

本节研究由范数 $\|\cdot\|_p$ 定义的 Sobolev p - 容量. 首先给出它的定义.

定义 4.1 假设 $(M, F, d\mathbf{m})$ 是 Finsler 度量测度空间. 给定 $p \in (1, +\infty)$, 对任意的集合 $E \subset M$, 其 Sobolev p - 容量定义为

$$\operatorname{Cap}_p(E) := \operatorname{Cap}_{p,\mathbf{m}}(E) := \inf_{u \in \mathcal{A}(E)} \|u\|_p^p,$$

其中 $\mathcal{A}(E) = \{u \in W^{1,p}(M, \mathbf{m}) : \text{在 } E \text{ 的某个邻域上 } u \geq 1\}$. 如果 $\mathcal{A}(E) = \emptyset$, 则记 $\operatorname{Cap}_p(E) := +\infty$.

为简便起见, 以下简称 Sobolev p - 容量为 p - 容量. 特别地, p - 容量还有如下等价定义.

命题 4.2 对任意的集合 $E \subset M$, 成立

$$\text{Cap}_p(E) = \inf_{u \in \mathcal{A}'(E)} \|u\|_p^p,$$

其中 $\mathcal{A}'(E) := \{u \in W^{1,p}(M, \mathbf{m}) : 0 \leq u \leq 1 \text{ 且在 } E \text{ 的某个邻域上 } u = 1\}$.

证明 一方面, 由于 $\mathcal{A}'(E) \subset \mathcal{A}(E)$, 因此有 $\text{Cap}_p(E) \leq \inf_{u \in \mathcal{A}'(E)} \|u\|_p^p$. 另一方面, 根据定义 4.1 可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\tilde{u} \in \mathcal{A}(E)$, 使得 $\|\tilde{u}\|_p^p \leq \text{Cap}_p(E) + \varepsilon$. 构造 $v := \max\{0, \min\{\tilde{u}, 1\}\}$. 推论 3.9 给出 $v \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 因此 $v \in \mathcal{A}'(E)$. 此外, 不难看出 $|v| \leq |\tilde{u}|$ 和 $F^*(dv) \leq F^*(d\tilde{u})$. 于是

$$\text{Cap}_p(E) \leq \inf_{u \in \mathcal{A}'(E)} \|u\|_p^p \leq \|v\|_p^p \leq \|\tilde{u}\|_p^p \leq \text{Cap}_p(E) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 命题得证. □

下面给出 p - 容量的主要性质.

命题 4.3 p - 容量满足以下性质:

- (i) $\text{Cap}_p(\emptyset) = 0$;
- (ii) 如果 $E_1 \subset E_2$, 则有 $\text{Cap}_p(E_1) \leq \text{Cap}_p(E_2)$;
- (iii) $\text{Cap}_p(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{Cap}_p(E_i)$;
- (iv) $\text{Cap}_p(\cdot)$ 是外正则的, 即 $\text{Cap}_p(E) = \inf\{\text{Cap}_p(O) : O \text{ 是开集, 且 } O \supset E\}$;
- (v) 对任意 Borel 可测集 $E \subset M$, 有 $\mathbf{m}(E) \leq \text{Cap}_p(E)$.

证明 鉴于 (i) 和 (ii) 显然成立, 下面证明 (iii)–(v).

(iii) 不妨假设 $\sum_i \text{Cap}_p(E_i) < +\infty$, 否则 (iii) 显然成立. 任给 $\varepsilon > 0$, 对每个 $i \in \mathbb{N}$, 找一个 $u_i \in \mathcal{A}(E_i)$, 使得 $\|u_i\|_p^p \leq \text{Cap}_p(E_i) + \varepsilon/2^i$. 令 $v := \sup_i u_i$. 我们证明 $v \in \mathcal{A}(\bigcup_i E_i)$.

为此, 先定义一列函数 $\{v_k\}$, 其中 $v_k := \max_{1 \leq i \leq k} u_i$. 根据命题 3.10, 有 $v_k \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 而且

$$\|v_k\|_p^p \leq \int_M \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^p d\mathbf{m} + \int_M \sum_{i=1}^{\infty} F^{*p}(du_i) d\mathbf{m} = \sum_{i=1}^{\infty} \|u_i\|_p^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{Cap}_p(E_i) + \varepsilon < \infty. \quad (4.1)$$

则 $\{v_k\}$ 是 $W^{1,p}(M, \mathbf{m})$ 中的有界序列. 又因为 v_k 逐点收敛于 v , 根据定理 3.11 可得 $v \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$. 特别地, 由定理 3.11 的证明 (即 Mazur 引理) 知, $\{v_k\}$ 的一个凸线性组合将强收敛到 v . 利用这个事实, 再结合三角不等式和 (4.1), 可得

$$\|v\|_p^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{Cap}_p(E_i) + \varepsilon < \infty. \quad (4.2)$$

另一方面, 由于 $u_i \in \mathcal{A}(E_i)$, 则存在开集 $O_i \supset E_i$, 使得 $u_i|_{O_i} \geq 1$. 则 $O := \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$ 是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 的开邻域, 且 $v|_O \geq 1$. 于是 $v \in \mathcal{A}(\bigcup_i E_i)$, 而这意味着 $\text{Cap}_p(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \|v\|_p^p$. 再利用 (4.2) 可得 (iii).

(iv) 一方面, 性质 (ii) 表明 $\text{Cap}_p(E) \leq \inf\{\text{Cap}_p(O) : O \text{ 是开集, } O \supset E\}$. 另一方面, 由定义 4.1 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $u \in \mathcal{A}(E)$, 使得 $\|u\|_p^p \leq \text{Cap}_p(E) + \varepsilon$. 又由于 $u \in \mathcal{A}(E)$, 于是存在开集 $O \supset E$, 使得 $u|_O \geq 1$, 也即 $u \in \mathcal{A}(O)$. 因此, $\text{Cap}_p(O) \leq \|u\|_p^p \leq \text{Cap}_p(E) + \varepsilon$. 由 ε 的任意性可得 (iv).

(v) 不妨设 $\text{Cap}_p(E) < \infty$. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $u \in \mathcal{A}(E)$ 使得 $\|u\|_p^p \leq \text{Cap}_p(E) + \varepsilon$. 此外, 由于 $u \in \mathcal{A}(E)$, 所以存在开集 $O \supset E$, 使得 $u|_O \geq 1$. 于是有

$$\mathbf{m}(E) = \int_E d\mathbf{m} \leq \int_O d\mathbf{m} \leq \int_O |u|^p d\mathbf{m} \leq \|u\|_p^p \leq \text{Cap}_p(E) + \varepsilon.$$

这意味着 (v) 成立. □

命题 4.3(i)–(iv) 表明 p -容量是 M 上的一个外正则测度, 于是引入以下定义.

定义 4.4 设 (M, F, dm) 为 Finsler 度量测度空间.

(1) 给定集合 $N \subset E \subset M$, 若一个性质在 $E \setminus N$ 上成立, 且 $\text{Cap}_p(N) = 0$, 则称该性质在集合 E 上是 p -拟处处成立的;

(2) 给定函数 $u : M \rightarrow [-\infty, +\infty]$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 若总存在集合 E , 满足 $\text{Cap}_p(E) < \varepsilon$ 且 $u|_{M \setminus E}$ 是连续的, 则称 u 在 M 上是 p -拟连续的.

定理 4.5 设 $\{u_i\}$ 是 $W^{1,p}(M, m)$ 中 Cauchy 列. 若 $\{u_i\} \subset C(M)$, 则存在子列 $\{u_{i_k}\}$ 满足以下性质:

(i) $\{u_{i_k}\}$ 在 M 上 p -拟处处逐点收敛;

(ii) 对任意 $\delta > 0$, 总存在集合 $N \subset M$, 满足 $\text{Cap}_p(N) < \delta$ 且 $\{u_{i_k}\}$ 在 $M \setminus N$ 上是一致收敛的.

证明 因为 $\{u_i\}$ 是 $W^{1,p}(M, m)$ 中的 Cauchy 列, 所以存在子列 $\{u_{i_k}\}$, 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{kp} \|u_{i_{k+1}} - u_{i_k}\|_p^p < \infty.$$

引入以下两种集合:

$$E_k := \{x \in M : |u_{i_{k+1}}(x) - u_{i_k}(x)| > 2^{-k}\}, \quad F_j := \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k.$$

由于 u_{i_k} 是连续的, 所以存在 $O_k \supset E_k$, 使得 $|u_{i_{k+1}} - u_{i_k}|_{O_k} \geq 2^{-k}$. 于是 $2^k |u_{i_{k+1}} - u_{i_k}| \in \mathcal{A}(E_k)$, 从而 $\text{Cap}_p(E_k) \leq 2^{kp} \|u_{i_{k+1}} - u_{i_k}\|_p^p$. 根据命题 4.3(ii)–(iii), 有

$$\text{Cap}_p\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j\right) \leq \text{Cap}_p(F_j) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \text{Cap}_p(E_k) \leq \sum_{k=j}^{\infty} 2^{kp} \|u_{i_{k+1}} - u_{i_k}\|_p^p.$$

由于上式对任意的 j 都成立, 又注意到 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{kp} \|u_{i_{k+1}} - u_{i_k}\|_p^p$ 收敛, 所以

$$\text{Cap}_p\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j\right) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=j}^{\infty} 2^{kp} \|u_{i_{k+1}} - u_{i_k}\|_p^p = 0. \quad (4.3)$$

下面证明 $\{u_{i_k}\}$ 满足性质 (i). 根据 (4.3), 我们只需证明: 对任意 $x \in M \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$, 数列 $\{u_{i_k}(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 列. 给定 $x \in M \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$, 由于 $F_j \supset F_{j+1}$, 因此可以找到一个充分大的 j_0 , 使得对任意 $j > j_0$, 都有 $x \notin F_j$. 再根据 F_j 和 E_j 的定义知, 对任意 $k > j_0$, 成立

$$|u_{i_k}(x) - u_{i_{k+1}}(x)| \leq 2^{-k}.$$

另一方面, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可以找到一个整数 $j_1 (> j_0)$, 使得 $2^{-j_1} < \varepsilon$. 则对任意 $m > n > j_1$, 有

$$|u_{i_m}(x) - u_{i_n}(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |u_{i_{k+1}}(x) - u_{i_k}(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k} < 2^{1-n} \leq 2^{-j_1} < \varepsilon.$$

由此, $\{u_{i_k}(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列. 则性质 (i) 得证.

最后证明 $\{u_{i_k}\}$ 还满足性质 (ii). 由于 $F_j \supset F_{j+1}$, 则对任意的 $\delta > 0$, 通过 (4.3) 可以找到一个充分大的 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $\text{Cap}_p(F_{k_0}) < \delta$. 设 $N := F_{k_0}$. 下面证明 $\{u_{i_k}\}$ 在 $M \setminus N$ 上是一致收敛的.

对任意 $\varepsilon > 0$, 取充分大的 $k_1 (> k_0)$ 满足 $2^{-k_1} < \varepsilon$. 则对任意 $m > n > k_1$, 通过类似上面的讨论, 可得

$$\sup_{x \in M \setminus N} |u_{i_m}(x) - u_{i_n}(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{x \in M \setminus N} |u_{i_{k+1}}(x) - u_{i_k}(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k} \leq 2^{1-n} \leq 2^{-k_1} < \varepsilon.$$

这表明 $\{u_{i_k}\}$ 在 $M \setminus N$ 上一致收敛. $\square$

推论 4.6 任给 $u \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 存在一个 p -拟连续的函数 $v \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 使得 $v = u$ 在 M 上 $\mathbf{m}$ -几乎处处成立.

证明 给定 $u \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 根据 $W^{1,p}(M, \mathbf{m})$ 的定义可知, 存在一个列 $\{u_i\} \subset W^{1,p}(M, \mathbf{m}) \cap C^\infty(M)$, 使得 $\|u_i - u\|_p \rightarrow 0$. 用 $\{u_{i_k}\}$ 表示满足定理 4.5 的 $\{u_i\}$ 的子列.

根据命题 4.3(v) 及定理 4.5(i) 可知, 可以在 M 上 (逐点) 定义一个函数 $v(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_{i_k}(x)$. 定理 3.11 给出 $v \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$. 又由于 $\|u_{i_k} - u\|_p \rightarrow 0$, 通过标准的 L^p -空间理论可知, 存在 $\{u_{i_k}\}$ 的一个子列在 M 上 $\mathbf{m}$ -几乎处处逐点收敛于 u . 由点态收敛的唯一性知, $u = v$ 在 M 上 $\mathbf{m}$ -几乎处处成立. 另一方面, 根据定理 4.5(ii) 知, 对任意的 $\delta > 0$, 存在子集 $N \subset M$, 满足 $\text{Cap}_p(N) < \delta$, 且 $\{u_{i_k}\}$ 在 $M \setminus N$ 上是一致收敛的. 因为连续函数一致收敛到连续函数, 所以 v 在 $M \setminus N$ 上连续, 从而 v 是 M 上的一个 p -拟连续函数. $\square$

定理 4.7 给定 $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$, 存在一个 p -拟连续函数 $v \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 使得 $v = u$ 在 Ω 上 $\mathbf{m}$ -几乎处处成立, 并且 $v = 0$ 在 $M \setminus \Omega$ 上 p -拟处处成立.

证明 由于 $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$, 根据 $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$ 的定义知, 存在一个列 $\{u_i\} \subset C_0^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$, 满足 $\|u_i - u\|_p \rightarrow 0$. 把 u_i 看成是 $W^{1,p}(M, \mathbf{m})$ 中的元素, 则 $\{u_i\}$ 是 $W^{1,p}(M, \mathbf{m})$ 中的一个 Cauchy 列. 用 $\{u_{i_k}\}$ 表示满足定理 4.5 的 $\{u_i\} \subset W^{1,p}(M, \mathbf{m})$ 的子列. 通过类似推论 4.6 证明的讨论可知, $\{u_{i_k}\}$ 在 M 上 p -拟处处逐点收敛到一个 p -拟连续函数 $v \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 且 $u = v$ 在 Ω 上 $\mathbf{m}$ -几乎处处成立. 由于 $\{u_{i_k}\}$ 是 p -拟处处逐点收敛到 v , 则存在一个集合 $N \subset M$, 使得 $\text{Cap}_p(N) = 0$ 且在 $M \setminus N$ 上 $\{u_{i_k}\}$ 逐点收敛到 v . 由于 $u_{i_k} \in C_0^\infty(\Omega)$, 因此 v 在 $(M \setminus \Omega) \setminus N$ 上恒为 0, 也即 $v = 0$ 在 $M \setminus \Omega$ 上 p -拟处处成立. $\square$

5 主要结果

本节给出定理 1.3–1.5 的证明, 并讨论不可反的情形. 本节中 d_F 表示由 F 诱导的 M 上的距离函数 (具体定义参见第 2 节). 为了证明定理 1.3, 我们需要以下引理.

引理 5.1 设 $\Omega \subset M$ 为开集. 再设 $x_0 \in \Omega$ 为固定点, 则存在某个自然数 i_0 满足以下不等式:

$$d_F(M \setminus \Omega, x_0) > i_0^{-1}.$$

对任意自然数 $i \geq i_0$, 定义

$$\Omega_i := \left\{ x \in \Omega : d_F(M \setminus \Omega, x) > \frac{1}{i} \right\} \cap B_{x_0}(i),$$

$$u_i(x) := d_F(M \setminus \Omega_{2i}, x), \quad \forall x \in M.$$

则以下陈述成立:

- (i) $\Omega_i \subseteq \Omega_{i+1} \subseteq \cdot \subseteq \Omega$ 且 $\Omega = \bigcup_{i=i_0}^{\infty} \Omega_i$;
- (ii) $\text{supp}(u_i) \subset \Omega_{2i+1} \subset \Omega$;
- (iii) 对任意 $x \in \Omega_i$, 有 $u_i(x) \geq \frac{1}{2i}$;
- (iv) u_i 是 Lipschitz 函数且属于 $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$.

证明 (i) 和 (ii) 是显然的, 下面用反证法证明 (iii). 假设 (iii) 不成立, 则存在整数 $i_1 \geq i_0$ 、点 $x_1 \in \Omega_{i_1}$ 和充分小的 $\eta > 0$ 满足 $u_{i_1}(x_1) < \frac{1}{2i_1} - 2\eta$. 根据 u_i 的定义可知, 存在 $\tilde{x} \in M \setminus \Omega_{2i_1}$, 满足 $d_F(\tilde{x}, x_1) < \frac{1}{2i_1} - \eta$. 则对任意的 $y \in M \setminus \Omega$, 三角不等式给出

$$d_F(y, \tilde{x}) \geq d_F(y, x_1) - d_F(\tilde{x}, x_1) > \frac{1}{i_1} - \frac{1}{2i_1} + \eta > \frac{1}{2i_1} + \eta,$$

这意味着

$$d_F(M \setminus \Omega, x_1) = \inf_{y \in M \setminus \Omega} d_F(y, x_1) \geq \frac{1}{2i_1} + \eta \Rightarrow x_1 \in \left\{ x \in \Omega : d_F(M \setminus \Omega, x) > \frac{1}{2i_1} \right\}. \quad (5.1)$$

另一方面, 因为 $d_F(x_0, \tilde{x}) \leq d_F(x_0, x_1) + d_F(x_1, \tilde{x}) < i_1 + \frac{1}{2i_1} < 2i_1$, 所以 $\tilde{x} \in B_{x_0}(2i_1)$. 结合 (5.1), 有 $\tilde{x} \in \Omega_{2i_1}$, 但这与 $\tilde{x} \in M \setminus \Omega_{2i_1}$ 矛盾, 所以 (iii) 成立.

下面证明 (iv). 根据文献 [20, (3.21)] 可知 u_i 是 1-Lipschitz 函数. 另外, (ii) 表明 $\text{supp}(u_i) \subset \overline{B_{x_0}(2i+1)}$ 是紧集, 则根据引理 3.4, 有 $u_i \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$. $\square$

定理 1.3 的证明 $\Rightarrow$ 首先证明, 如果 $\text{Cap}_p(E) = 0$, 则 $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m}) = W_0^{1,p}(\Omega \setminus E, \mathbf{m})$.

为此, 只需证当 $\text{Cap}_p(E) = 0$ 时, $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m}) \subset W_0^{1,p}(\Omega \setminus E, \mathbf{m})$. 任给 $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$, 存在一个列 $\{u_i\} \subset C_0^\infty(\Omega)$, 满足 $\|u - u_i\|_p \rightarrow 0$. 由 $\text{Cap}_p(E) = 0$, 通过命题 4.2 知, 存在一个列 $\{v_j\} \subset \mathcal{A}'(E)$ 满足 $\|v_j\|_p \rightarrow 0$. 再根据 L^p -空间的标准理论知, 存在 $\{v_j\}$ 的子列 $\{v_{j_k}\}$ 在 M 上 $\mathbf{m}$ -几乎处处点态收敛于 0.

现在证明, 对任意的 v_{j_k} 和 u_i , 有 $(1 - v_{j_k})u_i \in W_0^{1,p}(\Omega \setminus E, \mathbf{m})$. 事实上, 由于 $v_{j_k} \in \mathcal{A}'(E)$, 所以存在 E 的开邻域 O_{j_k} , 使得 $(1 - v_{j_k})|_{O_{j_k}} = 0$, 于是 $\text{supp}(1 - v_{j_k}) \subset M \setminus O_{j_k}$. 注意到 $\text{supp}(u_i) \subset \Omega$ 是紧的, 再根据

$$\text{supp}((1 - v_{j_k})u_i) = \text{supp}(1 - v_{j_k}) \cap \text{supp}(u_i) \subset (M \setminus O_{j_k}) \cap \Omega \subset \Omega \setminus E,$$

可见 $\text{supp}((1 - v_{j_k})u_i)$ 是 $\Omega \setminus E$ 中的紧集. 于是函数光滑性给出 $(1 - v_{j_k})u_i \in W_0^{1,p}(\Omega \setminus E, \mathbf{m})$. 现在断言

$$\lim_{i,k \rightarrow \infty} \|u - (1 - v_{j_k})u_i\|_p = 0. \quad (5.2)$$

如果 (5.2) 成立, 则可以找到一个子列 $\{(1 - v_{j_{k_l}})u_{i_l}\}$ 依范数收敛到 u . 由于 $(1 - v_{j_k})u_i \in W_0^{1,p}(\Omega \setminus E, \mathbf{m})$, 所以 $u \in W_0^{1,p}(\Omega \setminus E, \mathbf{m})$, 即 $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m}) \subset W_0^{1,p}(\Omega \setminus E, \mathbf{m})$. 必要性得证.

为了证明 (5.2), 首先由三角不等式可知

$$\|u - (1 - v_{j_k})u_i\|_p \leq \|u - u_i\|_p + \|v_{j_k}u_i\|_p. \quad (5.3)$$

易证 $[u_i]_\infty + [v_{j_k}]_\infty < \infty$, 再结合命题 3.10(ii), 有

$$\begin{aligned} \|v_{j_k}u_i\|_p &= [v_{j_k}u_i]_p + [d(v_{j_k}u_i)]_p \leq [v_{j_k}u_i]_p + [u_i dv_{j_k}]_p + [v_{j_k} du_i]_p \\ &\leq [u_i]_\infty [v_{j_k}]_p + [u_i]_\infty [dv_{j_k}]_p + [v_{j_k} du_i]_p \leq [u_i]_\infty \|v_{j_k}\|_p + [v_{j_k} du_i]_p. \end{aligned}$$

又因为 $\{v_{j_k}\}$ 是 $\mathbf{m}$ - 几乎处处逐点收敛于 0, 并且 $0 \leq v_{j_k} \leq 1$, 所以由控制收敛定理得 $\lim_{k \rightarrow \infty} [v_{j_k} du_i]_p = 0$. 注意到 $\|v_{j_k}\|_p \rightarrow 0$, 所以上面不等式给出 $\lim_{i,k \rightarrow \infty} \|v_{j_k} u_i\|_p = 0$. 再结合 $\|u - u_i\|_p \rightarrow 0$ 和 (5.3), 可得 (5.2).

$\Leftarrow$ 现在证明, 如果 $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m}) = W_0^{1,p}(\Omega \setminus E, \mathbf{m})$, 则 $\text{Cap}_p(E) = 0$.

任取一点 $x_0 \in \Omega$, 找一个充分大的 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $d_F(M \setminus \Omega, x_0) > i_0^{-1}$. 然后按照引理 5.1, 定义集族 $\{\Omega_i\}_{i \geq i_0}$ 和 Lipschitz 函数族 $\{u_i\}_{i \geq i_0}$.

对任意的 u_i , 由引理 5.1(iv) 和假设条件, 有 $u_i \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m}) = W_0^{1,p}(\Omega \setminus E, \mathbf{m})$. 于是, 存在一个列 $\{v_{i_j}\} \subset C_0^\infty(\Omega \setminus E)$, 满足 $\|u_i - v_{i_j}\|_p \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$). 将 u_i 和 v_{i_j} 自然扩展到 M 上, 则 $v_{i_j}|_E = 0$, 于是引理 5.1(iii) 表明 $|3i(v_{i_j} - u_i)||_{E \cap \Omega_i} > 1$. 通过连续性知, 存在一个 $E \cap \Omega_i$ 的邻域 U_i , 使得 $|3i(v_{i_j} - u_i)||_{U_i} \geq 1$. 综上, 有 $|3i(v_{i_j} - u_i)| \in \mathcal{A}(E \cap \Omega_i)$. 当 $j \rightarrow \infty$ 时, 注意到 i 是固定的, 则由推论 3.8, 有

$$\text{Cap}_p(E \cap \Omega_i) \leq \|3i(u_i - v_{i_j})\|_p^p = (3i)^p \|u_i - v_{i_j}\|_p^p \rightarrow 0,$$

即 $\text{Cap}_p(E \cap \Omega_i) = 0$. 由于 $E \subset \Omega$, 通过引理 5.1(i) 和命题 4.3(iii), 可得

$$\text{Cap}_p(E) = \text{Cap}_p(E \cap \Omega) = \text{Cap}_p\left(E \cap \bigcup_{i=i_0}^{\infty} \Omega_i\right) = \text{Cap}_p\left(\bigcup_{i=i_0}^{\infty} (E \cap \Omega_i)\right) \leq \sum_{i=i_0}^{\infty} \text{Cap}_p(E \cap \Omega_i) = 0.$$

综上, 定理得证. $\square$

定理 1.4 的证明 必要性由定理 4.7 直接给出, 下面证明充分性. 我们只需证明: 对任意一个 p - 拟连续函数 $u^* \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 若 $u^* = 0$ 在 $M \setminus \Omega$ 上 p - 拟处处成立, 则 $u^*|_\Omega \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$. 该证明分成 3 步.

第 1 步 引入一些关于 u^* 的假设, 这些假设在后面的证明中会带来便利. 首先注意, 只需证明 $u := u^*|_\Omega$ 可以用 $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$ 中的函数来逼近. 如果对 $u_+ = \max\{u, 0\}$, 可以找到 $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$ 中一个列依范数逼近 u_+ , 则由于 $u_- = \max\{-u, 0\}$, 于是通过同样的方法, 对 u_- 也可以找到这样的列. 再由 $u = u_+ - u_-$, 就完成了证明. 因此不妨假设 $u \geq 0$, 即 $u^*|_\Omega \geq 0$. 再由假设条件 $u^* = 0$ 在 $M \setminus \Omega$ 上 p - 拟处处成立知 $u^* \geq 0$ 在 M 上 $\mathbf{m}$ - 几乎处处成立. 此外, 根据推论 3.9 可知, 可以用 $u_\lambda^* = \max\{-\lambda, \min\{u^*, \lambda\}\} = \min\{u^*, \lambda\}$ 来逼近 u^* , 因此可设 u^* 是有界的. 最后, 由于 $W_0^{1,p}(M, \mathbf{m}) = W^{1,p}(M, \mathbf{m})$ (参见定理 1.2), 不妨设 u^* 有紧支集. 综上, 假设 u^* 是有界、有紧支集函数, 且 $u^* \geq 0$ 在 M 上 $\mathbf{m}$ - 几乎处处成立.

第 2 步 通过 u^* 构造一系列函数 $\{f_i^*\}$, 使得 $f_i^* \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$ 且 $f_i^*|_\Omega \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$.

对于任意的 $\delta > 0$, 因为 u^* 是 p - 拟连续的, 再根据命题 4.3(iv), 可以找到开集 $O \subset M$, 使得 $u^*|_{M \setminus O}$ 连续且 $\text{Cap}_p(O) < \delta - \eta$, 其中 η 是一个固定的充分小的正数.

设 $E := \{x \in M \setminus \Omega : u^*(x) \neq 0\}$. 由于 $u^* = 0$ 在 $M \setminus \Omega$ 上 p - 拟处处成立, 所以 $\text{Cap}_p(E) = 0$. 此外, 根据命题 4.2 可知, 可以找到 $v_\delta \in \mathcal{A}'(O \cup E)$, 满足

$$(i) \|v_\delta\|_p^p \leq \text{Cap}_p(O \cup E) + \eta; \quad (ii) \text{ 存在一个开集 } G \supset O \cup E, \text{ 满足 } v_\delta|_G = 1. \quad (5.4)$$

由命题 4.3(iii) 和 (5.4)(i), 有

$$\|v_\delta\|_p^p \leq \text{Cap}_p(O \cup E) + \eta \leq \text{Cap}_p(O) + \text{Cap}_p(E) + \eta = \text{Cap}_p(O) + \eta < \delta. \quad (5.5)$$

另一方面, 任意给定 $\varepsilon \in (0, 1)$, 定义 $u_\varepsilon^*(x) := \max\{u^*(x) - \varepsilon, 0\}$. 不难验证 $u_\varepsilon^* \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$, 且

$$\text{supp}(u_\varepsilon^*) \subset \text{supp}(u^*) \subset \Omega \cup E \subset \Omega \cup G. \quad (5.6)$$

由于 $u^*|_{M \setminus \Omega}$ 是连续的, 则 (5.4)(ii) 表明 $u_\varepsilon^*|_{M \setminus G}$ 也是连续的. 于是对任意 $x \in \partial\Omega \setminus G \subset M \setminus G$, 通过 (5.6) 和 u_ε^* 的连续性, 可以找到正数 $\rho_x > 0$, 使得在 $B_x(\rho_x) \setminus G$ 上有 $u_\varepsilon^* = 0$. 再利用 (5.4)(ii) 和 (5.6), 则 $(1 - v_\delta)u_\varepsilon^*$ 在以下集合上恒为 0:

$$\bigcup_{x \in \partial\Omega \setminus G} B_x(\rho_x) \cup G \cup M \setminus (\Omega \cup G) \supset M \setminus \Omega,$$

也即 $\text{supp}((1 - v_\delta)u_\varepsilon^*) \subset \Omega$. 此外, (5.6) 表明 $\text{supp}(u_\varepsilon^*)$ 是紧的, 则 $(1 - v_\delta)u_\varepsilon^*$ 在 Ω 中具有紧支集.

根据 u^* 的有界性, 有 $[v_\delta]_\infty + [u_\varepsilon^*]_\infty < \infty$, 则命题 3.10(ii) 表明 $(1 - v_\delta)u_\varepsilon^* \in W^{1,p}(M, \mathbf{m})$. 再由推论 3.5, 可得 $(1 - v_\delta)u_\varepsilon^*|_\Omega \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$. 现在取任意两个趋于零的正数列 $\{\varepsilon_i\}$ 和 $\{\delta_i\}$, 定义

$$f_i^* := (1 - v_{\delta_i})u_{\varepsilon_i}^*.$$

至此完成了第 2 步的证明.

第 3 步 这一步将完成定理的证明. 令 $f_i^* := (1 - v_{\delta_i})u_{\varepsilon_i}^*$ 如第 2 步中定义. 如果证明了

$$\begin{aligned} \|f_i^* - u^*\|_p &= [f_i^* - u^*]_p + [df_i^* - du^*]_p \\ &= \left(\int_M |f_i^* - u^*|^p d\mathbf{m} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_M F^{*p}(df_i^* - du^*) d\mathbf{m} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

则根据 $f_i|_\Omega \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$, 有 $u^*|_\Omega \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbf{m})$. 因此, 下面只需证明 (5.7) 成立.

首先, 由于 $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |b - a|)$, 推论 3.8 给出

$$du_{\varepsilon_i}^* = \begin{cases} du^*, & \text{在 } \{x \in M : u^*(x) > \varepsilon_i\} \text{ 上 } \mathbf{m}\text{-几乎处处成立,} \\ 0, & \text{在 } \{x \in M : u^*(x) \leq \varepsilon_i\} \text{ 上 } \mathbf{m}\text{-几乎处处成立,} \end{cases}$$

再结合三角不等式有

$$\|f_i^* - u^*\|_p = \|(1 - v_{\delta_i})u_{\varepsilon_i}^* - u^*\|_p \leq \|u_{\varepsilon_i}^* - u^*\|_p + \|v_{\delta_i}u_{\varepsilon_i}^*\|_p. \quad (5.8)$$

显然, $|u_{\varepsilon_i}^* - u^*| = u^* - u_{\varepsilon_i}^* \leq \varepsilon_i$ 且 $\text{supp}(u^* - u_{\varepsilon_i}^*) \subset \text{supp}(u^*)$. 因此, 由控制收敛定理可得

$$\|u_{\varepsilon_i}^* - u^*\|_p \leq [u_{\varepsilon_i}^* - u^*]_p + [du_{\varepsilon_i}^* - du^*]_p \leq \varepsilon_i [\chi_{\text{supp}(u^*)}]_p + [\chi_{\{0 \leq u \leq \varepsilon_i\}} du^*]_p \rightarrow 0. \quad (5.9)$$

另一方面, 因为 $[v_{\delta_i}]_\infty + [u_{\varepsilon_i}^*]_\infty < \infty$, 由命题 3.10(ii) 和 (5.5) 可得

$$\begin{aligned} \|v_{\delta_i}u_{\varepsilon_i}^*\|_p &= [v_{\delta_i}u_{\varepsilon_i}^*]_p + [d(v_{\delta_i}u_{\varepsilon_i}^*)]_p \\ &\leq [v_{\delta_i}u_{\varepsilon_i}^*]_p + [u_{\varepsilon_i}^* dv_{\delta_i}]_p + [v_{\delta_i} du_{\varepsilon_i}^*]_p \\ &\leq [u^*]_\infty [v_{\delta_i}]_p + [u^*]_\infty [dv_{\delta_i}]_p + [v_{\delta_i} du^*]_p \\ &\leq [u^*]_\infty \|v_{\delta_i}\|_p + [v_{\delta_i} du^*]_p \end{aligned}$$

$$\leq \delta_i^{\frac{1}{p}} [u^*]_{\infty} + [v_{\delta_i} du^*]_p. \quad (5.10)$$

由于 $\|v_{\delta_i}\|_p \leq \delta_i^{1/p} \rightarrow 0$, 则由 L^p -空间的标准理论知, 可以假设 $\{v_{\delta_i}\}$ 在 M 上 $\mathbf{m}$ -几乎处处逐点收敛于 0. 又因为 $0 \leq v_{\delta_i} \leq 1$, 所以控制收敛定理给出 $\lim_{i \rightarrow \infty} [v_{\delta_i} du^*]_p = 0$. 根据 (5.10), 有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|v_{\delta_i} u^*\|_p \leq \lim_{i \rightarrow \infty} (\delta_i^{\frac{1}{p}} [u^*]_{\infty} + [v_{\delta_i} du^*]_p) = 0. \quad (5.11)$$

最后由 (5.8)、(5.9) 和 (5.11), 可得 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i - u^*\|_p = 0$, 即 (5.7) 成立. $\square$

定理 1.5 的证明 以下为方便起见, 记 $M_o := M \setminus \{o\}$. 根据文献 [25, 定理 1.4], 有

$$\int_{M_o} F^{*p}(du) r^{p+\beta} d\mathbf{m} \geq \left(\frac{|N + \beta|}{p} \right)^p \int_{M_o} |u|^p r^{\beta} d\mathbf{m}, \quad \forall u \in C_0^{\infty}(M_o). \quad (5.12)$$

特别地, 当 $N = n$ 时, 以上不等式是最优的, 即

$$\left(\frac{|N + \beta|}{p} \right)^p = \inf_{u \in C_0^{\infty}(M_o) \setminus \{0\}} \frac{\int_{M_o} F^{*p}(du) r^{p+\beta} d\mathbf{m}}{\int_{M_o} |u|^p r^{\beta} d\mathbf{m}}. \quad (5.13)$$

另一方面, 定义

$$d\mu := r^{p+\beta} d\mathbf{m}.$$

由于 $p + \beta > -n$, 根据文献 [30, 引理 3.1], 不难证明 $d\mu$ 是 M 上的一个 σ -局部有限测度, 且 $d\mu$ 与 $d\mathbf{m}$ 的零测集一致, 特别地, 单点集 $\{o\}$ 是 μ -零测集. 于是, 前文中的所有结果对 $d\mu$ 依然成立, 特别地, 定理 1.4 也是如此. 具体而言, 对任意 $u \in W^{1,p}(M, \mu) \cap C(M)$, 如果 $u(o) = 0$, 则有 $u|_{M_o} \in W_0^{1,p}(M_o, \mu)$ (即在定理 1.4 中取 $\Omega = M_o$). 因此, 对于任意的 $u \in C^{\infty}(M, o)$, 可以找到一列 $\{u_j\} \subset C_0^{\infty}(M_o)$ 使得

$$\|u_j - u|_{M_o}\|_{p, \mu} = \left(\int_{M_o} |u_j - u|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{M_o} F^{*p}(du_j - du) d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0. \quad (5.14)$$

因此, 至多取一子列, 可以假设 u_j 在 M_o 上 μ -几乎处处逐点收敛到 $u|_{M_o}$. 则 u_j 在 M_o 上也是 $\mathbf{m}$ -几乎处处逐点收敛到 $u|_{M_o}$. 由于每个 u_j 都满足 (5.12), 利用 Fatou 引理和 (5.14), 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{|N + \beta|}{p} \right)^p \int_M |u|^p r^{\beta} d\mathbf{m} &= \left(\frac{|N + \beta|}{p} \right)^p \int_{M_o} |u|^p r^{\beta} d\mathbf{m} \\ &\leq \left(\frac{|N + \beta|}{p} \right)^p \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{M_o} |u_j|^p r^{\beta} d\mathbf{m} \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{M_o} F^{*p}(du_j) r^{p+\beta} d\mathbf{m} \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{M_o} F^{*p}(du_j) d\mu \\ &= \int_{M_o} F^{*p}(du) d\mu \\ &= \int_M F^{*p}(du) r^{p+\beta} d\mathbf{m}, \end{aligned}$$

即 (1.1) 得证. 现在假设 $N = n$. 由于 $C_0^{\infty}(M_o) \subset C^{\infty}(M, o)$, 利用 (1.1) 和 (5.13), 可得

$$\left(\frac{|n + \beta|}{p} \right)^p \leq \inf_{u \in C^{\infty}(M, o) \setminus \{0\}} \frac{\int_M F^{*p}(du) r^{p+\beta} d\mathbf{m}}{\int_M |u|^p r^{\beta} d\mathbf{m}}$$

$$\leq \inf_{u \in C_0^\infty(M_o) \setminus \{0\}} \frac{\int_M F^{*p}(du) r^{p+\beta} d\mathbf{m}}{\int_M |u|^p r^\beta d\mathbf{m}} = \left(\frac{|n+\beta|}{p} \right)^p.$$

(1.2) 得证. $\square$

最后, 简单讨论不可反的情形. 具体而言, 我们用三元组 $(M, \mathcal{F}, d\mathbf{m})$ 表示装备一个正光滑测度 $d\mathbf{m}$ 的 (可能是不可反的) Finsler 流形 $(M, \mathcal{F})$. 称这样的三元组 $(M, \mathcal{F}, d\mathbf{m})$ 为广义 Finsler 度量测度空间. 根据文献 [20, 26], 这样的空间称为向前 (或向后) 完备的, 是指对任意定义在有限闭区间的测地线, 可以向前 (或向后) 延拓定义至无穷.

对于一个向前 (或向后) 完备的广义 Finsler 度量测度空间 $(M, \mathcal{F}, d\mathbf{m})$, 根据文献 [31, 命题 A.2] 知, 可以在 M 上定义一个可反 Finsler 度量

$$F(x, y) := \frac{\mathcal{F}(x, y) + \mathcal{F}(x, -y)}{2}, \quad \forall (x, y) \in TM.$$

如果 $(M, \mathcal{F})$ 的可反系数有限, 即 $\lambda := \lambda_{\mathcal{F}}(M) < \infty$, 则 $\mathcal{F}$ 与 F 按以下方式等价:

$$\frac{1 + \lambda^{-1}}{2} \mathcal{F}(x, y) \leq F(x, y) \leq \frac{1 + \lambda}{2} \mathcal{F}(x, y). \quad (5.15)$$

通过 Hopf-Rinow 定理 (参见文献 [26, 定理 6.6.1(a) 和 6.6.1(b)]) 和一个距离函数的简单讨论, 不难证明 (M, F) 是完备可反的 Finsler 流形, 且此时 $(M, \mathcal{F})$ 也是完备的.

另一方面, 用 $\|\cdot\|_{p, \mathcal{F}}$ 和 $\|\cdot\|_{p, F}$ 分别表示 $\mathcal{F}$ 和 F 按照定义 3.1 给出的模. 则通过 (5.15) 可以找到一个有限正常数 $c = c(p, \lambda)$, 使得对任意开集 $\Omega \subset M$, 成立

$$c^{-1} \|u\|_{p, F} \leq \|u\|_{p, \mathcal{F}} \leq c \|u\|_{p, F}, \quad \forall u \in C^\infty(\Omega).$$

这意味着用 $\|u\|_{p, \mathcal{F}}$ 和 $\|u\|_{p, F}$ 定义出来的 Sobolev 空间是完全一致的, 因而各自定义出来的 p -容量的性质也完全一致. 由于 $(M, F, d\mathbf{m})$ 是一个标准的 (即完备可反的) Finsler 度量测度空间, 于是得到以下结论.

定理 5.2 设 $(M, \mathcal{F}, d\mathbf{m})$ 是一个向前 (或向后) 完备的广义 Finsler 度量测度空间. 如果其可反系数 $\lambda_{\mathcal{F}}(M)$ 是有限的, 则本文中除定理 1.5 之外的所有结果在 $(M, \mathcal{F}, d\mathbf{m})$ 上依然成立. 特别地, 定理 1.2–1.4 仍有效.

注 5.3 根据文献 [18] 可知, 存在可反系数为无穷的向前完备 Finsler 度量测度空间, 用定义 3.1 给出的 Sobolev 空间不再是向量空间, 因此不但前文的理论都将失效, 而且 Hardy 不等式也会失效 (参见文献 [22, 例 6.2]). 在无穷可反系数这种极端情形下, 可以考虑以下修正范数:

$$\|u\|_{p, \mathcal{F}, \mathbf{m}} := \left(\int_M |u|^p d\mathbf{m} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_M \max\{\mathcal{F}^*(\pm du)\}^p d\mathbf{m} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

该范数是可反度量测度空间上 Sobolev 范数的自然推广 (参见文献 [32] 和 [33, 第 59 页]). 由于它本身是可反的, 因此前文中的 Sobolev 空间和容量相关的理论可以重新建立. 此外, 通过此范数还能建立不可反情形下的 Hardy 不等式. 例如, 将定理 1.5 中的 $F(\nabla u)$ 换成 $\max\{\mathcal{F}^*(\pm du)\}$, 并将 r 换成

$$\begin{aligned} r(x) &= d_F(o, x), \quad \text{当 } p > N \text{ 时,} \\ r(x) &= d_F(x, o), \quad \text{当 } 1 < p < N \text{ 时,} \end{aligned}$$

定理 1.5 依然成立. 由于讨论过程与之前类似, 感兴趣的读者请自行验证.

致谢 作者对审稿人的意见和建议表示感谢.

参考文献

- 1 Adams D R, Hedberg L I. Function Spaces and Potential Theory. Berlin: Springer, 1999
- 2 Evans L C, Gariepy R F. Measure Theory and Fine Properties of Functions. Boca Raton: CRC Press, 1992
- 3 Heinonen J, Kilpeläinen T, Martio O. Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. New York: Oxford University Press, 1993
- 4 Serrin J. Local behavior of solutions of quasi-linear equations. Acta Math, 1964, 111: 247–302
- 5 Maz'ya V G. Sobolev Spaces: With Applications to Elliptic Partial Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1985
- 6 Barbatis G, Filippas S, Tertikas A. A unified approach to improved L^p Hardy inequalities with best constants. Trans Amer Math Soc, 2004, 356: 2169–2196
- 7 Aydin I. Weighted variable Sobolev spaces and capacity. J Funct Spaces, 2012, 2012: 132690
- 8 Harjulehto P, Hästö P, Koskenoja M, et al. Sobolev capacity on the space $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. J Funct Spaces, 2003, 1: 17–33
- 9 Bray H, Miao P. On the capacity of surfaces in manifolds with nonnegative scalar curvature. Invent Math, 2008, 172: 459–475
- 10 Markvorsen S, Palmer V. Transience and capacity of minimal submanifolds. Geom Funct Anal, 2003, 13: 915–933
- 11 D'Ambrosio L, Dipierro S. Hardy inequalities on Riemannian manifolds and applications. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2014, 31: 449–475
- 12 Meng C, Wang H, Zhao W. Hardy type inequalities on closed manifolds via Ricci curvature. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2021, 151: 993–1020
- 13 Grigor'yan A. Isoperimetric inequalities and capacities on Riemannian manifolds. Oper Theory Adv Appl, 1999, 109: 139–153
- 14 Ferrand J. Conformal capacities and extremal metrics. Pacific J Math, 1997, 180: 41–49
- 15 Freire A, Schwartz F. Mass-capacity inequalities for conformally flat manifolds with boundary. Comm Partial Differential Equations, 2014, 39: 98–119
- 16 Zorich V A, Kesel'man V M. On the conformal type of a Riemannian manifold. Funct Anal Appl, 1996, 30: 106–117
- 17 Chern S S. Finsler geometry is just Riemannian geometry without the quadratic restriction. Notices Amer Math Soc, 1996, 43: 959–963
- 18 Kristály A, Rudas I J. Elliptic problems on the ball endowed with Funk-type metrics. Nonlinear Anal, 2015, 119: 199–208
- 19 Álvarez Paiva J C, Berck G. What is wrong with the Hausdorff measure in Finsler spaces. Adv Math, 2006, 204: 647–663
- 20 Shen Z. Lectures on Finsler Geometry. Singapore: World Scientific, 2001
- 21 Hebey E. Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds. Berlin: Springer, 1996
- 22 Huang L, Kristály A, Zhao W. Sharp uncertainty principles on general Finsler manifolds. Trans Amer Math Soc, 2020, 373: 8127–8161
- 23 Kristály A, Repovš D. Quantitative Rellich inequalities on Finsler-Hadamard manifolds. Commun Contemp Math, 2016, 18: 1650020
- 24 Yuan L, Zhao W, Shen Y. Improved Hardy and Rellich inequalities on nonreversible Finsler manifolds. J Math Anal Appl, 2018, 458: 1512–1545
- 25 Zhao W. Hardy inequalities with best constants on Finsler metric measure manifolds. J Geom Anal, 2021, 31: 1992–2032
- 26 Bao D, Chern S S, Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. Berlin: Springer, 2000
- 27 Ohta S I, Sturm K T. Heat flow on Finsler manifolds. Comm Pure Appl Math, 2009, 62: 1386–1433
- 28 Renardy M, Rogers R. An Introduction to Partial Differential Equations, 2nd ed. New York: Springer, 2004
- 29 Bogachev V I. Measure Theory. Berlin: Springer, 2007
- 30 Zhao W, Shen Y. A universal volume comparison theorem for Finsler manifolds and related results. Canad J Math, 2013, 65: 1401–1435
- 31 Zhao W, Yuan L, Shen Y. On the Gauss-Bonnet-Chern formula for real Finsler vector bundles. Differential Geom Appl, 2016, 47: 43–56
- 32 Gigli N. On the Differential Structure of Metric Measure Spaces and Applications. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 236. Providence: Amer Math Soc, 2015
- 33 Kristály A, Zhao W. On the geometry of irreversible metric-measure spaces: Convergence, stability and analytic aspects. J Math Pures Appl (9), 2022, 158: 216–292

On the capacity of Finsler metric measure spaces

Weihan Wang & Wei Zhao

Abstract In this paper, we extend the capacity theory to Finsler metric measure spaces and study the corresponding Sobolev spaces. In particular, by taking advantage of capacity, we characterize the nature of Sobolev spaces with zero boundary values in the Finslerian case. As an application, a sharp Hardy inequality is established on closed Finsler metric measure spaces.

Keywords Finsler metric measure space, capacity, Sobolev space, Hardy inequality

MSC(2020) 46E36, 26D10, 53C21

doi: 10.1360/SSM-2021-0170