

分数阶 Fourier 变换在信号处理领域的研究进展*

陶 然^{1**} 邓 兵^{1,2} 王 越¹

(1. 北京理工大学电子工程系, 北京 100081; 2. 海军航空工程学院电子工程系, 烟台 264001)

摘要 分数阶 Fourier 变换是对经典 Fourier 变换的推广. 最早由 Namias 以数学形式提出, 并很快在光学领域得到了广泛应用. 而其在信号处理领域的潜力直到 20 世纪 90 年代中期才逐渐得到发掘. 尽管分数阶 Fourier 变换的定义式直观上看仅是 chirp 基分解, 而实质上分数阶 Fourier 变换更具有时频旋转的特性, 它是一种统一的时频变换, 随着变换阶数从 0 连续增长到 1 而展示出信号从时域逐步变化到频域的所有特征. 从信号处理的角度对分数阶 Fourier 变换的研究进展作全面的总结和系统的归纳, 力图将分数阶 Fourier 变换从定义到应用的全程都清晰地刻画出来, 既能为相关的专业研究人员提供参考, 又可以为感兴趣的读者提供入门的阶梯.

关键词 分数阶 Fourier 变换 信号处理 时频分析

自从法国科学家 Fourier 在 1807 年为了得到热传导方程简便解法首次提出 Fourier 分析技术以来, Fourier 变换迅速得到了广泛应用, 在科学研究与工程技术的几乎所有领域发挥着重要的作用. 但随着研究对象和研究范围的不断扩展, 也逐步暴露了 Fourier 变换在研究某些问题的局限性. 这种局限性主要体现在: 它是一种全局性变换, 得到的是信号的整体频谱, 因而无法表述信号的时频局部特性, 而这种特性正是非平稳信号的最根本和最关键的性质. 为了分析和处理非平稳信号, 人们提出并发展了一系列新的信号分析理论: 分数阶 Fourier 变换、短时 Fourier 变换、Wigner 分布、Gabor 变换、小波变换、循环统计量理论和调幅-调频信号分析等. 而分数阶 Fourier 变换作为 Fourier 变换的广义形式, 由于其独有的特点(本文后续部分将逐步展开阐述)而受到了众多科研人员的青睐, 近 10 年来关

收稿日期: 2005-05-23; 接受日期: 2005-10-18

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 60572094)和高校青年教师奖资助项目及国家部委基金资助项目(6140445)

** E-mail: rantaob@bit.edu.cn

于分数阶 Fourier 变换理论与应用的研究成果层出不穷,掀起了一个不小的高潮.

1980 年 Namias 从特征值和特征函数的角度,以纯数学的方式提出了分数阶 Fourier 变换(fractional Fourier transform, FRFT)的概念^[1],用于微分方程求解.其后, McBride 等用积分形式为分数阶 Fourier 变换作出了更为严格的数学定义^[2],为其后从光学角度提出分数阶 Fourier 变换的概念奠定了基础. 1993 年 Mendlovic 和 Ozaktas 给出了分数阶 Fourier 变换的光学实现,并将之应用于光学信息处理^[3,4]. 由于分数阶 Fourier 变换采用光学设备容易实现,所以在光学领域很快便得到了广泛应用^[5]. 尽管在信号处理领域分数阶 Fourier 变换具有潜在的用途,但是由于缺乏有效的物理解释和快速算法,使得分数阶 Fourier 变换在信号处理领域迟迟未得到应有的认识. 直到 1993 年 Almeida 指出分数阶 Fourier 变换可以理解为时频平面的旋转,1996 年 Ozaktas 等提出了一种计算量与 FFT 相当的离散算法后,分数阶 Fourier 变换才吸引了越来越多信号处理领域学者的注意,并出现了大量的相关文章. 国内开始分数阶 Fourier 变换的研究并不算晚,但是从发表的论文数量和质量来看,尚处于起步阶段^[6]. 尽管国内 1996 年便有过关于分数阶 Fourier 变换的综述文章^[7,8],但是那时分数阶 Fourier 变换在信号处理领域的潜力才刚刚得到挖掘. 而迄今国际上也未有从信号处理角度对分数阶 Fourier 变换的综述. 本文的目的是总结近年来分数阶 Fourier 变换在信号处理领域的研究成果,从基础、应用基础、应用三个层面对分数阶 Fourier 变换的理论体系进行阐述,供相关研究人员参考.

本文组织如下:首先介绍了分数阶 Fourier 变换的定义及其含义;第二部分阐述了分数阶 Fourier 变换的基本性质及分数阶 Fourier 变换与传统时频分析工具的关系,认为分数阶 Fourier 域可以理解为一种统一的时频变换域,并给出了其不确定性原理;第三部分对基于分数阶 Fourier 变换而定义的一些信号分析工具作了系统归纳;第四部分给出了基于分数阶 Fourier 变换的采样定理,并总结了分数阶 Fourier 变换的离散定义和算法;有关分数阶 Fourier 变换在信号处理领域中的应用放在第五部分进行阐述;最后,总结了全文.

1 分数阶 Fourier 变换定义

接下来给出分数阶 Fourier 变换的定义式:

$$X_p(u) = F_p[x](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) K_p(t, u) dt, \quad (1)$$

其中

$$K_p(t, u) = \begin{cases} \sqrt{(1 - j \cot \alpha)} e^{j\pi(t^2 \cot \alpha - 2ut \csc \alpha + u^2 \cot \alpha)}, & \alpha \neq n\pi, \\ \delta(t - u), & \alpha = 2n\pi, \\ \delta(t + u), & \alpha = (2n \pm 1)\pi, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\alpha = p\pi/2$, p 为分数阶 Fourier 变换的阶数, F_p 表示分数阶 Fourier 变换算子, 本文后续部分将沿用这种表达. 可以发现分数阶 Fourier 变换以 4 为周期, 且当 $p = 4n+1$ (即 $\alpha = 2n\pi + \pi/2$) 时, 分数阶 Fourier 变换便成了 Fourier 变换. 经变量代换 $u = \sqrt{t/2\pi}$ 和 $t = \sqrt{u/2\pi}$, (1)式可以化为

$$X_p(u) = F_p[x](u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{(1-j\cot\alpha)}{2\pi}} e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\frac{t^2}{2}\cot\alpha - jut\csc\alpha} dt, & \alpha \neq n\pi, \\ x(u), & \alpha = 2n\pi, \\ x(-u), & \alpha = (2n\pm 1)\pi, \end{cases} \quad (3)$$

由(3)式可以看出分数阶 Fourier 变换分解为如下三步^[9]:

- 1) 乘以 chirp 信号, $g(t) = \sqrt{1-j\cot\alpha} e^{j\frac{t^2}{2}\cot\alpha} x(t)$;
- 2) Fourier 变换(自变量存在尺度转变), $\tilde{X}_p(u) = G(\csc\alpha u)$, 其中 $G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-jut} dt$;
- 3) 乘以 chirp 信号, $X_p(u) = e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \tilde{X}_p(u)$.

可以发现信号 $x(t)$ 存在分数阶 Fourier 变换与存在 Fourier 变换的条件是相同的. 也就是说, 如果 $X(\omega)$ 存在, 则 $X_p(u)$ 也存在. 利用上述分解步骤, Zayed 等得到了分数阶 Fourier 域的带限信号采样定理^[10]; Erseghe 等基于 chirp 周期(chirp-periodicity)信号将 Fourier 变换所具有的时、频域连续和离散的四种对应关系推广到了时域、分数阶 Fourier 域连续和离散的四种对应关系, 也同样得到了分数阶 Fourier 域的带限信号采样定理^[11].

分数阶 Fourier 变换也可以理解为 chirp 基分解^[9], 因为分数阶 Fourier 变换的逆变换如

$$x(t) = F_{-p}[X_p](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_p(u) K_{-p}(t, u) du. \quad (4)$$

可以发现 $x(t)$ 由一组权系数为 $X_p(u)$ 的正交基函数 $K_{-p}(t, u)$ 所表征, 这些基函数是线性调频的复指数函数. 不同 u 值的基函数间存在着不同的时移和相位因子

$$K_p(t, u) = e^{-j\frac{u^2}{2}\tan\alpha} K_p(t - u\sec\alpha, 0). \quad (5)$$

2 分数阶 Fourier 变换的主要性质

2.1 主要性质

由于分数阶 Fourier 变换是 Fourier 变换的推广形式, 所以 Fourier 变换的大部分性质在分数阶 Fourier 变换都具有相应的推广, 分数阶 Fourier 变换的基本性质请参看附录 A. 注意到 Fourier 变换中的一个重要性质——卷积定理并没有出现在附录 A 中, 这是因为该性质并不能简单地推广过来, 感兴趣的读者可以参看文献 [12, 13].

接下来介绍一个十分重要的性质: 分数阶 Fourier 变换是角度为 α 的时频面旋转. 这个性质建立起分数阶 Fourier 变换与时频分布间的直接联系, 并且为分数阶 Fourier 域理解为一种统一的时频变换域奠定了理论基础, 同时也为分数阶 Fourier 变换在信号处理领域中的应用提供了有利条件. 以 Wigner 分布为例, 令 R_ϕ 表征二维函数作角度为 ϕ 的顺时针旋转算子, 即

$$R_\phi [y](t, \omega) = y(t\cos\phi + \omega\sin\phi, -t\sin\phi + \omega\cos\phi), \quad (6)$$

那么存在如下关系:

$$W_x(t, \omega) = R_\alpha [W_u](t, \omega), \quad (7)$$

其中 $W_u(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_p\left(t + \frac{\tau}{2}\right) X_p^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau$, $W_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau$ 分别表征 $X_p(u)$, $x(t)$ 的 Wigner 分布. 类似的关系对于模糊函数、修正的短时 Fourier 变换和谱图依然成立 [9]. Lohmann 将 (7) 式作了进一步推广, 得出分数阶 Fourier 变换的模平方与 Radon-Wigner 变换间的关系 [14]:

$$\mathfrak{R}_\alpha [W_x](u) = |X_p(u)|^2, \quad (8)$$

其中 \mathfrak{R}_α 为 Radon 变换算子, 表征二维函数对与 t 轴夹角为 $\alpha = p\pi/2$ 的坐标轴的积分投影算子. (8) 式也可以理解为坐标旋转 α 后的边缘积分, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_x(u\cos\phi - v\sin\phi, u\sin\phi + v\cos\phi) dv = |X_p(u)|^2, \quad \phi = \alpha + \pi/2. \quad (9)$$

既然分数阶 Fourier 变换与这些常用的时频表示存在上述关系, 那么是否存在更具普遍意义的表达形式呢? 令

$$\xi_x(t, f) = \int_{\tau, \theta} \psi(t - \tau, f - \theta) W_x(\tau, \theta) d\tau d\theta, \quad (10)$$

其中 $\psi(t, f)$ 为变换核, $W_x(\tau, \theta)$ 为 $x(t)$ 的 Wigner 分布, $\xi_x(t, f)$ 表征 $x(t)$ 的 Cohen 类时频分布. 那么只要变换核 $\psi(t, f)$ 关于原点旋转对称, 则 $\xi_x(t, f)$ 与分数阶 Fourier 变换一样, 也满足上述时频旋转关系 [15]. 需要注意的是 (10) 式与基于模糊

函数的Cohen类时频分布定义(见(27)式)不尽相同.

由上述分数阶Fourier变换与时频分布的关系可以看出, 分数阶Fourier变换提供了信号从时域到频域全过程的综合描述, 随着阶数从 0 连续增长到 1, 分数阶Fourier变换展示出信号从时域逐步变化到频域的所有变化特征(如图 1). 可见, 分数阶Fourier变换实际上体现了一种统一的时频观, 是介于时域和频域之间的信号时频分析方法, 可以为信号的时频分析提供更大的选择余地^[6,16].

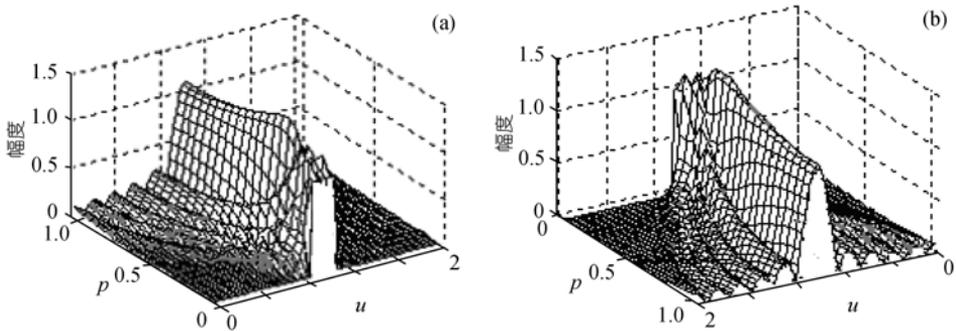


图 1 矩形脉冲信号的分数阶 Fourier 变换

2.2 不确定性原理

既然分数阶Fourier域是一个统一的时频变换域^[17], 那么时频域的不确定性原理扩展到分数阶Fourier域会是什么呢? 利用第 1 节中分数阶Fourier变换的三步分解法及传统时频域的不确定性原理, 可以得到信号的两个不同阶数分数阶Fourier变换间不确定性原理如下:

$$\Delta u_{\alpha}^2 \Delta u_{\beta}^2 \geq \frac{1}{4} \sin^2(\alpha - \beta), \quad (11)$$

其中 $\Delta u_{\gamma}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| (u - u_{\gamma 0}) X_{2\gamma/\pi}(u) \right|^2 du$, $u_{\gamma 0} = \int_{-\infty}^{+\infty} u \left| X_{2\gamma/\pi}(u) \right|^2 du$, $\gamma = \alpha, \beta$. Shinde 等在(11)式的基础上, 给出了更为严格的表示^[18].

分数阶 Fourier 域的不确定性原理. 设 $x(t)$ 为具有单位能量的实信号, 则

$$\Delta u_{\alpha}^2 \Delta u_{\beta}^2 \geq \left(\Delta t^2 \cos \alpha \cos \beta + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{4 \Delta t^2} \right)^2 + \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{4}, \quad (12)$$

其中 $\Delta t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| (t - t_0) x(t) \right|^2 dt$, $t_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} t \left| x(t) \right|^2 dt$, Δu_{α}^2 , Δu_{β}^2 如(11)式所示. 当

$$x(t) = \left(\frac{1}{\pi \sigma^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}, \quad (13)$$

σ 为任取的实常数时, (12) 式等号成立.

3 分数阶算子及变换

因为分数阶 Fourier 变换是一种统一的时频分析方法, 可以理解为角度 α 的时频面旋转, 因此依据分数阶 Fourier 变换可以定义一些有用的分数阶算子和变换 [19-32].

3.1 分数阶算子

卷积和相关是常用的两种信号处理算子, 文献 [19, 20] 分别从时域和变换域的角度定义了分数阶卷积和分数阶相关, 前者定义如 (14) 式所示 [19], 适于信号检测和参数估计, 后者定义如 (15) 式所示 [20], 适于滤波器设计、波束形成、模式识别.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{conv}}^p [x, y](r) &= e^{j\pi r^2 \cos \alpha \sin \alpha} \int x(\mu) y(r \cos \alpha - \mu) e^{-j2\pi \mu r \sin \alpha} d\mu, & \alpha = p\pi/2, \quad (14) \\ \Gamma_{\text{corr}}^p [x, y](\eta) &= e^{j\pi \eta^2 \cos \alpha \sin \alpha} \int x(\mu) y^*(\mu - \eta \cos \alpha) e^{-j2\pi \mu \eta \sin \alpha} d\mu, \\ \tilde{\Gamma}_{\text{conv}}^p [x, y](u) &= F_{-p} [X_p \cdot Y_p](u), \\ \tilde{\Gamma}_{\text{corr}}^{p_1, p_2, p_3} [x, y](u) &= F_{p_3} [X_{p_1} \cdot Y_{p_2}^*](u). \end{aligned} \quad (15)$$

在时频分析理论中, 酉算子和 Hermite 算子是比较重要的两类算子, 酉性是设计变换算子时经常需要考虑的要素之一, 而不同的变换域表示往往能够通过某种 Hermite 算子联系起来, 因此, 推导分数阶酉算子和 Hermite 算子也吸引了人们的浓厚兴趣. 基于时移算子和频移算子的概念 (这是两种基本的酉算子), Akay 定义了分数阶位移算子 $T_{\phi, \tau}$, 即分数阶酉算子 [21], 如

$$T_{\phi, \tau} [x](t) = x(t - \tau \cos \phi) e^{-j\pi \tau^2 \cos \phi \sin \phi + j2\pi t \tau \sin \phi} \quad (16)$$

所示. 然后利用 Stone's Theorem 可以得到分数阶 Hermite 算子, 如

$$Z_{\phi} [x](t) = \cos \phi t x(t) + \sin \phi \frac{-j}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} x(t) \quad (17)$$

所示.

分数阶酉算子 $T_{\phi, \tau}$ 对信号的作用既有时移分量 $\tau \cos \phi$, 又有频移分量 $\tau \sin \phi$, 它是将信号在时频平面上沿着角度为 ϕ 的轴移动径向距离 τ , 所以将之称为分数阶位移算子. 它与分数阶 Fourier 变换的关系, 如 (18) 式所示, 可以看出信号范数保持不变. 对比 (14) 和 (16) 式不难发现, (14) 式所定义的分数阶卷积和分数阶相关与算子 $T_{\phi, \tau}$ 的关系如 (19) 式所示, 这个关系将在第 5 节应用部分的一种无源雷达动目标检测新算法中用到.

$$\begin{aligned} F_{p+1} T_{\phi, \tau} [x](u) &= e^{-j2\pi\tau u} F_{p+1} [x](u), \\ F_p T_{\phi, \tau} [x](u) &= F_p [x](u - \tau), \end{aligned} \quad \phi = p\pi/2, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{conv}}^p [x, y](r) &= \langle x, T_{\phi, \tau} F_2 [y^*](u) \rangle, \\ \Gamma_{\text{corr}}^p [x, y](\eta) &= \langle x, T_{\phi, \tau} [y](u) \rangle, \end{aligned} \quad \phi = p\pi/2, \quad (19)$$

(19)式中符号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积.

3.2 分数阶变换

本节所研究的分数阶变换是指基于分数阶 Fourier 变换而定义的一些信号分析工具, 主要包含两大类, 一类是利用分数阶 Fourier 变换是 Fourier 变换的广义形式, 而将原来基于 Fourier 变换的信号分析工具作了相应的推广; 另一类是利用分数阶 Fourier 变换的时频旋转性质来设计新的时频分析工具. 接下来对主要的分数阶变换做了总结, 阐述了其各自的特点和优势.

3.2.1 基于 Fourier 变换的广义形式

Hilbert变换是一种重要的信号处理工具, 已经在通信调制、图像边缘检测等领域得到了广泛应用. 通过将Hilbert变换的频域传递函数推广到分数阶Fourier域, 便得到了分数阶Hilbert变换^[22].

$$\Gamma_{\text{Hil}}^p [x](t) = F_{-p} [X_p \cdot H_p](t), \quad (20)$$

其中 Γ_{Hil}^p 为 p 阶分数阶 Hilbert 变换算子, $H_p(u) = \begin{cases} e^{-j\pi p/2}, & u \geq 0 \\ e^{j\pi p/2}, & u < 0 \end{cases}$. 其实质仍然是

对负谱的抑制, 只是谱由频谱扩展为分数阶 Fourier 谱. 在此基础上, Pei 利用分数阶 Fourier 变换的特征分解型离散算法给出了分数阶 Hilbert 变换的一种离散表达形式^[23], 并对数字图像的边缘检测做了仿真验证. 在文献[24]中, 有关分数阶 Hilbert 变换器的设计 and 应用问题得到了进一步的探讨, 提出了多种 FIR 和 IIR 分数阶 Hilbert 变换器的设计方法, 并基于分数阶 Hilbert 变换对信号分数阶 Fourier 变换负谱分量的抑制, 提出了一种单边带 (SSB) 通信系统, 利用分数阶 Hilbert 变换的变换阶数作为解调密钥来实现安全通信.

正弦变换、余弦变换和 Hartley 变换都属于酉变换, 已经在图像压缩和自适应滤波方面得到了广泛应用, 利用它们与 Fourier 变换的关系, 我们可以得到分数阶的正弦变换、余弦变换和 Hartley 变换^[6,25]. 需要注意的是: 第一, 与分数阶 Fourier 变换周期为 4 不同, 分数阶正弦变换、余弦变换和 Hartley 变换的周期都是 2; 第二, 分数阶正弦变换没有偶特征函数, 而分数阶余弦变换没有奇特征函数, 因此, 最好用分数阶正弦变换来处理奇函数, 而用分数阶余弦变换来处理偶函数.

$$S_p[x](u) = \frac{1}{2} e^{\frac{j\pi p}{2}} (F_p[x](u) - F_p[x](-u)), \quad (21)$$

$$C_p[x](u) = \frac{1}{2} (F_p[x](u) + F_p[x](-u)), \quad (22)$$

$$\Psi_p[x](u) = \frac{1+e^{\frac{j\pi p}{2}}}{2} F_p[x](u) + \frac{1-e^{\frac{j\pi p}{2}}}{2} F_p[x](-u), \quad (23)$$

S_p, C_p, Ψ_p 依次表示分数阶的正弦变换、余弦变换和 Hartley 变换算子.

短时 Fourier 变换和模糊函数是比较常用的两种时频工具, 通过对定义式进行直观的替换, 我们就得到了两种新的时频工具^[26,27], 如(24)和(25)式所示, 本文中称之为短时分数阶 Fourier 变换和分数阶模糊函数, 两者都适于处理多项式相位信号. 其中, 分数阶模糊函数对三次相位信息十分敏感, 在某阶分数阶 Fourier 域三次相位信息将形成一个冲激^[27], 而短时分数阶 Fourier 变换是线性变换, 没有交叉项, 且不会对原时频结构在解线调时产生压缩扭曲, 因此, 适于解析信号的时频结构. 但前提条件是信号局部需要相似于 chirp 信号, 这个问题在一定程度上可以通过选择合适的窗函数来解决.

$$ST_p[x](t, u) = X(t, u) = F_p[x(\sigma) \cdot w_S^*(\sigma - t)](t, u), \quad \int w_S^*(t) w_1(t) dt = 1, \quad (24)$$

$$x(t') = \int F_{-p}[X(t, u) \cdot w_1(t' - t)](t', t) dt,$$

$$AF_p[x](u, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) K_p(t, u) dt, \quad (25)$$

(24)式给出了短时分数阶 Fourier 正变换和反变换及完全重构条件表达式, ST_p 表示短时分数阶 Fourier 变换算子. (25)式是分数阶模糊函数的定义式, $K_p(t, u)$ 是分数阶 Fourier 变换核.

3.2.2 基于时频旋转性质

Alieva 等人利用分数阶 Fourier 变换的时频旋转性对传统二次型时频工具 (Cohen 类时频分布和 S 法时频分布^[28]) 的核函数作时频旋转来减少交叉项而极少降低自项的聚集性^[29,30]. 实质上他们所做的努力就是确定合适的分数阶 Fourier 域使得信号的分数阶 Fourier 谱宽度最小, 再在该域上用传统的二次型时频工具进行分析就能够在一定程度上减少交叉项而不怎么损失自项聚集性. 仿真结果来看, 时频旋转 S 法时频分布^[30]的效果要好于时频旋转 Cohen 类时频分布^[29], 且都好于相应的不旋转的结果. 但是, 如果信号没有明显的谱聚集分数阶 Fourier 域或存在不止一个这样的分数阶 Fourier 域, 那么, 时频旋转所获得的好处将极为有限. 此外, 为了确定分数阶 Fourier 谱聚集域的阶数 \hat{p} , 他们提出了一种基于分数阶

Fourier变换二阶矩极值点的方法, 对分数阶Fourier变换二阶矩以阶数 p 求一次导的零值来确定 \hat{p} ^[29]:

$$\tan(\hat{p}\pi) = \frac{2w_{0.5} - (w_0 + w_1)}{w_0 - w_1}, \quad (26)$$

$$w_p = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_p[x](u)|^2 u^2 du = w_0 \cos^2\left(\frac{p\pi}{2}\right) + w_1 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2}\right) + \mu_0 \sin(p\pi), \quad (27)$$

其中 w_p 表示 p 阶分数阶Fourier变换二阶矩, μ_p 表示 p 阶分数阶Fourier变换二阶中心矩^[29]. 从(27)式不难看出, 对 w_p 求一次导, 并令其等于零, 再将(27)式中 $p=0.5$ 所得到的 $\mu_0 = w_{0.5} - (w_0 + w_1)/2$ 代入, 我们便得到了 \hat{p} 如(26)式. 通过比较 $\cos(\hat{p}\pi)$ 和 $\mu_1 - \mu_0$ 的符号可以确定 \hat{p} 阶分数阶Fourier域是谱聚集域还是谱发散域^[30].

利用(8)式所展示的分数阶Fourier变换与Radon-Wigner变换间的关系, 容易想到: 当Wigner分布不好直接求取时, 通过对信号的分数阶Fourier变换做逆Radon变换就可能成为分析信号时频结构的一种有效方法. Zhang等就对该问题作了仔细研究, 提出了一种新的时频分析方法——TTFT(tomography time-frequency transform), 并通过分数阶Fourier域的自适应滤波来抑制交叉项^[31].

自适应信号扩展是把信号扩展到一组有限的、具有较好时频局部化的基函数上. 该方法具有较好的时频分辨率, 且无窗效应、交叉项干扰. 文献[32]研究了以Gauss函数的分数阶Fourier变换为基函数的信号扩展方法, 之所以选择Gauss函数, 是因为它可以满足时-频域不确定性原理的边界条件(时宽带宽积最小). 而分数阶Fourier变换的介入, 可以通过阶数的变化使得基函数的选择更为灵活, 也能够更为准确地描述信号的时频特征.

时频分布所希望的数学性质之一就是边缘特性, Xia将(9)式定义为广义边缘特性, 并推导了相应具有广义边缘特性的Cohen类时频分布(如(28)式所示)的充要条件为: 任取实数 τ , 均有 $\psi(-\tau \sin \varphi, \tau \cos \varphi) = 1$. 显而易见, 传统的时域、频域边缘特性就成为了广义边缘特性 $\varphi = 0, \pi/2$ 的两个特例, 而Wigner-Ville分布满足所有角度的广义边缘特性. 需要满足的广义边缘特性越多, 则对核函数的选择限制越多, 极限情况下的核函数是1, 所得到的分布就是Wigner-Ville分布. 依据上述充要条件, 不难得到满足角度 $\varphi_k, k = 1, 2, \dots, N$ 的广义边缘特性的Cohen类时频分布, 限于篇幅, 本文不再一一列出, 感兴趣的读者可以查阅文献[33].

$$\xi_x(t, f) = \int_{\tau} \int_{\nu} \psi(\tau, \nu) A_z(\tau, \nu) e^{-j2\pi(t\nu + \tau f)} d\tau d\nu, \quad (28)$$

其中 $A_z(\tau, \nu)$ 表示模糊函数, $\psi(\tau, \nu)$ 为核函数.

4 离散分数阶 Fourier 变换

随着数字信号处理在工程应用中的蓬勃发展, 采样和离散算法已经成为了分数阶 Fourier 变换应用于工程实践中一个难以回避的问题.

4.1 分数阶 Fourier 域的采样定理^[34]

设模拟信号 $x(t)$ 被一冲激脉冲串以采样周期 T_s 均匀采样, 则

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s), \quad (29)$$

$$F_p[x_s](t) = \frac{1}{T} e^{j\frac{\cot\alpha}{2}u^2} \left(\left(X_p(u) e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}u^2} \right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - n\frac{2\pi\sin\alpha}{T_s}\right) \right), \quad (30)$$

其中 $*$ 表示卷积算子, $\alpha = p\pi/2$. 由(30)式可以看到, 在分数阶 Fourier 域上, $X_p(u) e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}u^2}$ 以周期 $\frac{2\pi|\sin\alpha|}{T_s}$ 延拓. 如果信号 $x(t)$ 是分数阶 Fourier 域上的带限信号, 即 $\exists \Omega_l, \Omega_h$, 且 $0 \leq \Omega_l < \Omega_h$ 使得

$$X_p(u) = 0, \quad |u| > \Omega_h \quad \text{或} \quad |u| < \Omega_l. \quad (31)$$

那么就能在 $1 \leq N \leq \text{int}\left(\frac{\Omega_h}{\Omega_l}\right)$ 范围内选择到合适的 N , $\text{int}(\cdot)$ 表示取整, 使得下式成立:

$$N \frac{2\pi|\sin\alpha|}{T_s} \geq 2\Omega_h, \quad (N-1) \frac{2\pi|\sin\alpha|}{T_s} \leq 2\Omega_l. \quad (32)$$

这样采样后信号的分数阶 Fourier 谱就不会发生混叠. 也就是说, 只要采样频率

$\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ 满足以下两式就能够保证信号的完美重构:

$$\frac{2\Omega_h|\csc\alpha|}{N} \leq \Omega_s \leq \frac{2\Omega_l|\csc\alpha|}{(N-1)}, \quad N \neq 1, \quad (33)$$

$$\frac{2\Omega_h|\csc\alpha|}{N} \leq \Omega_s, \quad N = 1. \quad (34)$$

这时就能够利用如下所示的理想带通滤波器来恢复原信号 $x(t)$:

$$H_p(u) = \begin{cases} T_s, & \Omega_l \leq |u| \leq \Omega_h, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (35)$$

其信号重构公式如下:

$$x(t) = e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}t^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) e^{j\frac{\cot\alpha}{2}(nT_s)^2} T_s \frac{\sin[\Omega_h \csc\alpha(t-nT_s)] - \sin[\Omega_s \csc\alpha(t-nT_s)]}{\pi(t-nT_s)}. \quad (36)$$

(33), (34)和(36)式就构成了分数阶 Fourier 域带限信号的均匀采样理论. 将 $\Omega = 0$, $\Omega_s = 2\Omega_h |\csc\alpha|$ 代入(36)式, 就得到了文献[10]所述的分数阶 Fourier 域带限信号的低通重构公式.

4.2 离散分数阶 Fourier 变换(DFRFT)算法

离散分数阶 Fourier 变换定义如下:

$$X_p(m) = \tilde{F}_p[x](m) = \sum_n \tilde{G}_p(m, n)x(n), \quad (37)$$

其中 \tilde{F}_p 表示 DFRFT 算子, $\tilde{G}_p(m, n)$ 为 DFRFT 核矩阵. 根据 $\tilde{G}_p(m, n)$ 的不同求法, 近年来出现的主要离散算法可以分为如下三类:

1) 特征分解型^[35-37], 通过求取离散 Fourier 变换(DFT)核矩阵的特征值和特征向量来构造 DFT 核矩阵的分数幂, 并以之作为 $\tilde{G}_p(m, n)$ 来计算 DFRFT. 该类方法保持了连续分数阶 Fourier 变换的大部分性质, 但是计算复杂度高, 不利于实时处理; 在 DFT 核矩阵的特征值和特征向量的匹配寻找过程中, 对 Hermite-Gauss 函数离散样本的求取算法不同, 该类方法又包括 S 方法, GS 算法(gram-schmidt algorithm)^[35], OP 算法(orthogonal procrustes algorithm)^[35], 高阶近似^[36]和直接离散^[37]等.

2) 离散采样型^[38-40], 通过对分数阶 Fourier 变换连续定义式中的输入输出信号进行离散采样来获得 DFRFT 核矩阵. 其中直接离散采样法由于丧失了连续分数阶 Fourier 变换的许多性质, 如可逆性和旋转相加性, 而很少得到使用. Ozaktas 等提出了两种改进的离散采样型算法^[38], 一种算法利用

$$x^2 \cot\alpha - 2xucsc\alpha + u^2 \cot\alpha = x^2 (\cot\alpha - \csc\alpha) + (x-u)^2 \csc\alpha + u^2 (\cot\alpha - \csc\alpha). \quad (38)$$

将本文第 1 节所述的分数阶 Fourier 变换三步分解变成了两次 chirp 信号乘和一次 chirp 信号卷积^[38], 这样便能够利用 FFT 算法来实现, 但是其中需要计算复杂的 Fresnel 积分. 而第二种算法利用频域上带限信号的支撑区有限和 Shannon 重构公式, 将输入信号的重构形式代入(3)式, 经过整理后得到了一种快速离散算法. 由于该算法的计算复杂度低且精度高, 而成为了目前常用的主流算法之一, 文献[39]对该算法做了进一步的改进, 降低了原算法对输入信号样本数的奇偶限制.

Pei 从保证变换核矩阵的酉性出发, 推导出了另一种离散算法^[40], 尽管它与 Ozaktas 等提出的算法一样不满足旋转相加性, 但是它严格满足可逆性及连续分

数阶 Fourier 变换的其余大部分性质,且精度高、计算量小、约束条件少,便于 DSP 实现.

3) 线性组合型^[41,42],通过对某些特定阶数的 DFRFT 的线性组合来得到任意阶数的 DFRFT. 利用 Taylor 级数展开和 Cayley-Hamilton 定理,DFRFT 可以表示为恒等算子, DFT, 时间反转算子和 IDFT 的线性组合^[41],即阶数依次为 0, 1, 2, 3, 的 DFRFT 的线性组合. 该算法在现有的离散算法中计算量最小,遗憾的是它的计算精度也是最差的. 文献[42]提出了另一种线性组合型离散算法,将线性组合的特定阶数从前述的 0, 1, 2, 3 改为从 0 开始依次间隔 $4/N$ 的 N 个阶数, N 为输入离散样本数. 利用分数阶 Fourier 变换的旋转相加性,该算法可以采用串行的方式实现,即前次变换结果作为后次变换的输入,那么所需要的特定阶数离散变换结果数目可以减少为 1 个,该算法便于超大规模集成电路(VLSI)来实现,但是它需要已知至少 1 个特定阶数的变换结果,且这些特定阶数依赖于输入信号的样本数目 N .

在目前已有的各种 DFRFT 算法中, Ozaktas 等提出的算法及其改进算法^[38,39], Pei 等提出的离散采样型算法^[40],由于计算精度高、计算负担小而成为了主流算法. 另外还有一些 DFRFT 算法由于受限较多^[38],而很少得到使用. 以上介绍的都是单维算法,有关高维算法可查阅文献[43].

表 1 主要 DFRFT 算法的比较

	特征分解 ^[35]	离散采样 ^[38]	离散采样 ^[40]	线性组合 ^[41]
旋转相加性	√	X	X	√
可逆性	√	√	√	√
计算精度	√	√	√	X
计算量	$M^2/2$	$M \log_2 M + 2M$	$(M/2) \log_2 M + 2M$	$(M/2) \log_2 M$
闭式形式	X	√	√	√

5 信号处理中的应用

分数阶 Fourier 变换是传统 Fourier 变换的广义形式,是在统一的时频域上处理信号. 相较传统 Fourier 变换,它的灵活性更强,且适于处理非平稳信号,具有比较成熟的快速离散算法,因此,在信号处理领域已经得到了许多应用.

5.1 信号检测和参数估计

由于分数阶 Fourier 变换可以理解为 chirp 基分解,因此分数阶 Fourier 变换特别适合于处理 chirp 类信号. 利用线性调频(LFM)信号在不同阶数的分数阶 Fourier 域呈现出不同的能量聚集性的特性,通过在分数阶 Fourier 域作峰值二维搜索就可以实现对 LFM 信号的检测和参数估计. 文献[44]基于这一思想,提出了一种多分量 LFM 信号的检测和参数估计算法,考虑到搜索的优化问题 and 多分量信号间的相互影响,可以采用拟 Newton 法和引入峰值遮隔的级联处理方式来提

高算法效率和处理多分量, 误差分析和仿真结果都表明了该估计是渐进无偏和渐进有效的.

5.2 相位恢复及信号重构

如果已知某信号两次不同阶数的分数阶 Fourier 变换模 $|X_{p+\sigma}(u)|$, $|X_{p-\sigma}(u)|$, 那么就可以重构出该信号, 而只会相差一个常数相位项(原因在于只相差一个常数相位项的两个函数的同一阶数分数阶 Fourier 变换将具有相同的模). 目前主要存在迭代和非迭代两种类型. 非迭代法利用分数阶 Fourier 变换与时频分布的关系, 通过求相位的瞬时变化率来恢复相位信息、重构信号. 利用分数阶 Fourier 变换与模糊函数的关系, $X_p(u)$ 的瞬时相位变化率离散形式可以写成^[45]

$$\hat{f}_p(n\Delta) = -\frac{\Delta \cdot \left(|X_{p+\sigma}(n\Delta)|^2 - |X_{p-\sigma}(n\Delta)|^2 \right) *_n \operatorname{sgn}(n\Delta)}{\pi\sigma \cdot 2 |X_p(n\Delta)|^2}, \quad (39)$$

其中 $*_n$ 表示离散卷积算子, $2 |X_p(n\Delta)|^2 \approx |X_{p+\sigma}(n\Delta)|^2 + |X_{p-\sigma}(n\Delta)|^2$, 这就需要 σ 足够小. 当恢复出相位信息后就能够重构信号

$$\hat{x}(t) = \tilde{F}_{-p}(\hat{X}_p(n\Delta)) = \tilde{F}_{-p} \left(|X_p(n\Delta)| \cdot \exp \left[j \sum_{m=-M}^n 2\pi \hat{f}_p(m\Delta) \Delta \right] \right). \quad (40)$$

M 须满足 $f_p(n\Delta) = 0$, $n < -M$. 迭代法主要有 Gerchberg-Saxton 算法, 该算法通过多次迭代来得到 $\hat{X}_{p+\sigma}(u)$ 或 $\hat{X}_{p-\sigma}(u)$: 首先给 $|X_{p-\sigma}(u)|$ 赋予初始相位来构造 $\hat{X}_{p-\sigma,1}(u)$, 然后做 2σ 阶分数阶 Fourier 变换得到 $\hat{X}_{p+\sigma,1}(u)$, 再将 $|X_{p+\sigma}(u)|$ 代入 $\hat{X}_{p+\sigma,1}(u)$ 得到 $\hat{X}_{p+\sigma,2}(u)$, 通过 -2σ 阶分数阶 Fourier 变换, 可以得到 $\hat{X}_{p-\sigma,2}(u)$, 这样不断迭代下去, 就得到了 $\dots \hat{X}_{p-\sigma,n}(u), \hat{X}_{p+\sigma,n}(u), \dots$, 当 $\hat{X}_{p-\sigma,n}(u)$ 满足下式时, 则迭代终止, 得到估计值 $\hat{X}_{p-\sigma}(u) = \hat{X}_{p-\sigma,n}(u)$.

$$\left\| \hat{X}_{p-\sigma,N}(u) - \hat{X}_{p-\sigma}(u) \right\| \leq m_e, \quad m_e > 0, \quad (41)$$

其中 m_e 为预先确定的最大误差. 对估计值 $\hat{X}_{p+\sigma}(u)$ 或 $\hat{X}_{p-\sigma}(u)$ 作相应的分数阶 Fourier 反变换就可以重构原时域信号^[46]. 该迭代法与前述的非迭代法不同的是, 它恰恰适用于 σ 较大的情况, 尤其是两次分数阶 Fourier 变换“正交”时(即 $\sigma = 0.5$), 重构误差最小.

5.3 滤波

将传统频域的乘性滤波器推广到分数阶 Fourier 域, 就得到了分数阶 Fourier 域乘性滤波器:

$$x_{\text{out}}(t) = F_{-p} \left[F_p(x_{\text{in}}(t)) \cdot H_p(u) \right], \quad (42)$$

其中 $H_p(u)$ 为 p 阶分数阶 Fourier 域传递函数. 通过设计不同的 $H_p(u)$ 可以得到不同类型的滤波器, 文献[9]所提出的扫频滤波器就是分数阶 Fourier 域带通滤波器的时域表现形式^[47]. 乘性滤波具有较好效果的前提条件是信号与噪声变换到某阶分数阶 Fourier 域后能够完全或大部分分离. 如果一次变换不能达到目的, 那么可以考虑级联多次不同阶数分数阶 Fourier 域乘性滤波来实现^[48]. 由分数阶 Fourier 变换与时频分布的关系, 我们可以知道乘性滤波需要信号与噪声时频分布无耦合或小部分耦合, 如果信号与噪声的时频分布不满足上述条件, 那么乘性滤波的方法将得不到好的效果.

文献[49]给出了最小均方误差准则下的分数阶 Fourier 域最优滤波算法, 该算法具有更好的普适性. 假定已知: ① 期望信号 $s(t)$ 和加噪信号 $x(t) = s(t) + n(t)$ 间的互相关函数 $r_{sx}(t, \sigma)$; ② $s(t)$ 的自相关函数 $r_{ss}(t, \sigma)$; ③ $x(t)$ 的自相关函数 $r_{xx}(t, \sigma)$. 那么最优滤波传递函数如下:

$$\tilde{H}_p(u) = R_{sx}(u) / R_{xx}(u), \quad (43)$$

其中

$$R_{sx}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_p(u, t) \cdot K_p^*(u, \sigma) \cdot r_{sx}(t, \sigma) dt d\sigma,$$

$$R_{xx}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_p(u, t) \cdot K_p^*(u, \sigma) \cdot r_{xx}(t, \sigma) dt d\sigma.$$

函数 K_p 如(2)式所示. 具体步骤是: 首先给(43)式中的 p 赋初始值, 然后在最小均方误差准则下利用迭代算法来确定最佳的 p 值(计算均方误差时需要用到 $r_{ss}(t, \sigma)$), 再将其代入(43)式, 便得到了分数阶 Fourier 域最优滤波传递函数. 需要注意的是: 建立在分数阶 Fourier 域上的滤波器(估计算子)只是线性算子的一个子集, 所以所得到的分数阶 Fourier 域最优估计算子未必是相应滤波问题的 Wiener 解. 文献[50]针对白噪声背景下线性调频信号的滤波问题, 由线性最小均方误差估计的正交条件出发, 证明了上述分数阶 Fourier 域最优滤波器是这种滤波问题的等效 Wiener 滤波器, 并给出了这一滤波算子的离散实现算法.

将分数阶 Fourier 域最优滤波算法用于阵列信号处理, 期望信号 $s(t)$ 设为需要形成的波束信号, 加噪信号 $x(t)$ 设为传感器接收信号, 就能够得到基于分数阶

Fourier 变换的波束形成算法, 仿真结果显示该波束形成算法在目标加速运动情况下效果远好于传统的频域最小均方误差波束形成算法^[51].

5.4 神经网络

分数阶 Fourier 变换比 Fourier 变换多一个变换参数, 因此也就比 Fourier 变换具有更多的灵活性, 通过选择合适的变换阶数 p , 在相应的分数阶 Fourier 域设计神经网络, 往往能够得到更好的效果. 文献[52, 53]探讨了这个问题, 分别提出了各自的算法, 前者更类似于分数阶 Fourier 域滤波(图 2), 后者则是把分数阶 Fourier 变换作为神经网络输入的预处理(图 3). 在最优变换阶数 p 的选取上, 两者都是将 p 在一定范围内($0 \leq p \leq 1$)按某个步长进行步进尝试, 以选取效果最好的 p 值.

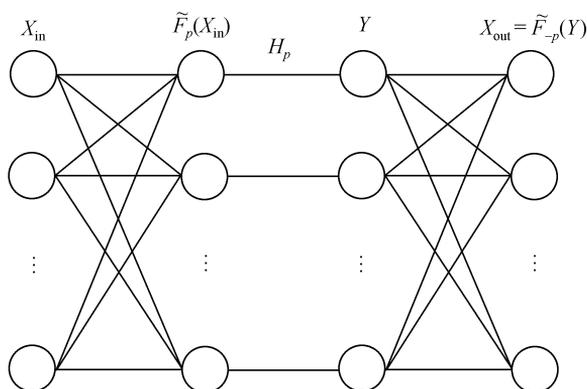


图 2 基于分数阶 Fourier 变换的神经网络

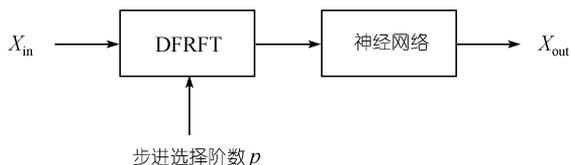


图 3 基于分数阶 Fourier 变换预处理的神经网络

5.5 声信号分析

人或动物的声音信号可以建模成基波和它的各次谐波组成, 并且频率是时变的, 这样, 传统的 Fourier 变换将不能很好地描述声音信号. 而分数阶 Fourier 变换适于处理时变信号, 且满足线性条件, 在加性噪声情况下能够不受交叉项影响. 文献[54]提出了一种基于分数阶 Fourier 变换的语音信号描述方法, 定义了一

个描述变量如下:

$$C_p(i) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_{m=1}^M \left[|X_p(m)|^2 \cos\left(\frac{i\pi}{M}(m-0.5)\right) \right], \quad (44)$$

其中 $X_p(m) = \tilde{F}_p[x](m) = \sum_n \tilde{g}_p(m,n)x(n), n=1, \dots, M$, $x(n)$ 为语音信号离散表示.

文献[55]进一步假定声音信号是可以分段近似为恒包络的线性调频信号, 把分数阶 Fourier 变换和动力学建模结合起来, 将原始声音信号映射成一个低维动力学模型, 通过一组动力学模型参数来描述原信号, 在仿真分析中采用了实测海洋哺乳动物的声音数据来验证该方法的有效性. 尽管上述声音分析方法在原文献的仿真中都是用来做声音识别, 但是它们还可以用在声音增强、确认、合成等方面.

5.6 图像处理

分数阶 Fourier 变换在图像处理中的应用主要包括数字水印及加密. 通过把待处理图像变换到某阶分数阶 Fourier 域, 然后将水印数据按照一定的规则嵌入选定的变换系数上. 水印检测采用门限检测方式, 根据嵌入的水印数据确定相应的检测门限^[56]. 在选择嵌入水印的变换系数和检测门限时都需要进行折中, 前者的选择需要折中考虑鲁棒性和不造成图像畸变, 而后者需要折中考虑虚检和漏检. 利用分数阶 Fourier 变换做图像加密, 简单来说就是对原始图像的二维分数阶 Fourier 变换乘以相位密钥来完成加密, 解密过程与加密过程正好相反, 先乘以相位密钥的共轭, 然后利用对应的二维分数阶 Fourier 反变换来恢复图像. 因为分数阶 Fourier 变换比 Fourier 变换多一个变换参数, 因此基于分数阶 Fourier 变换的加密算法比基于 Fourier 变换或余弦变换的加密算法具有更好的加密效果, 有关二维分数阶 Fourier 变换可参考文献[6]第 4 章和文献[43]. 通过对上述基本加密过程进行改动, 得到了许多不同的加密算法. 例如, 在二维分数阶 Fourier 变换中使用不同变换阶数或不同相位密钥、级联多个二维分数阶 Fourier 变换等. 文献[57]采用两路不同阶数的分数阶 Fourier 变换并行加密, 然后传送两路变换结果的模平方, 并将 5.2 节所介绍的 1 维迭代相位恢复方法推广为 2 维, 利用该 2 维迭代方法来解密. 与 1 维迭代相位恢复方法一样, 该 2 维迭代方法仍然需要两个阶数接近于“正交”, 才能具有高的准确度.

5.7 雷达、声纳、通信中的应用

除了前面提到的分数阶 Fourier 域波束形成^[51]、目标识别^[53]外, 分数阶 Fourier 变换在雷达、声纳和通信中还存在着其他的应用.

随着阵列天线技术的不断应用, 基于分数阶 Fourier 变换的阵列信号处理算法也吸引了人们的注意. 除了文献[51]所探讨的分数阶 Fourier 域波束形成算法外,

文献[58]提出了一种基于分数阶 Fourier 变换的多分量宽带 LFM 信号波达方向估计新算法, 利用 LFM 信号在分数阶 Fourier 域的能量聚集性, 在分数阶 Fourier 域对多分量 LFM 信号进行分离和参数估计, 并构造出分数阶 Fourier 域的阵列信号相关矩阵, 通过对该相关矩阵进行特征值分解来估计信号子空间和噪声子空间, 最后利用 MUSIC 算法估计出各分量信号的波达方向. 该方法对宽带 LFM 信号的波达方向估计精度高, 且鲁棒性好. 但是, 该方法针对的是非相干的宽带 LFM 信号, 而相干宽带 LFM 信号的波达方向估计仍需要进一步研究.

众所周知, 当发射信号波长与目标尺寸差不多时能够产生共振, 利用共振回波可以检测和识别目标, 但是共振需要一定的时间才能激发. 当发射信号为宽带脉冲信号(目标尺寸未知), 在激发共振之前, 目标回波信号近似为冲激信号, 文献[59, 60]都研究了如何利用分数阶 Fourier 变换来分析这种冲激类的回波信号. 所不同的是, 文献[59]只利用了 $p = 0.5$ 的分数阶 Fourier 域信息, 而文献[60]则利用了 $-1 \leq p \leq 1$ 的分数阶 Fourier 域信息, 两篇文献的仿真结果都显示了分数阶 Fourier 变换用于目标回波检测和识别的良好性能.

对机载 SAR 来说, 地面运动目标的回波近似为 LFM 信号, 因此可以利用分数阶 Fourier 变换来检测动目标^[61, 62]. 目前相参体制的外辐射源雷达是以直达波与目标反射信号进行微弱目标相干检测来对目标进行定位和跟踪. 常用的相干检测是采用时延-频移二维相关(或称为“互模糊函数”, 如(45)式所示)来检测目标. 文献[63]利用分数阶相关与二维相关函数的关系, 将分数阶相关引入极坐标表示的二维相关函数的计算中, 从而提出了一种基于分数阶相关的无源雷达动目标检测新算法:

$$M_{xy}(r, s) = \int x(t+r/2)y^*(t-r/2)e^{-j2\pi st} dt. \quad (45)$$

从(18)和(19)式可以看出, 既然分数阶位移算子 $T_{\phi, \tau}$ 是将信号在时频平面上沿着某个径向轴移动, 因此基于 $T_{\phi, \tau}$ 的分数阶相关必然与时延-频移二维相关存在某种对应关系. 经过变量代换和整理, 我们可以得到(46)式, 该式说明了两个信号的 p 阶分数阶相关就等于它们的二维相关函数在 ϕ 角射线方向的径向切片(图 4). 利用这个关系, 我们便得到了一种新的相参体制外辐射源雷达的目标检测算法, 而且可以根据先验知识预先确定需要计算的 ϕ 角范围, 只扫描该环形扇区而不必像(45)式那样计算整个时延-频移平面, 这样可以大大减小运算量.

$$\Gamma_{\text{corr}}^p[x, y](\eta) = M_{xy}(\eta \cos \phi, \eta \sin \phi), \quad \phi = p\pi/2. \quad (46)$$

匹配滤波器以及与其等价的拷贝相关器是在 Gauss 白噪声背景下检测确知信号的最佳检测器. 但是, 水声环境具有其自身的特殊性, 如界面多途、介质非均匀等. 当采用 LFM 信号时, 由于受 Doppler 失配的影响, 在输出信噪比“最大”

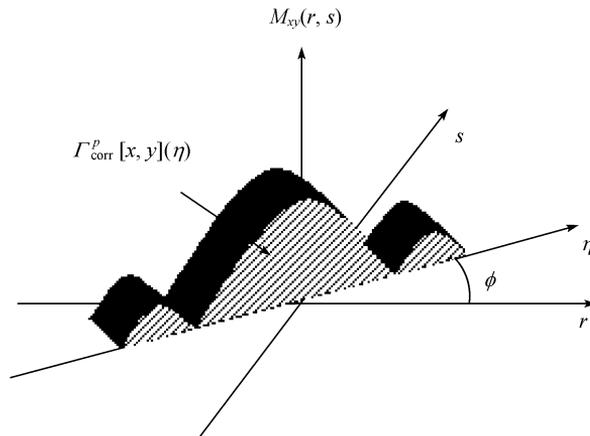


图 4 分数阶相关与时延-频移二维相关的关系

的位置由于相位不一致而不再最大, 导致匹配滤波器性能恶化. 而分数阶 Fourier 变换却适于处理 chirp 类信号. 因此, 文献[64]对基于分数阶 Fourier 变换的目标检测算法与传统匹配滤波器在 Gauss 白噪声背景下 LFM 信号的检测性能作了仿真比较, 结果表明分数阶 Fourier 变换良好的抗 Doppler 性能有利于微弱信号检测. 为了提高阵列声纳的最大作用距离, 最直接的办法是提高发射强度. 但是阵列中各换能器间的相互影响往往限制了发射效率的提高, 文献[65]提出了一种基于分数阶 Fourier 变换的传感器阵辐射特性预测算法, 通过预测各传感器的辐射特性来进行实时调整, 以提高声纳阵的发射效率.

直接序列扩频(DSSS)技术很强的抗干扰能力使得其日益受到重视(当然还有别的优点, 如大容量、低截获等), 而近年来宽带的非平稳干扰对扩频系统的影响也引起了人们越来越多的注意, 其中常用的一种信号就是宽带 LFM 信号, 文献[66]就研究了如何在 DSSS 通信系统中利用分数阶 Fourier 变换来抑制扫频干扰, 主要思想是基于分数阶 Fourier 域的乘性滤波器, 通过对 LFM 信号的参数估计来设计滤波器, 并考虑了滤波对解调的影响而设计了分数阶 Fourier 域的相关接收机, 将之与时域相关接收机作了性能比较, 证明了该线扫频干扰抑制方法能够有效改善 DSSS 接收机性能, 且分数阶 Fourier 域的相关接收机性能又优于时域相关接收机. 随着通信技术的发展, 移动条件下的大容量通信已经开始进入人们的普通生活, 但是随之而来的技术问题也日益突出, 其中快衰落信道就是高速移动通信所不可避免的问题之一. 文献[67, 68]基于分数阶 Fourier 变换提出了各自对时变信道的见解. 文献[67]基于时变信道的参数模型, 提出了一种利用分数阶 Fourier 变换实现的时变信道参数估计方法, 该法运算量小, 估计精度高(逼近于 Cramér-Rao 下界). 其主要思想是通过发射多分量的 LFM 信号作为导频(或训练序

列)信号,并在接收端应用分数阶 Fourier 变换对接收到的导频(或训练序列)信号进行参数估计,从而建立起快衰落信道的参数化模型. 正交频分多路技术(OFDM)是在频域内将给定信道分成许多正交子信道,在每个子信道上使用一个子载波进行调制,各子载波并行传输. 对于频率选择性信道,这将大大消除信号波形间的干扰. 然而,对于快衰落信道,普通 OFDM 系统中子载波的正交性易受到破坏,文献[68]提出用 chirp 信号基来匹配快衰落信道,在实现上用分数阶 Fourier 变换来代替 FFT,仿真结果显示该方案能够较好地适应时变信道. 文献[69]对该 FRFT-OFDM 系统的峰均比进行了分析,发现在子载波数目较少时,该方案优于传统 OFDM 系统,而在子载波数目较多时,两者的区别不大,并将传统 OFDM 系统中抑制峰均比的 SLM(selective mapping)方法推广到了 FRFT-OFDM 系统.

6 结束语

本文对近年来分数阶 Fourier 变换在信号处理领域的研究成果从基础、应用基础、应用三个层面进行了总结,对分数阶 Fourier 变换的理论体系做了系统阐述. 从分数阶 Fourier 域与时、频域间的关系可以看出分数阶 Fourier 变换实质上是一种统一的时频变换,同时反映了信号在时、频域的信息,与常用二次型时频分布不同的是它用单一变量来表示时频信息,且没有交叉项困扰,与传统 Fourier 变换(其实是分数阶 Fourier 变换的一个特例)相比,它适于处理非平稳信号,尤其是 chirp 类信号,且多了一个自由参量(变换阶数 p). 因此分数阶 Fourier 变换在某些条件下往往能够得到传统时频分布或 Fourier 变换所得不到的效果,而且由于它具有比较成熟的快速离散算法,因此在得到更好效果的同时并不需要付出太多的计算代价. 从第 3 和 5 节的内容来看,目前信号处理领域对分数阶 Fourier 变换的应用有如下 6 种方式,其实这也正好体现了分数阶 Fourier 变换的 6 大优势:

1) 分数阶 Fourier 变换是一种统一的时频变换,随着阶数从 0 连续增长到 1,分数阶 Fourier 变换展示出信号从时域逐步变化到频域的所有变化特征,可以为信号的时频分析提供更大的选择余地;最直接的利用方式就是将传统时、频域的应用推广到分数阶 Fourier 域以获得某些性能上的改善,如分数阶 Fourier 域的滤波[47-49]等.

2) 分数阶 Fourier 变换可以理解为 chirp 基分解,因此,它十分适合处理 chirp 类信号,而 chirp 类信号在雷达、通信、声纳以及自然界中经常遇到,这些应用前面都已经提到过[44,55,59,60,64,66].

3) 分数阶 Fourier 变换是对时频平面的旋转,利用这一点可以建立起分数阶 Fourier 变换与时频分析工具的关系,既可以用来估计瞬时频率、恢复相位信息[45],又可以用来设计新的时频分析工具,如 TTFT[31]以 Gauss 函数的分数阶 Fourier 变换为基函数的信号扩展方法[32]等.

4) 相较 Fourier 变换, 分数阶 Fourier 变换多一个自由参数, 因此在某些应用场合能够得到更好的效果, 如数字水印^[56]和图像加密^[57].

5) 分数阶 Fourier 变换是线性变换, 没有交叉项干扰, 在具有加性噪声的多分量情况下更具优势.

6) 具有比较成熟的快速离散算法, 这既保证了分数阶 Fourier 变换能够进入数字信号处理的工程实用阶段, 而且基于它可以为其他的分数阶算子或变换提供快速离散算法, 如分数阶卷积、相关及分数阶 Hartley 变换等.

至今为止, 有关分数阶 Fourier 变换的研究已经取得了丰硕成果, 但是仍然存在许多理论上的问题需要解决. 例如, 4.1 节所阐述的分数阶 Fourier 域采样定理仅仅是在均匀采样情况下, 而非均匀采样在实际情况下往往是不可避免的; 再比如, 在众多的分数阶 Fourier 变换应用中都需要确定最优的变换阶数, 而目前大多数情况下都是采用步进选择, 缺乏比较行之有效的阶数选择方法, 基于分数阶 Fourier 变换二阶矩的方法并不具有普适性. 因此, 在如下几个方面仍然需要进一步的研究: ① 现有研究成果的完善, 如最优阶数的选择, 更为理想的快速离散算法, 短时分数阶 Fourier 变换的窗效应分析, 进一步探索分数阶 Fourier 变换的应用等; ② 将分数阶 Fourier 变换与多抽样率数字信号处理理论相结合, 建立起分数阶 Fourier 域的多抽样率理论体系, 该理论体系能够进一步增强分数阶 Fourier 变换的优势, 文献[70]就利用了多抽样率理论中的多相结构与等效变换来提高分数阶 Fourier 变换离散算法的计算效率, 而基于分数阶 Fourier 变换的非均匀采样、抽样率转换等问题也将在该理论体系中找到答案; ③ 将分数阶 Fourier 变换的理论体系推广到线性正则变换, 正如分数阶 Fourier 变换是 Fourier 变换的广义形式一样, 线性正则变换是分数阶 Fourier 变换的广义形式^[71]. 线性正则变换具有 3 个自由参数, 相较于分数阶 Fourier 变换的 1 个自由参数和 Fourier 变换的零个自由参数, 线性正则变换具有更强的灵活性.

参 考 文 献

- 1 Namias V. The fractinal order Fourier transform and its application to quantum mechanics. *J Inst Math Appl*, 1980, 25: 241~265
- 2 McBride A C, Kerr F H. On Namias' fractional Fourier transform. *IMA J Appl Math*, 1987, 39: 159~175
- 3 Mendlovic D, Ozaktas H M. Fractional Fourier transforms and their optical implementation (I). *J Opt Soc AM A*, 1993, 10(10): 1875~1881
- 4 Ozaktas H M, Mendlovic D. Fractional Fourier transforms and their optical implementation (II). *J Opt Soc AM A*, 1993, 10(12): 2522~2531
- 5 Ozaktas H M, Kutay M A, Zalevsky Z. *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*. New York: John Wiley & Sons, 2000
- 6 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004
- 7 孙晓兵, 保铮. 分数阶 Fourier 变换及其应用. *电子学报*, 1996, 24(12): 60~65

- 8 蒋志平. 分数阶傅里叶变换. 量子电子学, 1996, 13(4): 289~300
- 9 Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. IEEE Tran Signal Processing, 1994, 42(11): 3084~3091
- 10 Zayed A I, Garcia A G. New sampling formulae for the fractional Fourier transform. Signal Processing, 1999, 77: 111~114
- 11 Erseghe T, Kraniuskas P, Cariolaro G. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem. IEEE Tran Signal Processing, 1999, 47(12): 3419~3423
- 12 Almeida L B. Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform. IEEE Signal Processing Letters, 1997, 4(1): 15~17
- 13 Zayed A I. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform. IEEE Signal Processing Letters, 1998, 5(4): 101~103
- 14 Lohmann A W. Relationships between the Radon-Wigner and fractional Fourier transforms. J Opt Soc Am A, 1994, 11(6): 1398~1401
- 15 Ozaktas H M, Erkaya N, Kutay M A. Effect of fractional Fourier transformation on time-frequency distributions belonging to the cohen class. IEEE Signal Processing Letters, 1996, 3(2): 40~41
- 16 冉启文, 沈一鹰, 刘永坦. 分数 Fourier 变换、矩阵群和时-频分析. 信号处理, 2001, 17(2): 162~167, 129
- 17 Ozaktas H M, Aytur O. Fractional Fourier domains. Signal Processing, 1995, 46: 119~124
- 18 Shinde S, Gadre V M. An uncertainty principle for real signals in the fractional Fourier transform domain. IEEE Tran Signal Processing, 2001, 49(11): 2545~2548
- 19 Akay O, Boudreaux-Bartels G F. Fractional convolution and correlation via operator methods and an application to detection of linear FM signals. IEEE Tran Signal Processing, 2001, 49(5): 979~993
- 20 Pei S C, Ding J J. Relations between fractional operations and time-frequency distributions, and their applications. IEEE Tran Signal Processing, 2001, 49(8): 1638~1655
- 21 Akay O, Boudreaux-Bartels G F. Unitary and hermitian fractional operators and their relation to the fractional Fourier transform. IEEE Signal Processing Letters, 1998, 5(12): 312~314
- 22 Lohmann A W, Mendlovic D, Zalevsky Z. Fractional Hilbert transform. Opt Lett, 1996, 21: 281~283
- 23 Pei S C, Yeh M H. Discrete fractional Hilbert transform. IEEE Tran Circuits and Systems-II, 2000, 47(11): 1307~1311
- 24 Tseng C C, Pei S C. Design and application of discrete-time fractional Hilbert transformer. IEEE Tran Circuits and Systems-II, 2000, 47(12): 1529~1533
- 25 Pei S C, Ding J J. Fractional cosine, sine, and Hartley transforms. IEEE Tran Signal Processing, 2002, 50(7): 1661~1680
- 26 王开志, 万遂人. 变分数阶傅氏变换及在时频建模中的应用. 东南大学学报(自然科学版), 2001, 31(4): 27~30
- 27 陈 喆, 王宏禹, 邱天爽. 基于分数阶傅立叶变换的模糊函数的研究. 信号处理, 2003, 19(6): 499~502
- 28 Stankovic L. A method for time-frequency analysis. IEEE Tran Signal Processing, 1994, 42(1): 225~229
- 29 Alieva T, Bastiaans M J. On fractional Fourier transform moments. IEEE Signal Processing Letters, 2000, 7(11): 320~323
- 30 Stankovic L, Alieva T, Bastiaans M J. Time-frequency signal analysis based on the windowed fractional Fourier transform. Signal Processing, 2003, 83: 2459~2468
- 31 Zhang F, Bi G A, Chen Y Q. Tomography time-frequency transform. IEEE Tran Signal Processing, 2002, 50(6): 1289~1297
- 32 陈光化, 马世伟, 曹家麟, 等. 基于分数阶傅立叶变换的自适应时频表示. 系统工程与电子技术, 2001, 23(4): 69~71
- 33 Xia X G, Owechko Y, Soffer B H, et al. On generalized-marginal time-frequency distributions. IEEE Tran Signal Processing, 1996, 44(11): 2882~2886

- 34 张卫强, 陶 然. 分数阶傅里叶变换域上带通信号的采样定理. 电子学报, 2005, 33(7): 1196~1199
- 35 Pei S C, Yeh M H, Tseng C C. Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections. *IEEE Tran Signal Processing*, 1999, 47(5): 1335~1348
- 36 Candan C, Kutay M A, Ozaktas H M. The discrete fractional Fourier transform. *IEEE Tran Signal Processing*, 2000, 48(5): 1329~1337
- 37 平先军, 陶 然, 周思永, 等. 一种新的分数阶傅立叶变换快速算法. 电子学报, 2001, 29(3): 406~408
- 38 Ozaktas H M, Arikan O, Kutay A A, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform. *IEEE Tran Signal Processing*, 1996, 44(9): 2141~2150
- 39 Bultheel A, Sulbaran H E M. Computation of the fractional Fourier transform. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2004, 16: 182~202
- 40 Pei S C, Ding J J. Closed-form discrete fractional and affine Fourier transforms. *IEEE Tran Signal Processing*, 2000, 48(5): 1338~1353
- 41 Santhanam B, McClellan J H. The discrete rotational Fourier transform. *IEEE Tran Signal Processing*, 1996, 44(4): 994~998
- 42 Yeh M H, Pei S C. A method for the discrete fractional Fourier transform computation. *IEEE Tran Signal Processing*, 2003, 51(3): 889~891
- 43 Pei S C, Yeh M H. Two dimensional discrete fractional Fourier transform. *Signal Processing*, 1998, 67: 99~108
- 44 Qi L, Tao R, Zhou S Y, et al. Detection and paramter estimation of multicomponent LFM signal based on the fractional Fourier transform. *Science in China, Ser F*, 2004, 47(2): 184~198
- 45 Alieva T, Bastiaans M J, Stankovic L. Signal reconstruction from two close fractional Fourier power spectra. *IEEE Tran Signal Processing*, 2003, 51(1): 112~123
- 46 Ertosun M G, Atli H, Ozaktas H M, et al. Complex signal recovery from two fractional Fourier transform intensities- order and noise dependence. *Optics Communications*, 2005, 244(1~6): 61~70
- 47 邓 兵, 陶 然, 齐 林, 等. 分数阶 Fourier 变换与时频滤波. *系统工程与电子技术*, 2004, 26(10): 1357~1359, 1405
- 48 Erden M F, Kutay M A, Ozaktas H M. Repeated filtering in consecutive fractional Fourier domains and its application to signal restoration. *IEEE Tran Signal Processing*, 1999, 47(5): 1458~1462
- 49 Kutay M A, Ozaktas H M, Arikan O, et al. Optimal filtering in fractional Fourier domains. *IEEE Tran Signal Processing*, 1997, 45(5): 1129~1143
- 50 齐 林, 陶 然, 周思永, 等. LFM 信号的一种最优滤波算法. 电子学报, 2004, 32(9): 1464~1467
- 51 Yetik I S, Nehorai A. Beamforming using the fractional Fourier transform. *IEEE Tran Signal Processing*, 2003, 51(6): 1663~1668
- 52 Shin S G, Jin S L, Shin S Y, et al. Optical neural network using fractional Fourier transform, log-likelihood, and parallelism. *Optics Communications*, 1998, 153: 218~222
- 53 Barshan B, Ayrulu B. Fractional Fourier transform pre-processing for neural networks and its applications to object recognition. *Neural Networks*, 2002, 15: 131~140
- 54 Sarikaya R, Gao Y Q, Saon G. Fractional Fourier transform features for speech recognition. In: *ICASSP '04. Proceedings*, 1. NJ: IEEE, 2004. 529~532
- 55 Ainsleigh P L, Kehtarnavaz N. Characterization of transient wandering tones by dynamic modeling of fractional Fourier features. In: *ICASSP '00. Proceedings*, 2. NJ: IEEE, 2000. 665~668
- 56 Djurovic I, Stankovic S, Pitas I. Digital watermarking in the fractional Fourier transformation domain. *Journal of Network and Computer Applications*, 2001, 24: 167~173
- 57 Hennelly B, Sheridan J T. Fractional Fourier transform-based image encryption: Phase retrieval algorithm. *Optics Communications*, 2003, 226: 61~80
- 58 陶 然, 周云松. 基于分数阶傅里叶变换的宽带线性调频信号波达方向估计新算法. 北京理工大学学

- 报, 2005, 25(10): 895~899
- 59 Jang S, Choi W, Sarkar T K, et al. Exploiting early time response using the fractional Fourier transform for analyzing transient radar returns. *IEEE Tran Antennas and Propagation*, 2004, 52(11): 3109~3121
- 60 Jouny I I. Radar Backscatter analysis using fractional Fourier transform. In: *IEEE Antennas and Propagation Society symposium*. NJ: IEEE, 2004. 2115~2119
- 61 董永强, 陶 然, 周思永, 等. 基于分数阶傅里叶变换的 SAR 运动目标检测与成像. *兵工学报*, 1999, 20(2): 132~136
- 62 Sun H B, Liu G S, Gu H, et al. Application of the fractional Fourier transform to moving target detection in airborne SAR. *IEEE Tran Aerospace and Electronic Systems*, 2002, 38(4): 1416~1424
- 63 赵兴浩, 陶 然. 基于分数阶相关的无源雷达运动目标检测新算法. *电子学报*, 2005, 33(9): 1567~1570
- 64 赵 羽, 蔡 平, 周敏东. 分数阶 Fourier 变换的数值计算. *哈尔滨工程大学学报*, 2002, 23(6): 1~3
- 65 Musha T, Uchida H, Nagashima M. Self-monitoring sonar transducer array with internal accelerometers. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2002, 27(1): 28~34
- 66 齐 林, 陶 然, 周思永等. DSSS 系统中基于分数阶傅立叶变换的扫频干扰抑制算法. *电子学报*, 2004, 32(5): 799~802
- 67 陈恩庆, 陶 然, 张卫强. 一种基于分数阶 Fourier 变换的时变信道参数估计方法. *电子学报*, 2005, 33(12): 2101~2104
- 68 Martone M. A multicarrier system based on the fractional Fourier transform for time-frequency-selective channels. *IEEE Tran Communications*, 2001, 49(6): 1011~1020
- 69 Ju Y, Barkat B, Attallah S. Analysis of peak-to-average power ratio of a multicarrier system based on the fractional Fourier transform. In: *2004 9th IEEE Singapore International Conference on Communication Systems*. New York: IEEE, 2004. 165~168
- 70 Huang D F, Chen B S. A multi-input-multi-output system approach for the computation of discrete fractional Fourier transform. *Signal Processing*, 2000, 80: 1501~1513
- 71 Moshinsky M, Quesne C. Linear canonical transformations and their unitary representations. *J Math Phys*, 1971, 12(8): 1772~1780

附录 A

表 A1 基本性质

$x(t)$	$X_p(u), \alpha = p\pi/2$
$x(t - \tau)$	$e^{\frac{t^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha - j\tau\sin\alpha} X_p(u - \tau\cos\alpha)$
$e^{j\sigma t}x(t)$	$e^{-j\frac{\sigma^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha + j\sigma\sin\alpha} X_p(u - \sigma\sin\alpha)$
$t^n x(t)$	$\left(u\cos\alpha + j\sin\alpha \frac{d}{du}\right)^n X_p(u)$
$x(t)/t$	$-j\sec\alpha e^{\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \int_{-\infty}^u x(t) e^{-\frac{t^2}{2}\cot\alpha} dt, \alpha \neq n\pi, n$ 为整数
$\int_{\rho}^t x(t') dt'$	$\sec\alpha e^{-\frac{u^2}{2}\tan\alpha} \int_{\rho}^u X_p(v) e^{\frac{v^2}{2}\tan\alpha} dv, \alpha - \pi/2 \neq n\pi, n$ 为整数
$\frac{d}{dt}x(t)$	$\cos\alpha \frac{d}{du}X_p(u) + j\sin\alpha u X_p(u)$
$x(\sigma t)$	$\frac{\sqrt{1 - j\cot\alpha}}{\sqrt{\sigma^2 - j\cot\alpha}} e^{\frac{u^2}{2}\left(\cot\alpha - \frac{\cos^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)} X_{\lambda}\left(\frac{u\sin\beta}{\sigma\sin\alpha}\right)$, 其中 $\cot\beta = \cot\alpha/\sigma^2, \lambda = 2\beta/\pi$

表 A2 常见信号的分数阶 Fourier 变换

$x(t)$	$X_p(u), \alpha = p\pi/2$
$\delta(t - \tau)$	$\sqrt{\frac{1 - j\cot\alpha}{2\pi}} e^{j\frac{u^2 + \tau^2}{2} - \cot\alpha - ju\tau\csc\alpha}$, $\alpha \neq n\pi$, n 为整数
1	$\sqrt{1 + j\tan\alpha} e^{-j\frac{u^2}{2}\tan\alpha}$, $\alpha - \pi/2 \neq n\pi$, n 为整数
$e^{j\sigma t}$	$\sqrt{1 + j\tan\alpha} e^{-j\frac{u^2 + \sigma^2}{2}\tan\alpha + ju\sigma\sec\alpha}$, $\alpha - \pi/2 \neq n\pi$, n 为整数
$e^{j\frac{\sigma}{2}t^2}$	$\sqrt{\frac{1 + j\tan\alpha}{1 + \sigma\tan\alpha}} e^{j\frac{u^2(\sigma - \tan\alpha)}{2(1 + \sigma\tan\alpha)}}$, $\alpha - \arctan(\sigma) - \pi/2 \neq n\pi$, n 为整数
$e^{j\frac{\sigma}{2}t^2}$	$\sqrt{\frac{1 - j\tan\alpha}{\sigma - j\tan\alpha}} e^{j\frac{u^2(\sigma^2 - 1)\cot\alpha}{2(\sigma^2 + \cot^2\alpha)}} e^{-j\frac{u^2\sigma\csc^2\alpha}{2(\sigma^2 + \cot^2\alpha)}}$
$H_n(t)e^{-t^2/2}$	$H_n(u)e^{-u^2/2} e^{-jn\alpha}$, 其中 $H_n(u)$ 为 n 阶 Hermite 多项式