

信号与同频色噪声驱动的双稳系统的随机共振实验研究*

李 蓉 温孝东 胡 岗 杨春元 杨俊忠

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

摘 要

设计了将线性滤波器与随机共振装置串联处理信号、噪声的装置. 这一装置模拟了在周期信号与单色同频噪声作用下的随机共振系统. 实验表明, 这一设计十分有利于在强噪声弱信号输入下提高输出信噪比, 是将弱信号从强噪声背景下分离出来的新的强有力的工具. 对上述非线性系统产生随机共振的物理机制也进行了定性的说明.

关键词 随机共振、线性滤波器、同频噪声、信噪比

近年来随机共振 (SR) 问题引起从事统计物理和信号及噪声处理的学者的极大兴趣^[1-9]. 在非线形条件下噪声可能对信号产生积极的放大作用, 这一点无论在理论上和应用上都很有意义. 目前在 SR 方面越来越多的研究被吸引到了从强噪声下提取弱信号的实际问题上来.

让我们考虑一简单而基本的问题, 从输入

$$I(t) = U_m \sin(\Omega t) + \Gamma(t), \quad (1a)$$

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma(t), \Gamma(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (1b)$$

中滤去噪声, 提取信号. 对这种单频信号输入, 人们通常用线性滤波器 (LF) 来提取信号, 滤波器的 Q 值越高, 提取信号质量越好, 原则上用无穷高 Q 值的 LF 可从极大噪声背景下取出无穷小的信号. 但在实际上 Q 值总是有限的, 这就给人们分离这种信号和噪声的能力加了限制. 如果输入信号不是单频的, 这种 LF 的局限就更大了. 在给定 LF 的 Q 值下, 发现新的手段突破线性处理在识别信号上的极限, 显然具有重要的意义. 随机共振装置 (SRD) 是目前人们期待实现这一突破的最佳候选者之一.

一般来讲, 非线性会引起信号的畸变从而降低信噪比. 人们期待 SRD 可能导致较高的信噪比, 是因为在 SRD 中存在的一种特有的信号和噪声的能量转换方式. 通常用 LF 提取信号的机制是尽可能多地滤去噪声, 留下信号, 而在 SRD 中人们可以在适当控制参数时使能量从噪声向信号转移^[6, 9], 正是这种能量转移产生了增强信号和压制噪声的作用, 提供了用 SRD

1993-07-26 收稿, 1993-12-24 收修改稿.

* 国家攀登计划及国家自然科学基金资助项目.

突破 LF 的信噪比极限的可能。

然而用 SRD 提取信号也存在严重的局限性。因为能量从噪声向信号转移的强度是与信号本身强度有关的。如果 SRD 的输入是很弱的信号和很强的噪声, 单位时间从噪声向信号转移的能量就很少^[6,9], 以至不能抵消非线性对信噪比产生的消极影响。这样在输入信噪比极低时, 即实际问题中最需要提高信噪比的时候, SRD 却不能帮助我们有效地提高信噪比。这一矛盾大大限制了 SRD 在应用中的潜力。克服这一矛盾成为 SR 问题研究的重要课题, 也是本文研究的中心内容。

1 实验思想、装置和测量方法

在弱信号强噪声输入时, SRD 之所以降低它在提高信噪比方面的效率, 是因为小信号在 SR 条件下只能从噪声中吸取小份额的能量, 这份能量只占总噪声能量的很小一部分, 这样随机共振效应几乎对压制噪声不起任何作用, 这一点完全为实验所证实。为了解决这一问题, 我们提出如下想法: 将 LF 和 SRD 串联使用, 首先用 LF 降低总噪声能量(注意, 这种滤波不能降低同频噪声的强度), 然后再将经过线性滤波的信号、噪声输入 SRD, 这样, SRD 就可能十分有效地将余下的噪声能量的相当大的一部分转入信号起到加强信号、压制噪声(包括降低同频噪声)的作用, 从而大大提高输出的信噪比。这种将 LF 和 SRD 串联使用的装置就有可能在弱信号强噪声的背景下突破线性滤波器限制, 成为信号处理上一个新的强有力的工具。

图 1 为通常的 SRD 的实验示意图。 $I(t) = S(t) + \Gamma(t)$ 为输入。信号 $S(t) = U_m \cos(2\pi f_0 t)$ 由高质量的信号发生器提供, 频率 f_0 固定在 120 Hz。

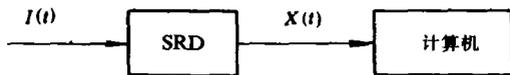


图 1 通常的随机共振装置示意图
SRD 框内为模拟方程(2)的电子回路

$\Gamma(t)$ 由噪声发生器产生, $\Gamma(t)$ 均匀谱宽度可达 20kHz, 远大于信号频率, 所以 $\Gamma(t)$ 可以近似认为是白噪声, 噪声强度用平均噪声电压 H 来量度。显然 $H \propto \sqrt{D}$, $f_0 \propto \Omega$ 。比例系数与本文内容无关, 不在这里分

析, 可参看文献[10]。装置 SRD 为一非线性电子回路, 模拟非线性方程

$$\dot{X}(t) = X(t) - X^3 + I(t). \quad (2)$$

SRD 装置的具体结构也可见文献[10, 11]。从 SRD 输出的 $X(t)$ 通过 ADC 转换器直接进入 386 计算机进行各种数据处理, 计算机对电压采样的速度为每秒 2048 次。

本文通过图 2 对图 1 的 SRD 进行改进。 $I(t)$ 首先输入一线性滤波器 LF, 滤波器的品质因数 Q 可调。从 LF 的输出 $Y(t)$ 进入一线性放大器 LA。LA 的放大倍数 k 也可调。在以下每次实验中对任一输入 $I(t)$ 我们总是首先调节 k 使输入 $Z(t)$ 满足 SRD 装置的随机共振条件。所以整个图 2 装置模拟了以下动力学系统:

$$\begin{aligned} \ddot{Y}(t) + \gamma \dot{Y}(t) + \omega_0^2 Y(t) &= I(t), \\ Z(t) &= kY(t), \\ \dot{X}(t) &= X(t) - X^3 + Z(t), \end{aligned} \quad (3)$$

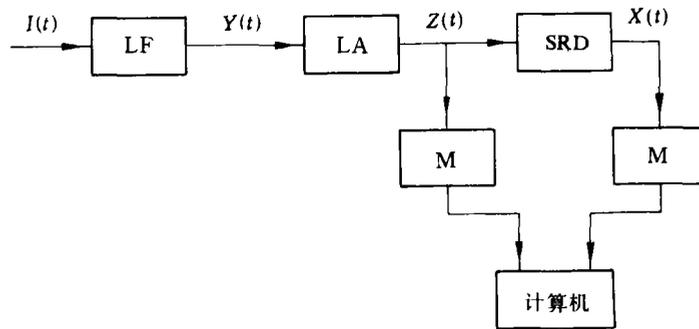


图 2 线性滤波器(LF)和随机共振系统(SRD)串联的电子回路

图 2 中 LA 为线性放大器, LF, LA 和 SRD 一起模拟方程 (3); M 为低通滤波器, 用来消除有限采样时间引起的谱误差, 与方程 (3) 无关; 其中 LF 的中心频率调在输入信号频率上 $\omega_0 = 2\pi f_0$, 而 LF 的品质因数为 $Q = f_0/\Delta f$, Δf 为通常意义下的线性响应的带宽. 图 2 与图 1 还有一个不同之处是在计算机取样前, 我们让输入 $Z(t)$ 和输入 $X(t)$ 都通过一低通滤波器 M. 我们实验中所用 M 的截止频率为 $f = 250\text{Hz}$, 这一低通滤波器仅用来排除有限采样时间导致的信噪比测量的不真实现象 (所谓 aliasing effect, 见文献[12]), M 对动力学系统 (3) 本身不产生任何影响. 值得指出的是 $Z(t)$ 中的噪声不再像 $I(t)$ 中噪声那样具有近似的白谱. 它的噪声谱具有单峰分布, 而峰就在信号频率上, 我们称这种噪声为单色同频噪声, 简称同频噪声. 同频噪声峰的宽度可通过改变 LF 的 Q 值来调节, 对这类输入引起的随机共振现象无论在理论上或实验上目前还均无认真研究. 然而在下一节我们将看到, 图 2 的装置极大增强了随机共振系统处理强噪声弱信号的能力. 因此对方程 (3) 和实验装置图 2 的研究具有重要意义.

我们实验研究的中心内容是测量和比较 SRD 装置的输入和输出的信噪比, 并考察各种控制参量对信噪比的影响. 首先我们用计算机对 $Z(t)$ 和 $X(t)$ 进行数据采样, 采样数据再由计算机进行 Fourier 变换, 得到频谱 $Z(\omega)$ 和 $X(\omega)$, 并记录下在信号频率 f_0 处的谱线高度 $Z(2\pi f_0)$ 和 $X(2\pi f_0)$. 当然由于噪声影响不同测试中的谱高不相同, 以 $Z_i = Z_i(2\pi f_0)$ 和 $X_i = X_i(2\pi f_0)$ 表示第 i 次测量中所得的输入和输出的信号谱高度, 我们分别用平均值 (Z_s, X_s) 和涨落 (Z_n, X_n) 来定义信号和同频噪声的强度

$$Z_s = \sum_{i=1}^N Z_i / N, \quad X_s = \sum_{i=1}^N X_i / N, \quad (4)$$

$$Z_n = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N (Z_i - Z_s)^2\right) / N}, \quad X_n = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N (X_i - X_s)^2\right) / N}. \quad (5)$$

由此分别定义输入 (线性) 和输出 (非线性) 的信噪比为

$$R_L = Z_s / Z_n, \quad R_{SR} = X_s / X_n. \quad (6)$$

在我们的实验中 N 取值为 1000, 这样大的实验次数可以使 (4) — (6) 式得到很好的统计值. 实验要回答的问题是: 在较低的输入信噪比下, R_{SR} 能否超过 R_L ; 并在多大幅度上超过 R_L , 即两者之比

$$G = R_{SR} / R_L \quad (7)$$

能达到多大的值; 在降低输入的信噪比时如何将 G 保持在一高水平的值上。

从直接的理论分析可知, R_L 与 Q 和 k 无关, 因为在固定积分时间的条件下线性滤波和线性放大不会改变同频噪声的比值. 这一点完全为实验所证实. 然而改变 Q 却对 R_{SR} (从而也对 G) 产生极有意义的影响.

2 用 LF 和 SRD 串联提高输出的信噪比

图 3(a) 在固定 $Q=73$, $U_m=9$ mV 的参数下给出了 G_m 对 $\beta=H/U$ 的实验响应曲线, 其中 U 为输入电压有效值, $U=U_m/\sqrt{2}$. 对每一给定 H , 我们首先在不同的放大倍数 k 测量 R_L 和 R_{SR} . 由于 LA 同时放大信号和同频噪声, R_L 不受 k 的变化的影响 (误差范围内的统计涨落除外), 而 R_{SR} 则随 k 而改变. 图 3(a) 上所标的每一点都是在给定 U, H 下改变 k 所取得的 G 的最大值, 所以记作 G_m . 这样每一个 G_m 都是随机共振的结果. 对不同的 H , 对应于 G_m 的放大倍数 k 是不同的. 所以 U 与 H 各自的绝对值不再有意义, 有意义的是 G_m 对相对输入噪声强度 $\beta=H/U$ 的响应关系. 一个有趣的现象是: G_m 是在固定 β 下由随机共振得到的最大 G (可调参数为 k), 而 G_m 本身随 β 的变化曲线又呈现了类似共振的单峰曲线. 在 $\bar{\beta}$ 处 G_m 取得极大值 \bar{G}_m . 对大于和小于 $\bar{\beta}$ 的 β 值 G_m 都有明显下降. 改变 LF 的品质因数 Q 会对 $G_m \sim \beta$ 曲线产生重要的有规律的影响. 在图 3(b) 中我们增大 Q 到 133, 并给出同样的 $G_m \sim \beta$ 曲线. 峰的位置 $\bar{\beta}$ 随 Q 增大明显地向大 β 方向 (强相对噪声方向) 移动. 在图 3(c) 中 Q 为 33, $\bar{\beta}$ 大大降低.

图 3 的随机共振曲线可以从能量转换关系定性理解. 对于很小的 β , 输入信号能量已在总能量中占很大比重, 噪声能量很小. 在随机共振条件下, 有一定的噪声能量向信号转移, 但是这部分能量很小, 对信号放大不起作用, 这使输出信噪比的提高受到限制, 这是一种饱和现象. 相反对于很大的 β , 信号太小, 以至于它从噪声中获取能量能力受到限制, 尽管信号本身得到一定程度的放大, 但噪声能量不会因这一能量转移而显著减弱, 即随机共振对压制噪声不起作用, 这同样限制了输出信噪比的提高. 只有当 β 取图 3 中的 $\bar{\beta}$ 及附近的值时, 输入信号和噪声之间达到一种最佳匹配, 信号即强到足以从噪声中吸取相当大比例的能量, 从而大大压制噪声 (特别是压制同频噪声); 同时信号又并不强到饱和状态, 这使从噪声中吸收到信号方面来的能量足以大大提高信号强度. 非线性系统由于同时有效地压制噪声和增强信号而达到最大的输出信噪比效益, 即得到最大的 G_m , 即 \bar{G}_m .

以上的定性分析完全被图 3(a), (b), (c) 在改变 Q 值时的变化规律所证实. 提高 Q 值使输入噪声在总能量中所占的比重降低, 这使随机共振的最佳匹配 $\bar{\beta}$ 值增加. 反之减小 Q 使噪声强度提高, 而使信号强度达到饱和状态的阈值提高, 这使 $\bar{\beta}$ 向小 β 的方向移动.

从图 4 和图 5 可以系统地看到 Q 值对 $\bar{\beta}$ 和 \bar{G}_m 的影响. 图 4 给出了 $\bar{\beta} \sim Q$ 曲线. 随着 Q 的增大, $\bar{\beta}$ 单调的增加. 将 Q 从 0 增加到 150, 共振峰对应的 $\bar{\beta}$ 可增加近 20 倍! 而且再继续增大 Q 时, 这一趋势仍然保持着. 图 5 给出了 $\bar{G}_m \sim Q$ 响应曲线, 从中看出在随机共振时输出信噪比相对输入信噪比的优势也随线性滤波器的 Q 值的增大而增加.

图 4 和图 5 揭示的物理规律具有重要的实际意义. 由于线性滤波器和放大技术已为人

中国科学院图书馆藏

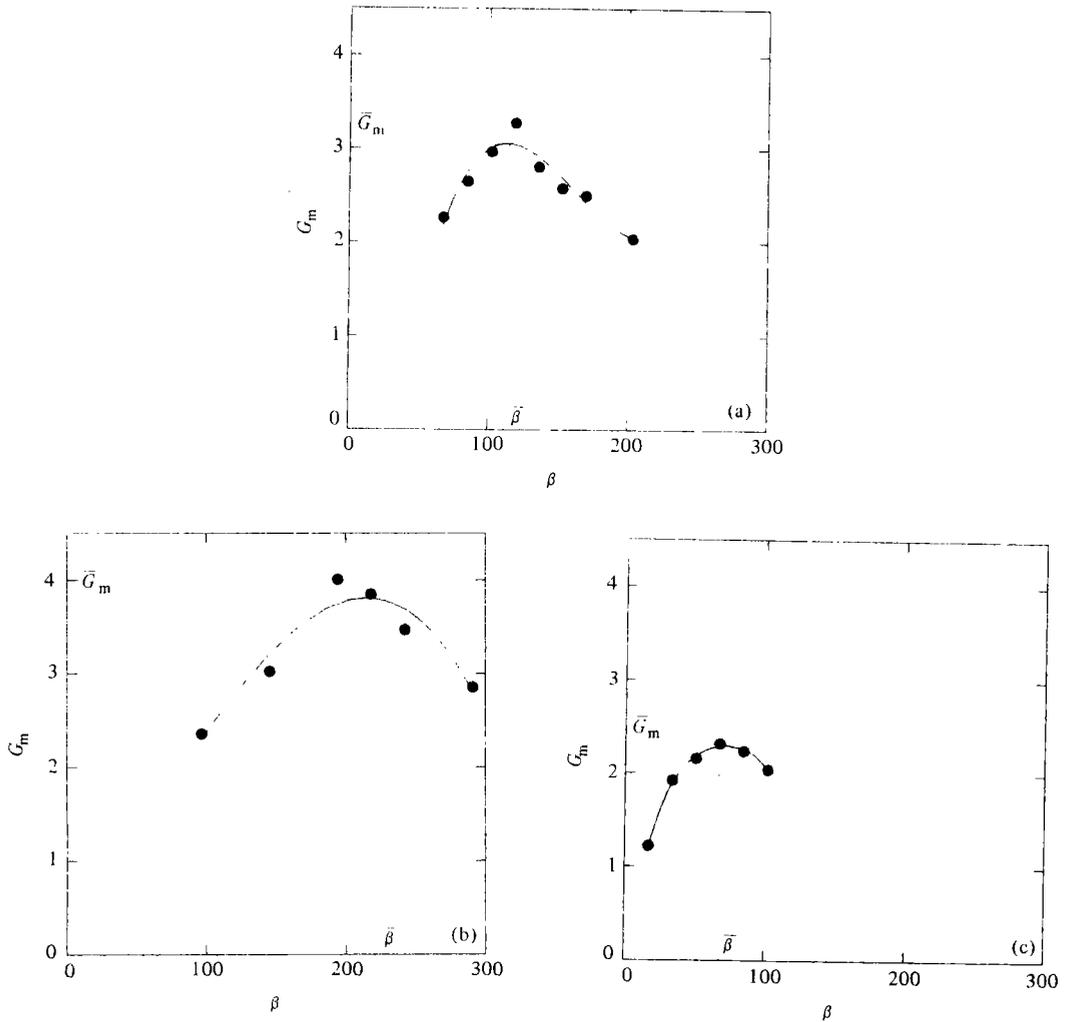


图 3 $G_m \sim \beta$ 曲线

$\beta = H/U$, G_m 为改变 k 时所得到的 G 的最大值

(a) $Q=73$, (b) $Q=133$, (c) $Q=33$; $\bar{\beta}$, \bar{G}_m 分别为 $G_m \sim \beta$ 曲线峰的位置和高度

们熟知, 所以将线性滤波器和随机共振装置串联使用的方法可以十分普遍地使用. 对一个由信号和噪声混合的输入, 我们常常首先尝试用线性滤波的方法来除去噪声, 现在我们将这一线性处理过的信号再进行随机共振的处理可以进一步消除线性滤波所难以消除的同频噪声. 由图 5 可见经过这一非线性处理的信噪比可以达到单纯线性处理的近 4 倍. 如按通常人们用功率谱来定义信噪比的方法, 这一倍数可达 $4^2=16$ 倍! 将 LF 和 SRD 串联使用克服了单纯随机共振接收器的缺点, 特别适合于从强噪声中提取弱号, 随着 LF 的 Q 值的提高, 人们对信噪比越来越低的输入进行随机共振处理, 获得远比单纯线性处理更高的信号质量. 这一研究有希望在信号的传递与接收上产生新的强有力的工具.

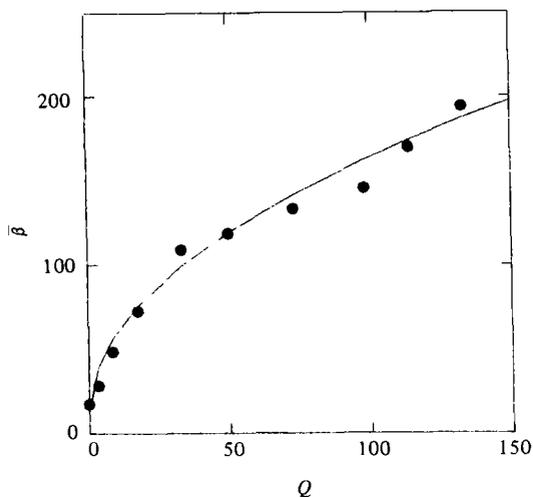


图 4 $\beta \sim Q$ 曲线
 β 随 Q 单调增加

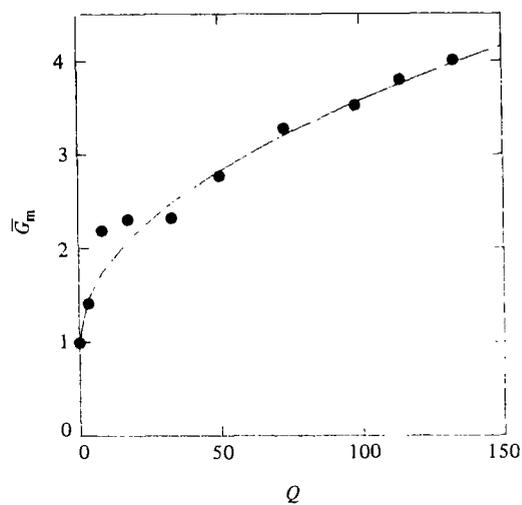


图 5 $\overline{G_m} \sim Q$ 曲线
 $\overline{G_m}$ 随 Q 增加呈上升趋势

参 考 文 献

- [1] Benzi, R., Sutera, A., Vulpiana, A., *J. Phys. A*, 1981, **14**: L453.
- [2] Nicolis, C., *Tellus*, 1982, **34**: 1.
- [3] Fauve, S., Heslot, F., *Phys. Lett.*, 1983, **97A**: 5.
- [4] McNamara, B., Wiesenfeld, K., Roy, R., *Phys. Rev. Lett.*, 1988, **60**: 2626.
- [5] Gammaitoni, L., Marchesoni, F., Menichella, E. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 1989, **62**: 349.
- [6] McNamara, B., Wiesenfeld, K., *Phys. Rev.*, 1989, **A39**: 4854.
- [7] Hu, G., Nicolis, G., Nicolis, C., *Phys. Rev.*, 1990, **A42**: 2030.
- [8] Hu, G., Qin, G. R., Gong D. C. et al., *Phys. Rev.*, 1991, **A44**: 6414.
- [9] Hu Gang, Gong Dechun, Wen Xiaodong et al., *Chinese Phys. Lett.*, 1992, **9**: 69.
- [10] 秦光戒、龚德纯、胡 岗等, *物理学报*, 1992, **41**: 360.
- [11] Gong, D. C., Qin, G. R., Hu, G. et al., *Phys. Lett.*, 1991, **A159**: 147.
- [12] Bendat, J. S., Piersol, A. G., *Random Data Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Interscience Publication, New York, 1986.