考虑几何非线性的蜂窝芯结构弹塑性分析

葛萌, 赵阳*, 马文来, 姚怀博

哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001

* E-mail: yangzhao@hit.edu.cn

收稿日期: 2020-11-05; 接受日期: 2020-12-28; 网络版发表日期: 2021-06-22

国家自然科学基金(批准号: 51805110)资助项目

摘要 本文基于非线性梁理论和弹塑性理论对具有恒定蜂窝壁厚度的六边形蜂窝芯结构进行了考虑几何非线性的弹塑性建模, 并研究了数值求解算法, 获得了蜂窝芯结构的应力-应变曲线和泊松比, 建立了蜂窝芯结构的有限元模型, 验证了方法的正确性. 得到了不同几何参数(包括蜂窝壁厚度与倾斜蜂窝壁长度的比值 t/l 、垂直蜂窝壁高度与倾斜蜂窝壁长度的比值 h/l 、蜂窝壁倾角 θ)下蜂窝芯结构的应力-应变曲线和泊松比, 并分析了几何非线性、材料非线性对于蜂窝芯结构应力-应变曲线的影响. 随着应变的增加, 结构的几何非线性造成结构的整体刚度增大. 塑性变形出现后, 结构的整体刚度开始下降.

关键词 蜂窝, 几何非线性, 弹塑性, 数值方法

1 引言

蜂窝夹层结构通常由上下蒙皮层和中间的蜂窝芯构成. 蜂窝芯将硬度及强度较高的材料(如纤维增强复合材料)分离, 增加了夹层结构的整体惯性矩, 并且几乎没有增加结构的质量, 使夹层结构能有效地抵抗弯曲载荷和剪切载荷, 并限制结构屈曲的发生. 故蜂窝夹层结构在航空航天、土木、机械等领域获得了广泛的应用^[1]. 蜂窝芯作为蜂窝夹层板的中心结构, 具有比强度高、比刚度大、隔热隔振性能好、相对密度低等优点.

随着蜂窝芯结构的应用日益广泛, 仅对其进行弹性小变形范围内的力学性能分析已不能满足蜂窝结构的设计需求, 必须对蜂窝芯结构开展弹塑性分析以更

好地了解蜂窝芯结构的力学性能. 例如, 在航空航天、车辆和体育保护设施中, 蜂窝芯可用作能量吸收装置中的重要部件, 允许结构发生塑性变形, 从而承受更大的载荷以保护结构和人体安全^[2]. 几何非线性对蜂窝芯结构的力学性能也有显著的影响^[3,4]. 同时, 夹层结构在不同类型载荷下的响应部分取决于蜂窝芯的等效弹性模量等力学性能^[5,6]. 因此, 对蜂窝芯结构开展考虑几何非线性的弹塑性分析是分析蜂窝夹层结构力学性能的重要前提.

现阶段关于蜂窝芯结构力学性能的研究主要集中在弹性小变形假设下的蜂窝芯结构等效力学性能. 许多学者使用各种分析方法, 对蜂窝芯结构的等效弹性性能开展了研究^[7]. 主要包括微观力学方法^[8]、能量方法^[9,10]以及均匀化方法^[11,12]. 其中, 最著名也是应用

引用格式: 葛萌, 赵阳, 马文来, 等. 考虑几何非线性的蜂窝芯结构弹塑性分析. 中国科学: 技术科学, 2022, 52: 458–472

Ge M, Zhao Y, Ma W L, et al. Elastoplastic analysis of honeycombs with consideration for geometric nonlinearity (in Chinese). Sci Sin Tech, 2022, 52: 458–472, doi: 10.1360/SST-2020-0442

最为广泛的是Gibson和Ashby^[13,14]的等效模型方法. 他们起初的研究主要是基于恒定壁厚的蜂窝材料, 考虑了蜂窝壁的弯曲变形. 但是他们发现, 面内剪切模量的理论结果和实验结果存在较大误差, 因此他们修正了理论模型, 考虑了轴向变形和剪切变形对于面内弹性能的影响, 很好地描述了低相对密度下蜂窝结构的等效弹性模量. Masters和Evans^[15]基于弹性小变形假设, 考虑了蜂窝结构的弯曲、拉伸和铰接变形, 建立了用于预测蜂窝材料弹性常数的理论模型. 但是该理论模型仅适用于薄壁蜂窝材料, 并且随着相对密度的增加无法准确获得蜂窝材料的各向异性行为. Bala-wi和Abot^[16]提出了一种精确模型, 该模型考虑了由于蜂窝波纹或膨胀引起的六边形蜂窝壁相交点附近的曲率. 富明慧和尹久仁^[17]在Gibson模型的基础上, 考虑了蜂窝壁的拉伸变形, 对Gibson模型进行了修正. 赵金森^[18]提出一种Y模型, 采用能量方法研究了正六边形蜂窝芯结构的等效力学参数. Malek等人^[19]在Gibson模型的基础上, 基于Timoshenko梁理论以及小变形假设, 考虑了蜂窝壁的拉伸变形、弯曲变形以及剪切变形, 得到了蜂窝结构的全部等效力学参数, 该理论同时适用于薄壁蜂窝结构和厚壁蜂窝结构. Sorohan等人^[20,21]提出一种广义Gibson模型, 该模型考虑了倾斜蜂窝壁和垂直蜂窝壁之间的连接区域对于蜂窝等效力学参数的影响, 并通过实验比较了自由和刚性面板连接下蜂窝的力学行为.

可以看出, 蜂窝结构的等效力学性能已经得到了广泛研究. 但是需要指出的是, 蜂窝芯的变形实际上是非线性变形^[3]. 随着应变的增大, 上述方法会出现较大的误差. 因此需要考虑几何非线性对于蜂窝芯结构力学性能的影响. 陈誉等人^[22]基于Gibson方法, 通过有限元方法对蜂窝结构的本构模型进行了修正, 提出一种适用于低密度及高密度下的蜂窝非线性本构模型. Qiu等人^[3]利用欧拉梁理论, 对柔性蜂窝结构进行了非线性面内等效弹性模量的分析, 并与实验结果进行了对比. 结果表明, 蜂窝结构的面内等效弹性模量会随着应变的增加而增大. Fu等人^[23]对负泊松比蜂窝芯结构的面内剪切模量进行了研究, 并用椭圆积分的方法求得其解析解. Zhao等人^[4]采用Reissner梁理论, 同时考虑了蜂窝壁的拉伸、弯曲以及剪切变形, 并考虑了蜂窝壁之间连接区域的拉伸变形对于蜂窝面内等效弹性模量及泊松比的影响.

除了几何非线性, 材料非线性对于蜂窝芯结构的力学性能也有显著影响, 而现阶段国内外对于蜂窝结构材料非线性的研究尚不充分. 仅Bonfanti等人^[24,25]采用理想弹塑性模型、双曲硬化弹塑性模型对蜂窝芯结构进行了弹塑性分析及回弹分析. 但该分析均是基于小变形假设, 仅考虑了材料非线性的影响.

通过以上分析可以看出, 材料非线性和几何非线性是对蜂窝芯结构开展力学分析的两个重要因素. 因此, 对蜂窝芯结构进行考虑几何非线性的弹塑性分析具有重要的工程实践意义. 本文首先基于非线性欧拉梁理论和弹塑性理论对具有恒定蜂窝壁厚度的六边形蜂窝芯结构进行了弹塑性建模, 并设计了数值求解算法. 随后, 采用有限元软件建立了蜂窝芯结构的有限元模型, 验证了本文方法的正确性. 最后, 分析了不同几何参数下蜂窝芯结构的应力-应变曲线和泊松比, 并对比了几何非线性、材料非线性对于蜂窝芯结构应力-应变曲线的影响.

2 蜂窝芯结构的几何模型及其简化

蜂窝结构的平面几何模型如图1所示. x 方向为蜂窝芯结构的 W 方向, y 方向为蜂窝芯结构的 L 方向. 本文仅研究一种蜂窝芯结构的弹塑性分析方法, 因此仅考虑了恒定壁厚的蜂窝芯结构(即垂直蜂窝壁厚度和倾斜蜂窝壁的厚度相等), Gibson和Ashby^[13,14]在其研究中也采用了相同的几何模型. 由于六边形蜂窝结构呈现的周期性, 在分析模型中, 仅需要分析具有代表性的单胞结构, 如图1中的虚线框内所示.

图1中表征蜂窝结构的几何参数主要为: 蜂窝芯结构的倾斜蜂窝壁长度 l , 垂直蜂窝壁高度 h , 蜂窝壁厚度 t , 蜂窝壁的倾角 θ , 以及蜂窝芯结构在 z 轴方向的深度 b . 传统的分析方法中, 将倾斜蜂窝壁以及垂直蜂窝壁等效为梁, 依据以上几何参数对蜂窝芯进行分析. 但是从图2中可以看出, 由于蜂窝壁具有一定的厚度, 在倾斜蜂窝壁和垂直蜂窝壁的连接位置处存在一部分公共区域, 这就造成倾斜蜂窝壁和垂直蜂窝壁的实际长度并不为 l 和 h . 因此, 本文针对倾斜蜂窝壁和垂直蜂窝壁提出一种有效变形长度, 分别为 l_e 和 h_e . 其他部分则视为刚性. 倾斜蜂窝壁与垂直蜂窝壁的端部截面分别位于蜂窝内(或外)壁交点处的横截面(图2中虚线)到倾斜蜂窝壁与垂直蜂窝壁交点连接线的中点位置, 如图2

图1 六边形蜂窝示意图及几何参数

Figure 1 Schematic diagram and geometric parameters of hexagonal honeycombs.

图2 蜂窝芯有效几何参数

Figure 2 Effective geometric parameters of honeycombs.

所示.

几何参数 l_e 和 h_e 可以根据以下公式进行推导:

$$l_e = \begin{cases} l - \frac{t}{2} \left(\frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta \right), & \theta \leq 30^\circ, \\ l - \frac{t}{2} \tan\theta, & \theta > 30^\circ, \end{cases} \quad (1)$$

$$h_e = h - \frac{t}{2} \left(\frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta \right). \quad (2)$$

式(1)和(2)可以基于简单的几何关系得到, 本文不详细介绍.

蜂窝芯结构在面内方向承受均匀应力, 假设应力的传递是均匀的, 该应力作用于蜂窝单胞结构的合力在 x 和 y 方向分别记作 $2F_x$ 和 $2F_y$, 如图3所示. 由于六边形蜂窝芯的对称性, 仅需要研究蜂窝单胞的1/4部分作为其分析区域, 其在 x 和 y 方向所承载荷分别为 F_x 和 F_y , 如图3中虚线框内所示.

为了对蜂窝芯结构进行弹塑性分析, 该分析区域被分为3个部分. 对于区域1和3中的垂直蜂窝壁, 在单轴拉伸载荷作用下, 仅承受拉伸变形; 而对于区域2中

图3 蜂窝单胞及各部分等效模型

Figure 3 Unit cell and equivalent model of honeycombs.

的倾斜蜂窝壁, 可以将其等效为长度为 l_e 、横截面尺寸为 $b \times t$ 的悬臂梁在集中力及集中弯矩载荷作用下的非线性变形问题. 因此在下面的推导中, 首先基于非线性欧拉梁理论以及弹塑性理论推导区域2的非线性变形, 结合区域1, 3在面内载荷方向的变形最终得到蜂窝芯结构在 x 和 y 方向的应力-应变关系和泊松比.

本文所分析的蜂窝芯结构同时考虑了几何非线性以及材料非线性, 并且蜂窝壁的变形包括拉伸变形以及弯曲变形. 需要指出, 由于采用了欧拉梁假设, 因此本文分析仅适用于薄壁蜂窝结构. 同时, 假设蜂窝芯材料为理想弹塑性材料, E 为材料的杨氏模量, σ_s 为材料的屈服应力, 材料的应力-应变关系如图4所示.

3 蜂窝芯结构弹塑性模型

3.1 倾斜蜂窝壁的简化及描述

通过第2节给出的蜂窝芯结构几何参数, 可以将倾斜蜂窝壁简化为长度为 l_e 的悬臂梁结构. 当蜂窝芯结构分别在 x 和 y 方向承受拉伸载荷时, 倾斜蜂窝壁的载荷及变形形式如图5所示.

由于蜂窝结构的对称性, 倾斜蜂窝壁的两端转角为0. 因此, 载荷 F_x , F_y 传递至倾斜蜂窝壁时会带来附加的弯矩 M . Gibson和Ashby^[14]给出了载荷 F_x , F_y 以及弯矩 M 的表达式. 但Gibson的分析方法是基于小变形假设下的欧拉梁模型, 未考虑梁轴线方向的载荷分量对于梁截面弯矩产生的影响; 同时, 也未考虑梁在轴向的位移. 即在考虑几何非线性的条件下, 倾斜蜂窝壁在固定端所受的弯矩 M 是未知的. 因此, Gibson方法所得到的载荷计算公式不适用于本文中考虑几何非线

图 4 蜂窝芯材料的应力-应变关系
Figure 4 Stress-strain relationship of material of honeycombs.

图 5 倾斜蜂窝壁在x及y方向载荷作用下的变形
Figure 5 Deformation of the inclined wall under the load in x- and y-direction.

性条件下蜂窝芯的变形分析。

由于蜂窝结构的对称性, 其变形在面内单轴载荷作用下是对称的^[26]。Bonfanti和Bhaskar^[24]指出对于倾斜蜂窝壁, 其几何形状的对称性决定了变形后的倾斜壁在其长度方向的中心处存在拐点, 并在文献中给出了蜂窝结构在单轴载荷作用下倾斜蜂窝壁的变形模式。因此, 在倾斜蜂窝壁的长度方向中心截面处, 其力载荷仍为 F_x 和 F_y , 但弯矩 M 为0。在以下的分析中, 可以对倾斜蜂窝壁模型做进一步简化, 仅分析长度 $l_a=0.5l_0$ 的倾斜蜂窝壁即可, 整体变形可以根据对称性获得。因此, 倾斜蜂窝壁的弹塑性分析转化为悬臂梁在集中载荷作用下的弹塑性分析。

3.2 梁的弹塑性模型

悬臂梁的弹塑性模型采用Yu和Johnson^[27]提出的弹塑性模型, 该模型考虑了梁的轴向载荷对于梁弹塑性变形的影响。Yu等人在研究中将梁的弹塑性区域分为3类, 如图6所示(阴影区域为塑性变形区域): (1) 完全弹性区PE, 即梁截面上各点仅发生弹性变形; (2) 单

图 6 轴向及横向载荷作用下悬臂梁的弹塑性区域
Figure 6 Elastic and plastic regions of the cantilever beam under axial and lateral loads.

边塑性区PI, 即梁截面上的单侧发生塑性变形; (3) 双边塑性区PII, 即梁截面上双侧均发生塑性变形。该区域的范围是由梁截面上的轴力和弯矩共同决定的。在该模型中, 认为梁在固定端形成塑性铰时的载荷为其极限载荷。

图6中 ξ 为无量纲坐标, $\xi=x/l_a$ 。在 $0<x<\xi_1$ 的范围内, 梁截面的双侧均发生塑性变形; 在 $\xi_1<x<\xi_2$ 范围内, 梁截面仅单侧发生塑性变形; 在 $\xi_2<x<1$ 范围内, 梁截面上各点均发生弹性变形。可以看出, 对于蜂窝芯结构, 在倾斜蜂窝壁的根部位置首先发生塑性变形。

根据塑性力学可知, 梁的极限弹性弯矩、极限弹性轴力以及极限弹性曲率分别为

$$\begin{cases} M_e = \frac{1}{6}\sigma_s b h^2, \\ N_e = \sigma_s b h, \\ \kappa_e = \frac{2\sigma_s}{E l}. \end{cases} \quad (3)$$

在梁的任意截面上, 其弯矩和轴力分别为 M 和 N , 截面中性轴所对应的曲率为 κ , 将其无量纲化得到无量纲弯矩 m 、无量纲轴力 n 以及无量纲曲率 ϕ , 如下式所示:

$$\begin{cases} m = |M| / M_e, \\ n = |N| / N_e, \\ \phi = |\kappa| / \kappa_e. \end{cases} \quad (4)$$

根据Yu等人的研究, 梁在完全弹性、单边塑性以及双边塑性状态下, 其曲率 ϕ 与弯矩 m 以及轴力 n 之间具有以下关系, 并给出了相应的边界条件。

完全弹性区PE:

$$\begin{cases} \phi_{PE} = m, \\ 0 \leq m \leq 1 - n. \end{cases} \quad (5)$$

单边塑性区PI:

$$\begin{cases} \phi_{PI} = 4(1-n) / \left(3 - \frac{m}{1-n}\right)^2, \\ 1-n \leq m \leq 1+n-2n^2. \end{cases} \quad (6)$$

双边塑性区PII:

$$\begin{cases} \phi_{PII} = \frac{1}{\sqrt{3(1-n^2)-2m}}, \\ 1+n-2n^2 \leq m < \frac{3}{2}(1-n^2). \end{cases} \quad (7)$$

3.3 欧拉梁几何非线性模型

在建立了梁的弹塑性模型后, 还需要建立考虑几何非线性的梁模型. 模型中, 同时考虑了梁的轴向变形以及梁的弯曲变形. 在建立梁的非线性模型时, 做出以下假设: (1) 外载荷为准静态加载, 其方向在空间保持不变; (2) 悬臂梁的横截面为 $A=b \times t$, 其几何参数在变形期间保持不变; (3) 梁具有纵向对称面, 变形后的梁轴线仍处于原平面内, 并且垂直于梁的横截面; (4) 忽略横截面上的剪应力对梁变形的影响.

一个原长为 l_0 , 高度为 t 的直梁, 其轴线位于笛卡尔坐标系 ox_1y_1 的 x_1 轴, 固定端位于坐标系原点, 如图7所示.

设变形前梁轴线上点 C 的坐标为 $C(x, 0)$, 变形后 C 点的坐标为 $C'(X_0, Y_0)$. 根据Lagrange描述可得

$$X_0 = x + u_0, \quad Y_0 = v_0, \quad (8)$$

其中 $u_0=u(x, 0)$ 和 $v_0=v(x, 0)$ 分别为梁轴线上的 C 点在 x 和 y 方向的位移.

梁左端点由 A 点移动至 A' 点, 则梁轴线上的任意点在变形后与 A' 之间的弧长为 $s_0=s_0(x)$. 梁上任意微段 dx 在变形后具有以下几何关系, 如图7所示:

$$ds_0 = \sqrt{(dX_0)^2 + (dY_0)^2} = \Lambda_0 dx, \quad (9)$$

式中, Λ_0 为梁轴线的伸长率. 同时, 通过图7还可以得到以下微分方程:

$$\frac{dX_0}{ds_0} = \cos\alpha, \quad \frac{dY_0}{ds_0} = \sin\alpha, \quad (10)$$

式中, $\alpha=\alpha(x)$ 为梁轴线的切线与 x_1 轴的夹角, 即横截面的转角. 将式(8)和(9)带入式(10)可得梁的位移微分方程:

图7 梁的整体变形及微段的载荷示意图

Figure 7 Overall deformation of the beam and the load of a beam element.

$$\frac{du_0}{dx} = \Lambda_0 \cos\alpha - 1, \quad \frac{dv_0}{dx} = \Lambda_0 \sin\alpha. \quad (11)$$

假设梁任意微段上承受连续分布的均布应力 q_x 和 q_y , 以及均布弯矩 q_α , 利用平衡条件可以得到平衡方程^[28]:

$$\begin{cases} \frac{dF_H}{dx} = \Lambda_0 q_x, \\ \frac{dF_V}{dx} = \Lambda_0 q_y, \\ \frac{dM}{dx} = \Lambda_0 (F_H \sin\alpha - F_V \cos\alpha + q_\alpha), \end{cases} \quad (12)$$

其中 F_H 和 F_V 分别为横截面上的内力载荷在 x_1 和 y_1 轴的内力分量. 利用平衡关系, 轴向内力 N (拉力为正)可表示为

$$N = F_H \cos\alpha + F_V \sin\alpha. \quad (13)$$

当梁处于线弹性阶段时, 利用胡克定律可以得到梁横截面上的内力 N 和 M 的表达式:

$$N = EA(\Lambda_0 - 1), \quad (14)$$

$$M = EI \frac{d\alpha}{dx}. \quad (15)$$

因此, 梁轴线的伸长率 Λ_0 可以通过轴力表示为

$$\Lambda_0 = \frac{N}{EA} + 1 = \frac{1}{EA} (F_H \cos\alpha + F_V \sin\alpha) + 1. \quad (16)$$

梁横截面的转角微分方程可以表示为

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{M}{EI}. \quad (17)$$

综上所述, 式(9), (11), (12)以及(17)构成了求解考虑几何非线性的欧拉梁模型的微分方程组, 可以用来求解大变形问题. 其基本未知量为梁轴线长度 s_0 ; 梁上

各点的位移 u_0, v_0 ; 横截面转角 α ; 横截面上的载荷 F_H, F_V 和 M . 它们均为坐标 x 的函数.

由于蜂窝壁上没有均布载荷, q_x, q_y 和 q_a 均为0. 为了便于方程组的求解, 对方程组进行无量纲化, 选取基本物理量为梁的极限弹性弯矩 M_e 和梁长度 l_a , 如下式所示:

$$\begin{cases} \frac{dS}{d\xi} = \Lambda_0, & \frac{dU}{d\xi} = \Lambda_0 \cos \alpha - 1, \\ \frac{dV}{d\xi} = \Lambda_0 \sin \alpha, & \frac{d\alpha}{d\xi} = \beta m, \\ \frac{dP_H}{d\xi} = 0, & \frac{dP_V}{d\xi} = 0, \\ \frac{dm}{d\xi} = \Lambda_0 (P_H \sin \alpha - P_V \cos \alpha), \end{cases} \quad (18)$$

式中, $\xi = x/l_a$; $S = s_0/l_a$; $U = u_0/l_a$; $V = v_0/l_a$; $P_H = F_H l_a / M_e$; $P_V = F_V l_a / M_e$; $m = M / M_e$; $\beta = M_e l_a / EI$, 是一个反映梁的几何及材料性质的参数.

3.4 考虑几何非线性的弹塑性耦合分析模型

在建立了梁的弹塑性模型和非线性模型的基础上, 本节将建立倾斜蜂窝壁的耦合分析模型.

式(18)是对于完全弹性变形梁的微分方程组. 当梁处于单边或双边塑性状态下, 其微分方程组只需要将方程组(18)中的第四式改为下式即可:

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = \beta \phi, \quad (19)$$

ϕ 为式(6)或(7)中关于单边塑性区PI和双边塑性区PII的无量纲曲率表达式. 结合相应的区间边界, 就可以分段求解出双边塑性区、单边塑性区以及完全弹性区的变形, 最终确定倾斜蜂窝壁的弹塑性变形. 需要指出, 由于梁任意截面上均是部分进入塑性应力状态, 梁的伸长及弯曲仍然由其弹性部分决定, 因此梁轴线伸长率 Λ_0 的表达式(16)仍然适用于微分方程组(18). 方程组(18)是一组高度非线性的微分方程组, 无法获得其解析解. 本文通过数值解法得到方程组(18)的解, 具体的解法第3.5节中介绍. 在获得了微分方程组(18)的解后, 就可以对蜂窝芯结构进行弹塑性变形计算. 本文以蜂窝芯结构在 y 方向承受拉伸载荷为例, 说明计算过程.

蜂窝芯在 y 方向承受均匀应力作用, 单胞上的合力为 $2F_y$, 则倾斜蜂窝壁中点处的轴向载荷 F_H 以及横向载

荷 F_V 分别为 $F_y \sin \theta, F_y \cos \theta$. 在获得了倾斜蜂窝壁中点处的位移 U 和 V 后, 由于该位移是在倾斜蜂窝壁的局部坐标系下获得的, 故需要通过对称性及坐标转换获得整体坐标系 oxy 下倾斜蜂窝壁的位移 u_{2y} 和 v_{2y} , 如下式所示:

$$\begin{cases} u_{2y} = (2U \cos \theta - 2V \sin \theta) l_a, \\ v_{2y} = (2U \sin \theta + 2V \cos \theta) l_a, \end{cases} \quad (20)$$

式中, 位移下标 $2y$ 的意义为图3中的等效区域2, 载荷为 y 方向.

可以证明, 垂直蜂窝壁发生塑性变形所需要的载荷要远大于倾斜蜂窝壁所需要的载荷. 因此, 等效区域1和3不会发生塑性变形, 其在 y 方向载荷下的位移为

$$v_{1y} = v_{3y} = \frac{F_y h_e}{E(t/2)b}, \quad (21)$$

则蜂窝芯结构在 y 方向载荷作用下 y 方向的应力及应变分别为

$$\sigma_y = \frac{F_y}{l b \cos \theta}, \quad (22)$$

$$\varepsilon_y = \frac{v_{1y} + v_{2y} + v_{3y}}{h + l \sin \theta}. \quad (23)$$

类似地, 蜂窝芯结构在 x 方向承受拉伸载荷时, 将载荷分量 F_H 及 F_V 用 F_x 表示即可. 通过受力分析可知, 在 x 方向受载时, 蜂窝芯的垂直蜂窝壁在 y 方向没有变形. 忽略垂直蜂窝壁在 x 方向的变形, 故蜂窝芯的应力和应变分别为

$$\sigma_x = \frac{F_x}{(h + l \sin \theta)b}, \quad (24)$$

$$\varepsilon_x = \frac{u_{2x}}{l \cos \theta}. \quad (25)$$

3.5 弹塑性分析算法

在建立蜂窝芯结构弹塑性模型的基础上, 本节介绍求解微分方程组(18)的数值解法. 针对微分方程组(18)采用数值解法的原因有以下两点: (1) 该方程组是一组高度非线性的微分方程组, 无法获得其解析解; (2) 在考虑几何非线性及梁轴向方向的位移下, 求解微分方程组的弹塑性区间 ξ_1, ξ_2 以及相应的初值无法确定.

对于本文中求解微分方程组(18), 其实质是一个

边值问题. 即在梁的固定端 $\xi=0$ 时, 其边界条件为

$$\begin{aligned} S &= 0, \quad U = 0, \quad W = 0, \quad \alpha = 0, \\ P_H &= F_H l_a / M_e, \quad P_V = F_V l_a / M_e; \end{aligned} \quad (26)$$

在梁的自由端 $\xi=1$ 时, 其边界条件为

$$m = 0. \quad (27)$$

因此, 本文将“迭代”与“打靶”的思想相结合, 采用有限差分法、Runge-Kutta法与割线法, 对悬臂梁的弹塑性模型进行求解, 其求解过程如图8所示.

悬臂梁在自由端承受集中力载荷, 并且没有弯矩作用时, 其在固定端处的截面弯矩最大. 因此, 在本文方法中, 以固定端的弯矩及轴力值作为判定悬臂梁处于完全弹性、单边塑性以及双边塑性的指标. 以蜂窝芯在 y 方向承受拉伸载荷 $2F_y$ 为例, 说明图8中的求解方法, 其步骤如下.

(1) 将载荷分为 $P=100$ 步进行逐步加载, 自由端载荷在 x_1 及 y_1 轴的分量分别是 $F_{Hk}=kF_y \sin \theta / P$, $F_{Vk}=kF_y \cos \theta / P$, $k=1 \sim 100$.

(2) 首先采用有限差分法对集中力作用下的悬臂梁进行求解. 假设在该载荷作用下, 梁处于完全弹性状态, 则根据方程组(18)可以得到梁固定端的弯矩 m 以及轴力 n , 判定该内力组合 (m, n) 是否满足式(5)的边界条件. 若满足则输出该载荷作用下的梁自由端位移; 若不满足, 则认为梁已进入单边塑性状态.

(3) 假设梁靠近固定端的一部分进入单边塑性状态, 另一部分处于完全弹性状态. 设单边塑性区和完全弹性区的交界处坐标为 ξ_1 (例如, $\xi_1=0.1$). 采用有限差分法首先对单边塑性区进行求解, 其边界条件为式(26)以及式(6)中的 $m=1-n$. 然后, 可以获得完全弹性区微分方程组的7个初值, 利用Runge-Kutta法对完全弹性区的微分方程组进行求解, 可以得到梁自由端的弯矩 m_1 . 通常情况下, 该弯矩值不等于0, 可以重复上述步骤, 采用割线法进行迭代直到使该弯矩的绝对误差小于 10^{-10} . 这样, 就确定了单边塑性区和完全弹性区的边界坐标 ξ_1 、梁固定端的弯矩 m 以及轴力 n . 判定该内力组合 (m, n) 是否满足式(6)的边界条件. 若满足则输出该载荷作用下的梁自由端位移; 若不满足, 则认为梁已进入双边塑性状态.

(4) 若上述两种情况均不满足边界条件, 则认为梁靠近固定端的一部分进入双边塑性状态, 中间部分为单边塑性状态, 自由端的一部分处于完全弹性状态.

图8 弹塑性分析算法流程图

Figure 8 Flowchart of elastoplastic algorithm.

设双边塑性区和单边塑性区的交界坐标为 ξ_1 (例如, $\xi_1=0.1$), 单边塑性区和完全弹性区的交界坐标为 ξ_2 (例如, $\xi_2=\xi_1+0.02$). 采用有限差分法首先对双边塑性区进行求解, 其边界条件为式(26)以及式(7)中的 $m=1+n-2n^2$. 然后, 可以获得单边塑性区微分方程组的7个初值, 利用步骤(2)的方法对单边塑性区的微分方程组进

行求解, 使单边塑性区与完全弹性区交点处弯矩与轴力满足式(6)中的 $m=1-n$. 这样就获得了求解完全弹性区微分方程组的7个初值. 进而对完全弹性区的微分方程组进行求解, 可以得到梁自由端的弯矩 m_1 . 同样, 该弯矩值通常不等于0, 再次利用割线法对双边塑性区和单边塑性区的交界坐标 ξ_1, ξ_2 进行迭代, 直到使该弯矩的绝对误差小于 10^{-10} . 这样就同时确定了坐标 ξ_1 和 ξ_2 . 最后输出该载荷作用下的梁自由端位移.

(5) 若上述三种情况均不满足, 则认为悬臂梁在固定端已形成塑性铰, 上一步的载荷为悬臂梁的极限载荷.

需要说明的是, 对于已经进入单边塑性或双边塑性下的载荷步, 无需再对完全弹性状态或单边塑性状态进行判定.

综上所述, 就可以输出每步载荷作用下倾斜蜂窝壁的位移, 结合式(20)~(23)最终得到蜂窝芯结构的应力-应变曲线和泊松比曲线.

4 方法验证

基于有限元的数值模拟方法是检验分析方法正确性的有效途径之一. 本节建立了蜂窝芯结构的有限元模型, 并对模型施加了周期性边界条件, 验证本文方法的正确性.

在有限元数值模拟中, 假设蜂窝芯在面内两个方向上是周期性的. 因此, 选择具有代表性的胞元结构进行分析. 将蜂窝芯结构的倾斜蜂窝壁长度 l 、垂直蜂窝壁高度 h 、蜂窝壁厚度 t 以及蜂窝壁倾角 θ 作为分析的主要参数. 采用有限元分析软件ABAQUS对蜂窝胞元模型进行有限元建模. 传统分析中, 普遍采用梁或壳单元对蜂窝芯结构进行建模, 该方法虽然简单高效, 但无法准确获得应力及应变沿着蜂窝壁厚度方向的变化规律^[29]. 因此, 在有限元分析软件ABAQUS中, 采用CPS4I非协调平面应力单元对蜂窝胞元结构进行离散. 网格尺寸保证蜂窝壁厚度方向具有8个网格, 该尺寸可以使分析结果收敛. 周期性边界条件采用python编写, 并集成到ABAQUS中. 蜂窝芯的有限元模型如图9所示. 在有限元模型中, 所施加的载荷为力载荷. 分别在 x 方向和 y 方向建立参考点, 通过添加约束方程将参考点与蜂窝胞元结构外侧节点相耦合, 使力载荷能够均匀传递至胞元结构, 从而达到施加如图3所示的均匀

载荷的目的. 在计算结果中, 分别提取参考点在 x 和 y 方向的位移, 利用胞元在 x 和 y 方向的长度及其深度分别计算蜂窝芯结构的应力和应变.

在ABAQUS中建立的蜂窝芯结构几何参数为 $l=10\text{ mm}$, $h=10\text{ mm}$, b 为单位长度, 通过改变不同的蜂窝壁厚度 t 、蜂窝壁倾角 θ 来获得不同的参数组合, 如表1所示. 蜂窝芯材料为铝, 弹性模量 $E=70\text{ GPa}$, 泊松比 $\nu=0.3$, 屈服应力 $\sigma_s=120\text{ MPa}$.

分别计算蜂窝芯结构在 x 和 y 方向的拉伸及压缩载荷作用下的应力-应变曲线和泊松比, 将本文方法与有限元方法得到的结果进行对比, 如图10和11所示.

图10(a)和11(a)为蜂窝芯结构的应力-应变曲线. 可以看出, 不同几何参数的蜂窝芯结构在 x 和 y 方向拉伸及压缩载荷作用下, 利用本文方法和有限元得到的应力-应变曲线保持一致. 蜂窝芯结构在小变形阶段, 其应力与应变表现为线弹性. 随着变形的增大, 材料非线性开始显现, 倾斜蜂窝壁的根部位置发生了塑性变形. 图10(b)和11(b)为蜂窝芯结构在载荷方向以及垂直于载荷方向的应变, 其斜率的负值即为泊松比. 可以看出, 当蜂窝芯结构的拉伸应变增大时, 结构的泊松比增大; 而压缩应变增大时, 结构的泊松比减小. 本文方法对于 $t/l<0.02$ 的蜂窝芯结构可以得到准确的弹塑性性能结果.

图9 (网络版彩图)蜂窝芯结构有限元模型
Figure 9 (Color online) Finite element model of honeycombs.

表1 蜂窝几何参数

Table 1 Geometrical parameters of honeycombs

t/l	h/l	$\theta (^{\circ})$
0.01	1	30
0.01	1	45
0.02	1	30
0.02	1	45

图 10 (网络版彩图)蜂窝芯x方向的弹塑性结果对比. (a) 应力-应变曲线; (b) 泊松比

Figure 10 (Color online) Comparison of elastoplastic properties in the x-direction. (a) Stress-strain relationship; (b) Poisson's ratio.

图 11 (网络版彩图)蜂窝芯y方向的弹塑性结果对比. (a) 应力-应变曲线; (b) 泊松比

Figure 11 (Color online) Comparison of elastoplastic properties in the y-direction. (a) Stress-strain relationship; (b) Poisson's ratio.

采用本文的数值方法对蜂窝壁弹塑性区间进行求解, 迭代5~7次即可得到准确的弹塑性区间坐标值, 使得倾斜蜂窝壁中点处的无量纲弯矩值误差小于 10^{-10} , 该方法具有很高的收敛速度. 同时, 本文方法对载荷进行逐步加载, 可以有效模拟蜂窝芯结构的加载过程. 在各个应力-应变曲线和泊松比曲线的末端, 其应力和应变值代表了蜂窝壁末端出现塑性铰时的应力和应变. 本文的方法可以对蜂窝芯结构在弹性小变形至蜂窝壁形成塑性铰的应变范围进行有效的弹塑性加载分析.

图12为几何参数 $t/l=0.02$, $h/l=1$, $\theta=30^\circ$ 蜂窝芯在x方向拉伸载荷作用下, 其塑性应变沿着蜂窝壁的变化情况. 可以看出, 蜂窝壁上的塑性应变存在三种区域, 与Yu等人模型中的完全弹性区、单边塑性区和双边

塑性区一致, 证明了Yu等人模型的正确性, 也进一步验证了本文蜂窝芯弹塑性模型的正确性.

由于本文采用非线性梁理论对蜂窝芯结构进行弹塑性建模, 并在有限元模型中采用平面应力单元对结构进行离散, 因此有必要分析蜂窝芯的深度 b 对本文方法准确性的影响. 分别计算表1中的蜂窝芯结构在不同深度 b 及拉伸载荷作用下的极限应变, 并与本文方法的结果进行对比, 获得其误差, 如图13所示.

可以看出, 随着深度 b 的增加, 在拉伸载荷作用下, 蜂窝壁横向变形的影响逐渐显现, 极限应变的误差也随之增大. 本文方法对 $b/l < 0.03$ 的蜂窝芯结构有较高的计算精度, 其极限误差小于10%. 对于 $b/l > 0.03$ 的蜂窝芯结构, 可以采用平面应变或者薄板假设, 基于本文

图 12 (网络版彩图)倾斜蜂窝壁塑性应变

Figure 12 (Color online) Plastic strain along the inclined wall of honeycombs.

方法对蜂窝芯结构进行弹塑性分析。

5 分析结果

在验证了本文分析方法正确性的基础上, 对影响蜂窝芯结构弹塑性的主要因素进行分析, 主要包括蜂窝壁厚度与倾斜壁长度的比值 t/l 、垂直壁高度与倾斜壁长度的比值 h/l 、蜂窝壁倾角 θ , 以及几何非线性和材料非线性对于蜂窝芯结构弹塑性的影响。分析中, 蜂窝芯材料为铝, 弹性模量 $E=70$ GPa, 泊松比 $\nu=0.3$, 屈服应力 $\sigma_s=120$ MPa。

5.1 t/l 对于蜂窝芯结构应力-应变曲线的影响

保持垂直壁高度与倾斜壁长度的比值 h/l 、蜂窝壁倾角 θ 为常数, 研究蜂窝壁厚度与倾斜壁长度的比值 t/l 对蜂窝芯弹塑性的影响。分析中, 倾斜蜂窝壁长度 $l=10$ mm, $h/l=1$, 蜂窝壁倾角 $\theta=30^\circ$, 改变蜂窝壁厚度 t 使 $t/l=0.005, 0.010, 0.015$ 以及 0.020 。蜂窝芯结构 x 及 y 方向的应力-应变曲线如图14所示。

从图中可以看出, 随着 t/l 的增加, 蜂窝芯结构在 x 和 y 方向的刚度逐渐增大。增大蜂窝壁的厚度可以显著增加结构的承载能力。相同应力水平下, $t/l=0.020$ 的蜂窝芯结构, 其应变要明显小于 $t/l=0.005$ 的蜂窝芯结构。同时可以看出, $h/l=1, \theta=30^\circ$ 的蜂窝结构在未发生明显的塑性变形之前, 其 x 和 y 方向的刚度基本一致, 这与Gibson和Ashby^[13,14]的结论相同。同时, 蜂窝芯结构在拉伸状态下的极限应力要大于压缩状态下的极限应力。当蜂窝芯结构承受压缩载荷时, 由于几何非线性的缘故, 倾斜蜂窝壁的位移导致载荷对于倾斜蜂窝壁根部位置的弯矩变大; 而蜂窝芯结构承受拉伸载荷时, 则恰恰相反。这也说明了考虑几何非线性的必要性。

5.2 h/l 对于蜂窝芯结构应力-应变曲线的影响

保持蜂窝壁厚度与倾斜壁长度的比值 t/l 、蜂窝壁倾角 θ 为常数, 研究垂直壁高度与倾斜壁长度的比值 h/l 对于蜂窝芯弹塑性的影响。分析中, 倾斜蜂窝壁长度 $l=10$ mm, $t/l=0.01$, 蜂窝壁倾角 $\theta=30^\circ$, 改变垂直蜂窝壁高度 h 使 $h/l=0.5, 1.0, 1.5$ 以及 2.0 。蜂窝芯结构 x 及 y 方向的应力-应变曲线如图15所示。

从图中可以看出, 蜂窝芯结构 x 方向的刚度随着 h/l 的增大而减小。相反, y 方向的刚度随着 h/l 的增大而增大。但是 h/l 的增大无法提高蜂窝芯结构 y 方向极限承载能力。这是由于蜂窝芯结构承受塑性变形的部位是倾斜蜂窝壁的根部位置, 即倾斜蜂窝壁是变形的部位, 而垂直蜂窝壁进入塑性变形需要的载荷远大于倾斜蜂窝壁所需的载荷。因此在 y 方向承受载荷时, h 的改变仅能使该方向的应变发生改变而无法改变该

图 13 (网络版彩图)不同深度 b 下蜂窝芯的极限应变误差。(a) x 方向载荷; (b) y 方向载荷

Figure 13 (Color online) Error of ultimate strain of honeycombs with different depth b . (a) Under the x -direction load; (b) under the y -direction load.

图 14 (网络版彩图)不同 t/l 蜂窝芯的应力-应变曲线. (a) x 方向载荷; (b) y 方向载荷

Figure 14 (Color online) Stress-strain relationship of honeycombs with different t/l . (a) Under the x -direction load; (b) under the y -direction load.

图 15 (网络版彩图)不同 h/l 蜂窝芯的应力-应变曲线. (a) x 方向载荷; (b) y 方向载荷

Figure 15 (Color online) Stress-strain relationship of honeycombs with different h/l . (a) Under the x -direction load; (b) under the y -direction load.

方向的应力, 进而无法提高该方向的承载能力.

5.3 θ 对于蜂窝芯结构应力-应变曲线的影响

保持蜂窝壁厚度与倾斜壁长度的比值 t/l 、垂直壁高度与倾斜壁长度的比值 h/l 为常数, 研究蜂窝壁倾角 θ 对于蜂窝芯弹塑性的影响. 分析中, 倾斜蜂窝壁长度 $l=10\text{ mm}$, $t/l=0.01$, $h/l=1$, 改变蜂窝壁倾角 θ 使 $\theta=20^\circ$, 30° , 40° 以及 45° . 蜂窝芯结构 x 及 y 方向的应力-应变曲线如图16所示.

从图中可以看出, 蜂窝芯结构 x 方向的刚度随着蜂窝壁倾角 θ 的增大而减小. 蜂窝芯结构在 x 方向承受载荷时, 倾角 θ 越小, 倾斜蜂窝壁的轴向方向越接近于载

荷方向. 蜂窝壁的塑性变形主要是由于倾斜蜂窝壁的弯曲而引起根部位置的塑性变形, 而蜂窝壁拉伸引起塑性变形所需要的载荷要远大于弯曲引起塑性变形所需要的载荷, 因此倾角 θ 越小, 倾斜蜂窝壁在 x 方向就越接近于纯拉伸变形, 故承载能力可以显著提高. 同样, 在 y 方向承受载荷时, 倾角 θ 越大则倾斜蜂窝壁越接近于纯拉伸变形, 故 y 方向的刚度随着蜂窝壁倾角 θ 的增大而增大.

在其他几何参数相同的情况下, θ 的改变必然会引起一个方向刚度的增加, 而另一个方向刚度的减小. 在进行蜂窝结构设计时, 应充分考虑 x 和 y 方向的载荷情况, 以达到合理分配两个方向刚度的目的.

图 16 (网络版彩图)不同 θ 蜂窝芯的应力-应变曲线. (a) x方向载荷; (b) y方向载荷

Figure 16 (Color online) Stress-strain relationship of honeycombs with different θ . (a) Under the x-direction load; (b) under the y-direction load.

5.4 不同几何参数对于泊松比的影响

分别研究不同几何参数对于蜂窝芯结构泊松比的影响. 蜂窝芯结构的几何参数如表2所示.

在x方向拉伸载荷作用下, 载荷方向及垂直于载荷方向的应变如图17所示, 其斜率的负值即为泊松比 ν_{xy} .

从图中可以看出, 相同 h/l 和 θ 的情况下, 不同 t/l 蜂窝芯结构的泊松比保持一致, 这说明蜂窝芯结构的泊松比 ν_{xy} 与 t/l 的比值无关. 泊松比 ν_{xy} 随着 h/l 和 θ 的增大而减小. 同时, 泊松比 ν_{xy} 随着应变的增加而改变, 但不明显.

5.5 几何非线性和材料非线性的影响

几何非线性以及材料非线性对于蜂窝芯结构的弹塑性变形均存在显著的影响. 分别计算以下四种情况下的蜂窝芯结构应力-应变曲线: (1) 同时考虑几何非线性以及材料非线性; (2) 仅考虑材料非线性^[24]; (3) 仅考虑几何非线性^[4]; (4) 几何非线性和材料非线性均不考虑, 仅考虑弹性小变形^[14].

所分析的蜂窝芯几何参数如下: 倾斜蜂窝壁长度 $l=10$ mm, 垂直蜂窝壁高度 $h=10$ mm, 蜂窝芯厚度 $t=0.1$ mm, 蜂窝芯倾角 $\theta=30^\circ$. 蜂窝芯结构在x及y方向的拉伸载作用下应力-应变曲线如图18所示.

从图中可以看出, 采用四种方法得到的蜂窝结构应力-应变曲线有两处明显的分离. 第一处分离出现在应变为1%附近. 在该点附近, 蜂窝芯结构尚未出现塑性变形, 而几何非线性的影响开始显现, 故考虑几何非

线性的模型与未考虑几何非线性的模型出现分离. 第二处分离出现在蜂窝芯结构发生塑性变形后. 结构的塑性变形导致结构的弹性模量开始下降, 考虑材料非

表 2 蜂窝几何参数

Table 2 Geometrical parameters of honeycombs

t/l	h/l	θ ($^\circ$)
0.01	1.0	30
0.02	1.0	30
0.01	1.5	30
0.01	1.0	45

图 17 (网络版彩图)不同几何参数下的蜂窝芯泊松比

Figure 17 (Color online) Poisson's ratio of honeycombs with different geometric parameters.

图 18 (网络版彩图)几何/材料非线性对于蜂窝芯应力-应变曲线的影响. (a) x 方向载荷; (b) y 方向载荷

Figure 18 (Color online) Influence of geometric or material non-linearity on the stress-strain relationship of honeycombs. (a) Under the x -direction load; (b) under the y -direction load.

线性与未考虑材料非线性的模型出现分离。

其次, 由于几何非线性的存在, 蜂窝结构在塑性发生前, 其刚度会增大. 未考虑几何非线性的模型所得到的应力-应变曲线在塑性发生前的斜率保持不变, 导致结构的整体刚度将小于实际的刚度. 在弹性小变形假设下, 四种方法得到的应力-应变曲线基本一致, 而随着应变的增加, 小变形假设不再适用, 未考虑几何非线性所求得的蜂窝结构的整体变形将大于结构的实际变形, 因此结构的刚度减小, 造成了较大的误差. 同时, 在

该几何参数下, 几何非线性对于 x 方向应力-应变曲线的影响要大于 y 方向.

综上所述, 是否考虑几何非线性以及材料非线性所得到的蜂窝结构应力-应变曲线均可以视为本文方法的一种简化. 在小变形下, 四种方法得到的结构弹性模量基本一致, 但随着应变的增加, 应力-应变曲线的差别将逐渐显现.

6 结论

本文基于非线性梁理论、弹塑性理论对具有恒定蜂窝壁厚度的六边形蜂窝芯结构建立了弹塑性模型, 获得了蜂窝芯结构的应力-应变曲线和泊松比. 主要结论如下.

(1) 针对蜂窝芯结构的弹塑性问题, 本文建立了一种同时考虑几何非线性和材料非线性的耦合分析模型及相关求解算法. 仿真结果表明, 本文方法与有限元结果的吻合度很高, 可以有效模拟 $t/l < 0.02$ 蜂窝芯结构的应力-应变曲线和泊松比.

(2) 对于 $b/l > 0.03$ 的蜂窝芯结构, 需要考虑蜂窝芯在深度方向的变形.

(3) 分别分析了蜂窝壁厚度与倾斜壁长度的比值 t/l 、垂直壁高度与倾斜壁长度的比值 h/l 、蜂窝壁倾角 θ 对蜂窝芯结构弹塑性性能的影响. 结果表明, 蜂窝芯结构 x 和 y 的极限应力随着 t/l 的增大而增大; x 方向的极限应力随着 h/l 的增大而减小, h/l 的改变无法改变 y 方向的极限应力; θ 的改变将会引起面内一个方向极限应力的增加, 而另一个方向极限应力的减小. 蜂窝芯结构在拉伸状态下的极限应力要大于压缩状态下的极限应力. 泊松比 ν_{xy} 随着 h/l 和 θ 的增大而减小, 与 t/l 无关.

(4) 分别分析了几何非线性以及材料非线性对于蜂窝芯结构本构的影响. 在应变较小时, 四种模型得到的应力-应变曲线基本保持一致; 随着应变的增加, 几何非线性效应首先出现, 造成结构的整体刚度增大; 出现塑性变形后, 结构整体刚度开始下降.

参考文献

- 1 Burton W S, Noor A K. Assessment of continuum models for sandwich panel honeycomb cores. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1997, 145: 341–360
- 2 Alghamdi A A A. Collapsible impact energy absorbers: An overview. *Thin Wall Struct*, 2001, 39: 189–213

- 3 Qiu K, Wang Z, Zhang W. The effective elastic properties of flexible hexagonal honeycomb cores with consideration for geometric nonlinearity. *Aerosp Sci Tech*, 2016, 58: 258–266
- 4 Zhao Y, Ge M, Ma W. The effective in-plane elastic properties of hexagonal honeycombs with consideration for geometric nonlinearity. *Compos Struct*, 2019, 234: 111749
- 5 Hohe J, Becker W. A refined analysis of the effective elasticity tensor for general cellular sandwich cores. *Int J Solids Struct*, 2001, 38: 3689–3717
- 6 Balawi S, Abot J L. The effect of honeycomb relative density on its effective in-plane elastic moduli: An experimental study. *Compos Struct*, 2008, 84: 293–299
- 7 Ongaro F. Estimation of the effective properties of two-dimensional cellular materials: A review. *Theor Appl Mech Lett*, 2018, 8: 209–230
- 8 Kalamkarov A L, Saha G C, Georgiades A V. General micromechanical modeling of smart composite shells with application to smart honeycomb sandwich structures. *Compos Struct*, 2007, 79: 18–33
- 9 Hohe J, Becker W. A mechanical model for two-dimensional cellular sandwich cores with general geometry. *Comput Mater Sci*, 2000, 19: 108–115
- 10 Dai G, Zhang W. Cell size effect analysis of the effective Young's modulus of sandwich core. *Comput Mater Sci*, 2009, 46: 744–748
- 11 Hassani B. A direct method to derive the boundary conditions of the homogenization equation for symmetric cells. *Commun Numer Meth Engng*, 1996, 12: 185–196
- 12 Gonella S, Ruzzene M. Homogenization and equivalent in-plane properties of two-dimensional periodic lattices. *Int J Solids Struct*, 2008, 45: 2897–2915
- 13 Gibson L J. The elastic and plastic behaviour of cellular materials. Dissertation for Doctoral Degree. Cambridge: University of Cambridge, 1981
- 14 Gibson L J, Ashby M F. Cellular Solids: Structure and Properties. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 93–174
- 15 Masters I G, Evans K E. Models for the elastic deformation of honeycombs. *Compos Struct*, 1996, 35: 403–422
- 16 Balawi S, Abot J L. A refined model for the effective in-plane elastic moduli of hexagonal honeycombs. *Compos Struct*, 2008, 84: 147–158
- 17 Fu M H, Yin J R. Equivalent elastic parameters of the honeycomb core (in Chinese). *Acta Mech Sin*, 1999, 31: 113–118 [富明慧, 尹久仁. 蜂窝芯层的等效弹性参数. *力学学报*, 1999, 31: 113–118]
- 18 Zhao J S. Research on equivalent models of the mechanical function for aluminum honeycomb sandwich panel (in Chinese). Dissertation for Master's Degree. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2006 [赵金森. 铝蜂窝夹层板的力学性能等效模型研究. 硕士学位论文. 南京: 南京航空航天大学, 2006]
- 19 Malek S, Gibson L. Effective elastic properties of periodic hexagonal honeycombs. *Mech Mater*, 2015, 91: 226–240
- 20 Sorohan S, Constantinescu D M, Sandu M, et al. On the homogenization of hexagonal honeycombs under axial and shear loading. Part I: Analytical formulation for free skin effect. *Mech Mater*, 2018, 119: 74–91
- 21 Sorohan S, Constantinescu D M, Sandu M, et al. On the homogenization of hexagonal honeycombs under axial and shear loading. Part II: Comparison of free skin and rigid skin effects on effective core properties. *Mech Mater*, 2018, 119: 92–108
- 22 Chen Y, Fu M H, Zheng B B. Nonlinear constitutive relation for honeycombs based on the modifications to Gibson's formula (in Chinese). *J Chongqing Univ*, 2016, 39: 56–62 [陈誉, 富明慧, 郑彬彬. 基于Gibson公式修正的蜂窝材料非线性本构. *重庆大学学报*, 2016, 39: 56–62]
- 23 Fu M H, Xu O T, Hu L L, et al. Nonlinear shear modulus of re-entrant hexagonal honeycombs under large deformation. *Int J Solids Struct*, 2016, 80: 284–296
- 24 Bonfanti A, Bhaskar A. Elastoplastic response and recoil of honeycomb lattices. *Eur J Mech A-Solid*, 2018, 71: 77–88
- 25 Bonfanti A, Syngellakis S, Bhaskar A. Elastoplastic response and recoil of lattice structures under hyperbolic hardening. *J Mech Sci Technol*, 2018, 32: 1667–1675
- 26 Onck P R, Andrews E W, Gibson L J. Size effects in ductile cellular solids. Part I: Modeling. *Int J Mech Sci*, 2001, 43: 681–699
- 27 Yu T X, Johnson W. Influence of axial force on the elastic-plastic bending and springback of a beam. *J Mech Work Tech*, 1982, 6: 5–21
- 28 Liu H, Han Y, Yang J. Large deflection of curved elastic beams made of Ludwick type material. *Appl Math Mech-Engl*, 2017, 38: 909–920
- 29 Catapano A, Montemurro M. A multi-scale approach for the optimum design of sandwich plates with honeycomb core. Part I: Homogenisation of core properties. *Compos Struct*, 2014, 118: 664–676

Elastoplastic analysis of honeycombs with consideration for geometric nonlinearity

GE Meng, ZHAO Yang, MA WenLai & YAO HuaiBo

School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China

The elastoplastic model of hexagonal honeycombs having a constant wall thickness with consideration for geometric nonlinearity is established herein based on the nonlinear beam and elastoplastic theories. The solution algorithm is researched to obtain the stress-strain relationship and Poisson's ratio of the honeycombs. A finite element model of the honeycombs is established to verify the proposed method. The stress-strain relationships and Poisson's ratio of the honeycombs with different parameters (including different ratios of the thickness of honeycomb wall to the length of the inclined wall t/l , different ratios of the height of the vertical wall to the length of the inclined wall h/l , and different inclination angle θ) are obtained. Furthermore, the influence of the geometric and material nonlinearities on the stress-strain relationship of the honeycombs is analyzed. The geometric nonlinearity increases the overall stiffness of honeycombs with the increase in strain. Then, it decreases gradually owing to the plastic deformation.

honeycomb, geometric nonlinearity, elastoplasticity, numerical method

doi: [10.1360/SST-2020-0442](https://doi.org/10.1360/SST-2020-0442)