中国科学 G辑: 物理学 力学 天文学　2009年 第39卷 第6期: 895 ~ 900
www.scichina.com　phys.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

人造卫星测轨新方法——单位矢量法

掌静[①②*], 陆本魁[①], 马静远[①], 夏益[①], 张旸[①]

① 中国科学院紫金山天文台, 南京 210008;
② 中国科学院研究生院, 北京 100049
* E-mail: zhangjing@pmo.ac.cn

收稿日期: 2008-07-15; 接受日期: 2008-12-28

摘要　根据单位矢量法测轨原理, 在人造卫星初轨计算的单位矢量法的基础上, 完善了数学模型, 改进了计算方法, 建立了单位矢量法的从无摄初轨到有摄初轨, 从初轨计算到轨道改进的系列算法, 研制了融初轨计算和轨道改进于一体的统一测轨方法(PUVM2). PUVM2方法对5个轨道根数进行了非线性化处理, 避免了微分轨道改进时要对所有轨道根数求有摄偏导数的繁复计算, 简化了工作环节. 大量的仿真和实测计算表明, 该方法可以有效地提高轨道半长轴和平纬度角的测定精度, 这对卫星测控、轨道预报和空间目标监视都非常有利; 该方法适用于不同偏心率轨道的定轨, 具有广阔的应用前景.

关键词
测轨
单位矢量法
摄动

人造卫星初轨计算的单位矢量法(UVM1)[1], 由于其条件方程中不同类型的测量数据(如方位角 A、俯仰角 h、斜距ρ、斜距变化率 $\dot{\rho}$)被分离出来加权处理, 故可以充分发挥高精度测量数据在轨道确定中的作用, 因而显著提高了测轨精度, 在大量的实际计算中得到了充分的检验.

但是UVM1本身还有它的局限性. 首先, 它采用的力学模型是二体运动模型, 在资料精度较高或资料弧段较长的情况下也不能达到更高的定轨精度; 其次, 它还不能适用于长弧段(如地心张角大于 90°), 更不能适用于多圈的轨道改进.

为了克服第一个局限性, 我们建立了有摄单位矢量法(PUVM1)[2], 有效地解决了计算精度问题, 但并没有解决单圈长弧段以及多圈资料迭代计算不收敛的根本问题. 为了克服第二个局限性, 我们建立了改进的无摄单位矢量法(UVM2)[3,4], 不仅适用于短弧段资料, 而且也适用于地心张角超过 90°的长弧段资料, 甚至相邻两圈、相邻两天的多圈资料也可以进行计算, 但是由于力学模型中没有考虑摄动影响, 尽管收敛, 但弧段较长时, 计算精度反而较低.

本文在UVM1的基础上, 结合PUVM1和UVM2的特点, 进一步完善力学模型, 改进计算方法, 将单位矢量法从无摄过渡到有摄, 从初轨计算推广到轨道改进, 给出了融初轨计算和轨道改进于一体的统一测轨方法(PVM2). 计算结果表明, 本文方法是有效的.

1　原理

在地心赤道直角坐标系中, 建立以下两组单位矢量系统:

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}^* = \cos S\cos\varphi\cdot\boldsymbol{i}+\sin S\cos\varphi\cdot\boldsymbol{j}+\sin\varphi\cdot\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{S}^* = -\sin S\cdot\boldsymbol{i}+\cos S\cdot\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{\varphi}^* = -\cos S\sin\varphi\cdot\boldsymbol{i}-\sin S\sin\varphi\cdot\boldsymbol{j}+\cos\varphi\cdot\boldsymbol{j}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}^* = \cos A\cosh\cdot\boldsymbol{\varphi}^* + \sin A\cosh\cdot\boldsymbol{S}^* + \sinh\cdot\boldsymbol{R}^*, \\ \boldsymbol{A}^* = -\sin A\cdot\boldsymbol{\varphi}^* + \cos A\cdot\boldsymbol{S}^*, \\ \boldsymbol{h}^* = -\cos A\sinh\cdot\boldsymbol{\varphi}^* - \sin A\sinh\cdot\boldsymbol{S}^* + \cosh\cdot\boldsymbol{R}^*, \end{cases} \tag{2}$$

$$S = S_{\mathrm{G}} + \lambda,$$

式中 λ, φ 为测站的地理经纬度, S_{G} 为 Greenwich 恒星时.

卫星的测站坐标 $\boldsymbol{R}$ 及其变率 $\dot{\boldsymbol{R}}$ 可以表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{R} = R_0\boldsymbol{R}^* - \Delta R\boldsymbol{\varphi}^*, \\ \dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{S}(R_0\cos\varphi + \Delta R\sin\varphi)\boldsymbol{S}^*, \end{cases} \tag{3}$$

$$R_0 = \sqrt{1-e_{\mathrm{E}}^2\sin^2\varphi} + H,$$

$$\Delta R = \frac{1}{\sqrt{1-e_{\mathrm{E}}^2\sin^2\varphi}}e_{\mathrm{E}}^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

其中 H 为测站的大地高; e_{E} 为地球参考椭球体的偏心率, $\dot{S}$ 为地球自转速率.

在有摄情况下, 任意 t 时刻的卫星坐标 $\boldsymbol{r}$ 都可以表示为[2]

$$\boldsymbol{r} = f\boldsymbol{r}_0 + g\dot{\boldsymbol{r}}_0 + \omega\boldsymbol{W}_0, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 为某一历元 t 时刻的卫星坐标和速度矢量,

$$\begin{cases} f = \boldsymbol{F}_0\cdot\boldsymbol{r}, \\ g = \boldsymbol{G}_0\cdot\boldsymbol{r}, \\ \omega = \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{r}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{p_0}}(\boldsymbol{W}_0\times\dot{\boldsymbol{r}}_0), \\ \boldsymbol{G}_0 = +\dfrac{1}{\sqrt{p_0}}(\boldsymbol{W}_0\times\boldsymbol{r}_0), \\ \boldsymbol{W}_0 = +\dfrac{1}{\sqrt{p_0}}(\boldsymbol{r}_0\times\dot{\boldsymbol{r}}_0), \end{cases} \tag{6}$$

$$p_0 = |\boldsymbol{r}_0\times\dot{\boldsymbol{r}}_0|^2.$$

为了适用于轨道改进, 我们首先把轨道半长轴 a_0(等价于平均运动 n_0)从 $\boldsymbol{r}_0$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 中分离出来[34]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_0' = \dfrac{\boldsymbol{r}_0}{a_0} = \boldsymbol{r}_0'(e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0), \\ \dot{\boldsymbol{r}}_0' = \sqrt{a_0}\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}_0'(e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0). \end{cases} \tag{7}$$

则(4)式改写为

$$\boldsymbol{r} = f_1\boldsymbol{r}_0' + g_1\dot{\boldsymbol{r}}_0' + \omega\boldsymbol{W}_0, \tag{8}$$

其中, $\boldsymbol{r}_0'$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0'$ 仅是 e_0, i_0, Ω_0, ω_0, M_0 五个轨道根数的函数:

$$\begin{cases} f_1 = a_0 f, \\ g_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a_0}}g. \end{cases} \tag{9}$$

其次, 我们把 $\boldsymbol{r}$ 对应的根数称为实测根数, 与观测资料相对应; 把 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}$ 对应的根数称为理论根数, 与观测资料的理论值相对应. 通常我们可以把 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}$ 仅仅归结于初始轨道根数的误差造成, 且假设轨道根数误差是一个小量, 则

$$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{c}} + \sum_{m=0}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}}{\partial\bar{\boldsymbol{n}}_0^{(m)}}\Delta\bar{\boldsymbol{n}}_0^{(m)} + \boldsymbol{v}. \tag{10}$$

这里仅对 a_0(即 n_0)进行展开, 并考虑了动力学模型参数误差的修正, 则由(8)和(10)式可得

$$f_1\boldsymbol{r}_0' + g_1\dot{\boldsymbol{r}}_0' + \omega\boldsymbol{W}_0 + \sum_{m=0}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}}{\partial\bar{\boldsymbol{n}}_0^{(m)}}\Delta\bar{\boldsymbol{n}}_0^{(m)} = \rho\boldsymbol{\rho}^* + \boldsymbol{R}, \tag{11}$$

其中

$$\begin{cases} f_1 = \boldsymbol{F}_0'\cdot\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}, \\ g_1 = \boldsymbol{G}_0'\cdot\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}, \end{cases} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{F}_0' = -\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}(\boldsymbol{W}_0\times\dot{\boldsymbol{r}}_0'),$$

$$\boldsymbol{G}_0' = +\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}(\vec{W}_0\times\boldsymbol{r}_0'),$$

$$1-e^2 = |\boldsymbol{r}_0'\times\dot{\boldsymbol{r}}_0'|^2.$$

对于初轨计算, 由于观测资料弧段较短, ω 总是一个小量, 完全可以把它移到方程的右端[2]; 而对于轨道改进而言, 由于观测弧段较长, 往往是多圈甚至多天的资料, 卫星受摄动影响显著, ω 已经不是一个小量, 不能像初轨计算那样简单处理, 需要把它合理地分配到条件方程的各项中去. 为此我们建立了一组新的单位矢量系统:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_1^* = \dfrac{1}{c_3}\left(c_1\boldsymbol{\rho}^* - \varepsilon_2\boldsymbol{h}^* - \varepsilon_3\boldsymbol{A}^*\right), \\ \boldsymbol{h}_1^* = \dfrac{1}{c_2}\left(c_1\boldsymbol{h}^* + \varepsilon_2\boldsymbol{\rho}^*\right), \\ \boldsymbol{A}_1^* = \dfrac{1}{c_3}\left[c_2\boldsymbol{A}^* + \dfrac{\varepsilon_3}{c_2}\left(c_1\boldsymbol{\rho}^* - \varepsilon_2\boldsymbol{h}^*\right)\right], \end{cases} \tag{13}$$

其中

$$\begin{cases}\varepsilon_1=\dfrac{\omega}{\rho}\left(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{W}_0\right),\ c_1=1-\varepsilon_1,\\ \varepsilon_2=\dfrac{\omega}{\rho}\left(\boldsymbol{h}^*\cdot\boldsymbol{W}_0\right),\ c_2=\sqrt{c_1^2+\varepsilon_2^2},\\ \varepsilon_3=\dfrac{\omega}{\rho}\left(\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{W}_0\right),\ c_3=\sqrt{c_2^2+\varepsilon_3^2}.\end{cases}$$

将(11)式分别投影到 $\boldsymbol{\rho}_1^*$, $\boldsymbol{h}_1^*$, $\boldsymbol{A}_1^*$,上, 可以得到

$$\begin{cases}f_1\boldsymbol{\rho}_1^*\cdot\boldsymbol{r}_0'+g_1\boldsymbol{\rho}_1^*\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_0'+\displaystyle\sum_{m=0}^{3}\boldsymbol{\rho}_1^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_c}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\Delta\overline{n}_0^{(m)}\\ \quad=\boldsymbol{\rho}_1^*\cdot\boldsymbol{R}+c_3\rho,\\ f_1\boldsymbol{h}_1^*\cdot\boldsymbol{r}_0'+g_1\boldsymbol{h}_1^*\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_0'+\displaystyle\sum_{m=0}^{3}\boldsymbol{h}_1^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_c}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\Delta\overline{n}_0^{(m)}=\boldsymbol{h}_1^*\cdot\boldsymbol{R},\\ f_1\boldsymbol{A}_1^*\cdot\boldsymbol{r}_0'+g_1\boldsymbol{A}_1^*\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_0'+\displaystyle\sum_{m=0}^{3}\boldsymbol{A}_1^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_c}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\Delta\overline{n}_0^{(m)}=\boldsymbol{A}_1^*\cdot\boldsymbol{R}.\end{cases}\tag{14}$$

这就是三元素测轨的改进的有摄单位矢量法(PUVM2)的条件方程.

当观测资料还有 $\dot{\rho}$ 时, 还要用到与(11)式相对应的关系:

$$\dot{f}_1\boldsymbol{r}_0'+\dot{g}_1\dot{\boldsymbol{r}}_0'+\dot{\omega}\boldsymbol{W}_0+\sum_{m=0}^{3}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\Delta\overline{n}_0^{(m)}=\dot{\rho}\boldsymbol{\rho}^*+\rho\dot{\boldsymbol{\rho}}^*+\dot{\boldsymbol{R}},\tag{15}$$

其中

$$\begin{cases}\dot{f}_1=\boldsymbol{F}_0'\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_c,\\ \dot{g}_1=\boldsymbol{G}_0'\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_c,\\ \dot{\omega}=\boldsymbol{W}_0\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_c,\end{cases}\tag{16}$$

(15)式右端的 $\dot{\boldsymbol{\rho}}^*$ 需要展开:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}^*=\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*+\sum_{m=0}^{3}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\Delta\overline{n}_0^{(m)},\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}=\frac{1}{\rho_c}\Bigg\{&+\left[\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}-\left(\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial\boldsymbol{n}_0^{(m)}}\cdot\boldsymbol{\rho}_c^*\right)\boldsymbol{\rho}_c^*\right]\\ &-\frac{\dot{\rho}_c}{\rho_c}\left[\frac{\partial\boldsymbol{r}_c}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}-\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_c}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\cdot\boldsymbol{\rho}_c^*\right)\boldsymbol{\rho}_c^*\right]\\ &-\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_c}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*\right)\boldsymbol{\rho}^*{}_c+\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_c}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\cdot\boldsymbol{\rho}_c^*\right)\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*\right]\Bigg\},\end{aligned}\tag{18}$$

其中

$$\begin{cases}\rho_c=\left|\boldsymbol{r}_c-\boldsymbol{R}\right|,\\ \boldsymbol{\rho}_c^*=\dfrac{1}{\rho_c}\left(\boldsymbol{r}_c-\boldsymbol{R}\right),\\ \dot{\rho}_c=\left(\dot{\boldsymbol{r}}_c-\dot{\boldsymbol{R}}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_c^*,\\ \dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*=\dfrac{1}{\rho_c}\left[\left(\dot{\boldsymbol{r}}_c-\dot{\boldsymbol{R}}\right)-\dot{\rho}_c\boldsymbol{\rho}_c^*\right],\end{cases}\tag{19}$$

将(17)式代入(15)式并整理可得

$$\dot{f}_1\boldsymbol{r}_0'+\dot{g}_1\dot{\boldsymbol{r}}_0'+\sum_{m=0}^{3}\left[\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}-\rho\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\right]\Delta\overline{n}_0^{(m)}=\boldsymbol{\rho}'-\dot{\omega}\boldsymbol{W}_0+\dot{\boldsymbol{R}},\tag{20}$$

其中

$$\boldsymbol{\rho}'=\dot{\rho}\dot{\boldsymbol{\rho}}^*+\rho\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*.\tag{21}$$

引进矢量

$$\boldsymbol{\rho}_2=\boldsymbol{\rho}^*+\boldsymbol{\rho}_3,\tag{22}$$

其中

$$\boldsymbol{\rho}_3=+\frac{\dot{\omega}}{\left|\boldsymbol{\rho}'\right|^2}\left(\boldsymbol{\rho}^*\cdot\boldsymbol{W}_0\right)\left[\boldsymbol{\rho}'-\frac{\left(\boldsymbol{\rho}'\cdot\boldsymbol{W}_0\right)\left(\boldsymbol{\rho}^*\times\boldsymbol{\rho}'\right)}{\boldsymbol{W}_0\cdot\left(\boldsymbol{\rho}^*\times\boldsymbol{\rho}'\right)}\right],\tag{23}$$

用 $\boldsymbol{\rho}_2$ 点乘(20)式:

$$\begin{aligned}&\dot{f}_1\boldsymbol{\rho}_2\cdot\boldsymbol{r}_0+\dot{g}_1\boldsymbol{\rho}_2\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_0'+\sum_{m=0}^{3}\left[\boldsymbol{\rho}_2\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}-\rho\boldsymbol{\rho}_2\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\right]\Delta\overline{n}_0^{(m)}\\ &=\boldsymbol{\rho}_2\cdot\left(\boldsymbol{\rho}'-\dot{\omega}\boldsymbol{W}_0\right)+\boldsymbol{\rho}_2\cdot\dot{\boldsymbol{R}}\\ &=\dot{\rho}+\rho\boldsymbol{\rho}^*\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*+\boldsymbol{\rho}_2\cdot\dot{\boldsymbol{R}}\\ &=\dot{\rho}+\rho\sum_{m=0}^{3}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_c^*}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*\right)\Delta\overline{n}_0^{(m)}+\boldsymbol{\rho}_2\cdot\dot{\boldsymbol{R}}.\end{aligned}$$

利用

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\cdot\boldsymbol{\rho}_c^*+\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*=0,$$

并略去 $\Delta\overline{n}_0^{(m)}$ 系数中 $\boldsymbol{\rho}^*$ 与 $\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*$ 的差别, 整理可得四元素测轨的改进的有摄单位矢量法关于 $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ 的条件方程:

$$\dot{f}_1\boldsymbol{\rho}_2\cdot\boldsymbol{r}_0'+\dot{g}_1\boldsymbol{\rho}_2\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_0'+\sum_{m=0}^{3}\left[\boldsymbol{\rho}_2\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}-\rho\boldsymbol{\rho}_3\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^*}{\partial\overline{n}_0^{(m)}}\right]\Delta\overline{n}_0^{(m)}=\boldsymbol{\rho}_2\cdot\dot{\boldsymbol{R}}+\dot{\rho}.\tag{24}$$

当观测资料仅为测角数据时, (11)式右端的 ρ 也要展开:

$$\rho=\rho_{c}+\sum_{m=0}^{3}\frac{\partial\rho_{c}}{\partial\bar{n}_{0}^{(m)}}\Delta\bar{n}_{0}^{(m)}$$
$$=\rho_{c}+\sum_{m=0}^{3}\left(\boldsymbol{\rho}_{c}^{*}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_{c}}{\partial\bar{n}_{0}^{(m)}}\right)\Delta\bar{n}_{0}^{(m)},\qquad(25)$$

代入(11)式，并整理可得

$$f_{1}\boldsymbol{r}_{0}'+g_{1}\dot{\boldsymbol{r}}_{0}'+\sum_{m=0}^{3}\left[\frac{\partial\boldsymbol{r}_{c}}{\partial\bar{n}_{0}^{(m)}}-\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_{c}}{\partial\bar{n}_{0}^{(m)}}\cdot\boldsymbol{\rho}_{c}^{*}\right)\dot{\boldsymbol{\rho}}^{*}\right]\Delta\bar{n}_{0}^{(m)}$$
$$=\rho_{c}\boldsymbol{\rho}^{*}+\boldsymbol{R}-\omega\boldsymbol{W}_{0}=\rho_{c}\left(\boldsymbol{\rho}^{*}-\frac{\omega}{\rho_{c}}\boldsymbol{W}_{0}\right)+\boldsymbol{R}.\qquad(26)$$

与(13)式类似，建立一组新的单位矢量系统 $\boldsymbol{\rho}_{1c}^{*}$, $\boldsymbol{h}_{1c}^{*}$, $\boldsymbol{A}_{1c}^{*}$，形式与(13)式完全相同，仅式中ρ用(19)式计算的ρ_c代替. 这样，用 $\boldsymbol{h}_{1c}^{*}$, $\boldsymbol{A}_{1c}^{*}$ 分别点乘(26)式可以得到

$$\begin{cases}f_{1}\boldsymbol{h}_{1c}^{*}\cdot\boldsymbol{r}_{0}'+g_{1}\boldsymbol{h}_{1c}^{*}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_{0}'\\ \quad+\sum_{m=0}^{3}\boldsymbol{h}_{1c}^{*}\cdot\left[\frac{\partial\boldsymbol{r}_{c}}{\partial\bar{n}_{0}^{(m)}}-\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_{c}}{\partial\bar{n}_{0}^{(m)}}\cdot\boldsymbol{\rho}_{c}^{*}\right)\boldsymbol{\rho}^{*}\right]\Delta\bar{n}_{0}^{(m)}\\ \quad=\boldsymbol{h}_{1c}^{*}\cdot\boldsymbol{R},\\ f_{1}\boldsymbol{A}_{1c}^{*}\cdot\boldsymbol{r}_{0}'+g_{1}\boldsymbol{A}_{1c}^{*}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_{0}'\\ \quad+\sum_{m=0}^{3}\boldsymbol{A}_{1c}^{*}\cdot\left[\frac{\partial\boldsymbol{r}_{c}}{\partial\bar{n}_{0}^{(m)}}-\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_{c}}{\partial\bar{n}_{0}^{(m)}}\cdot\boldsymbol{\rho}_{c}^{*}\right)\boldsymbol{\rho}^{*}\right]\Delta\bar{n}_{0}^{(m)}\\ \quad=\boldsymbol{A}_{1c}^{*}\cdot\boldsymbol{R},\end{cases}\qquad(27)$$

这就是二元素测轨的改进的有摄单位矢量法条件方程.

在解方程时，与 UVM2 一样[3,4]，要注意到$\boldsymbol{r}_0'$和$\dot{\boldsymbol{r}}_0'$满足活力公式:

$$\frac{2}{r_{0}'}-\left|\dot{\boldsymbol{r}}_{0}'\right|=1.\qquad(28)$$

我们将(28)式作为约束条件，利用条件最小二乘法求解$\boldsymbol{r}_0'$，$\dot{\boldsymbol{r}}_0'$和$\Delta\bar{n}_0^{(m)}$. 对于初轨计算，取 $m=0$; 对轨道改进而言，一般取 $m=0, 1$.

2 算例

为了验证本方法的特点，本文作者进行了大量的仿真计算和实测计算.

例 1 二元素资料. 其中小偏心率卫星采用的是中国科学院人卫目视观测网的实测资料，测角精度为 3 角分，比对标准采用定轨历元若干天后的实测根数；中偏心率卫星采用芬兰赫尔辛基气象台观测 1963-30D(e~0.3)的实测资料，测角精度为 6 角分，比对标准采用 SAO SR 中公布的轨道根数 1). 表 1 中给出了三颗卫星的计算结果.

例 2 三元素单圈多段资料，实测资料采用中国卫星发射测控系统部提供的大偏心率卫星同圈九段数据，测角精度为 0.72 角分，测距精度为 10 m，比对标准为多圈数据的微分轨道改进结果. 表 2 给出了三组计算结果.

例 3 三元素多圈资料，实测资料采用某陆上雷达站提供的小偏心率卫星四圈 130 个观测数据，测角精度为 4.5 角分，观测精度为 30~50 m，比对标准采用高精度数据的微分轨道改进结果. 具体见表 3.

例 4 四元素单圈多段资料，实测资料采用中国卫星发射测控系统部提供的大偏心率卫星同圈四段

表 1 测角资料定轨结果 a)

轨道类型	e~0.002		e~0.078		e~0.294	
	H_p~810 km		H_p~240 km		H_p~590 km	
方法	DOI	PUVM2	DOI	PUVM2	DOI	PUVM2
Δa/km	−0.4744	−0.3124	−7.3339	−5.6938	−0.3512	−0.3486
Δi/(°)	0.008	0.005	−0.054	−0.059	0.0090	−0.0003
$\Delta\Omega$/(°)	0.007	0.003	−0.126	−0.118	−0.0319	−0.0132
Δe	0.00017	0.00009	−0.00061	−0.00053	−0.00069	−0.00008
$\Delta\omega$/(°)	−3.201	−3.096	0.361	0.262	0.0944	0.0575
$\Delta\lambda$/(°)	4.021	2.642	44.680	32.403	0.0770	0.0035
资料分布	2 天 4 圈 77 点		2 天 2 圈 34 点		4 天 4 圈 63 点	
比对标准	外推 16 d		外推 14 d		没有外推	

a) H_p 为近地点地面高度，DOI 为经典的微分轨道改进，与 PUVM2 采用相同的一阶分析摄动模型，$\lambda=M+\omega$

1) Slowey J W. Smithsonian Astrophys Obs Spec, 1993. 356

表 2　同圈多段测角、测距资料定轨结果

段落	1~5		1~7		1~9	
弧长/s	10691		22100		30503	
方法	DOI	PUVM2	DOI	PUVM2	DOI	PUVM2
Δa/km	49.576	−11.664	13.237	1.236	2.515	−1.764
$\Delta e/10^{-3}$	0.692	−0.347	0.246	0.338	0.150	0.257
Δi/(°)	−0.072	−0.080	−0.046	−0.041	−0.010	−0.012
$\Delta\Omega$/(°)	−0.033	−0.033	−0.103	−0.108	−0.131	−0.131
$\Delta\omega$/(°)	0.102	0.006	0.127	0.096	0.125	0.110
ΔM/(°)	−0.051	−0.045	−0.039	−0.031	−0.027	−0.027

表 3　多圈测角、测距资料定轨结果 a)

	Δa/km	Δi/(°)	$\Delta\Omega$/(°)	$\Delta\xi/10^{-3}$	$\Delta\eta/10^{-3}$	$\Delta\lambda$/(°)
DOI	−0.1523	0.0065	−0.0170	0.1576	−0.0856	0.0692
PUVM2	0.0409	−0.0048	−0.0497	1.2242	0.6785	−0.0187

a) $\xi = e\cos\omega$, $\eta = -e\sin\omega$

数据, 测角精度为 0.72 角分, 测距精度为 10 m, 测速精度为 0.02 m/s, 比对标准为多圈数据的微分轨道改进结果. 表 4 给出了二组计算结果.

3　分析

由以上计算结果可见, PUVM2 是一种有效的轨道改进方法. 由于它避免了经典的微分轨道改进要对所有轨道根数求有摄偏导数的繁复计算, 因而有效地提高了计算效率, 并在一定程度上提高了轨道测定精度.

PUVM2 也是一种有效的初轨计算方法, 它具有良好的计算收敛性和稳定性. 与经典的初轨计算方法相比, 它可以有效地提高轨道测定精度, 尤其是轨道半长轴的测定精度. 在观测资料弧段较长、资料精度较高时, 其作用尤为明显.

PUVM2 的最大特点就是把初轨计算和轨道改进有机结合起来, 它既适用于短弧段的初轨计算, 也适用于长弧段甚至多圈多天的轨道改进; 既适用于各种不同偏心率的轨道, 也适用于不同类型的观测资料. 从理论上讲, 它在非线性测轨方法的研究领域里作了一次有益的尝试; 从实践中看, 它减少了工作环节, 提高了工作效率.

在单位矢量法系列算法中, 无论是无摄单位矢量法(UVM1)、有摄单位矢量法(PUVM1), 还是改进的无摄单位矢量法(UVM2)、改进的有摄单位矢量法(PUVM2), 都是轨道确定的有效方法. 但 UVM1 和 PUVM1 不能适用于地心张角较大的多段跟踪测量数据的初轨计算, 更不能进行多天多圈观测数据的轨道改进; UVM2 虽然适用于地心张角大于 90°的长弧段, 甚至对于相邻两圈、相邻两天的多圈资料也可以进行计算, 由于没有考虑摄动, 尽管计算收敛, 但弧段越长, 计算精度越低; PUVM2 正是在 UVM1 的基础上, 吸取了 PUVM1 和 UVM2 的优点, 建立的一种融初轨计算和轨道改进于一体的统一测轨方法.

表 4　单圈多段测角、测距和测速数据定轨结果

段落	1~3		1~4	
地心张角(°)	136.47		165.74	
方法	DOI	PUVM2	DOI	PUVM2
Δa/km	22.083	4.915	3.257	−0.040
$\Delta e/10^{-3}$	0.183	0.105	−0.049	0.090
Δi/(°)	−0.026	−0.019	−0.017	−0.011
$\Delta\Omega$/(°)	0.050	0.084	0.026	0.046
$\Delta\omega$/(°)	−0.018	−0.057	−0.010	−0.068
ΔM/(°)	−0.013	−0.012	−0.008	−0.004

致谢　在形成单位矢量法系列算法的十多年中，作者得到了中国卫星发射测控系统部的大力支持和帮助. 该部无偿提供了大量宝贵的观测资料，该部张玉祥高级工程师提出了很多好的建议，在此表示衷心的感谢. 南京大学天文系易照华教授一直关心单位矢量法系列算法的完善和发展，早在 1990 年鉴定 UVM1 研究成果时就向作者提出了向轨道改进过渡的要求，且在理论上一直帮助我们分析、改进和提高，在此表示崇高的敬意.

参考文献

1 陆本魁, 戎鹏志, 吴建民, 等. 人造地球卫星初轨计算的单位矢量法. 宇航学报, 1997, 18(2): 1—7

2 陆本魁, 李剑峰, 马静远, 等. 一种有摄初轨计算的单位矢量法. 宇航学报, 1999, 20(1): 14—20

3 陆本魁, 马静远, 夏益, 等. 一种适用于长弧段的初轨计算方法. 天文学报, 2003, 44(4): 369—374

4 Lu B K, Ma J Y, Xia Y, et al. A method of initial orbit determination for long arc. Chin Astron Astrophys, 2004, 28: 88—93[DOI]